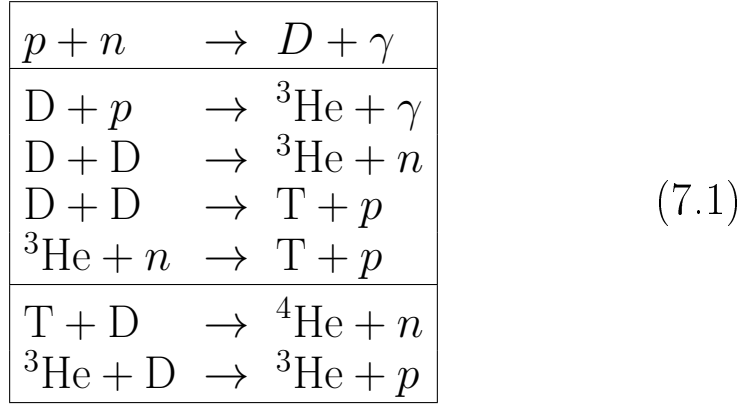


## Лекция 7

Синтез первичного гелия. Темная материя и закалка темной материи. Рекомбинация электронов.

## Синтез гелия

Термодинамически выгодным является продолжение синтеза D до  ${}^4\text{He}$ .



Концентрация адронов, связанных в ядре  $(A, Z)$  (формула (6.75)):

$$X_A = g_A X_p^Z X_n^{A-Z} 2^{-A} A^{5/2} \eta_B^{A-1} \left( \frac{2.5T}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\Delta A/T} \quad (7.2)$$

Оценим равновесные концентрации всех прочих ядер, считая, что концентрация  ${}^4\text{He} \sim 1$   
Из (6.75):

$$X_{4\text{He}} \sim X_p^2 X_n^2 \eta_B^3 \left( \frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{9/2} e^{\Delta_{4\text{He}}/T_{NS}} \quad (7.3)$$

Считаем  $X_p^2 \sim 1$ , выражаем  $X_n$ :

$$X_n \sim X_{4\text{He}}^{1/2} \eta_B^{-3/2} \left( \frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{-9/4} e^{-\Delta_{4\text{He}}/2T_{NS}} \quad (7.4)$$

Подставляем  $X_n$  в (6.75) для произвольного ядра  $(A, Z)$ , считая  $Z_{4\text{He}} \sim 1$ :

$$\begin{aligned} X_A &\sim \left[ \eta_B \left( \frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{3/2} \right]^{\frac{3}{2}Z - \frac{1}{2}A - 1} \times \\ &\quad \times \exp \left( \frac{\Delta_A - \Delta_{4\text{He}}(A - Z)/2}{T_{NS}} \right) \approx \\ &\approx 10^{7.4(A+2-3Z)} \exp \left\{ \frac{(A - Z)[\Delta_A/(A - Z) - \Delta_{4\text{He}}/2]}{T} \right\} \end{aligned} \quad (7.5)$$

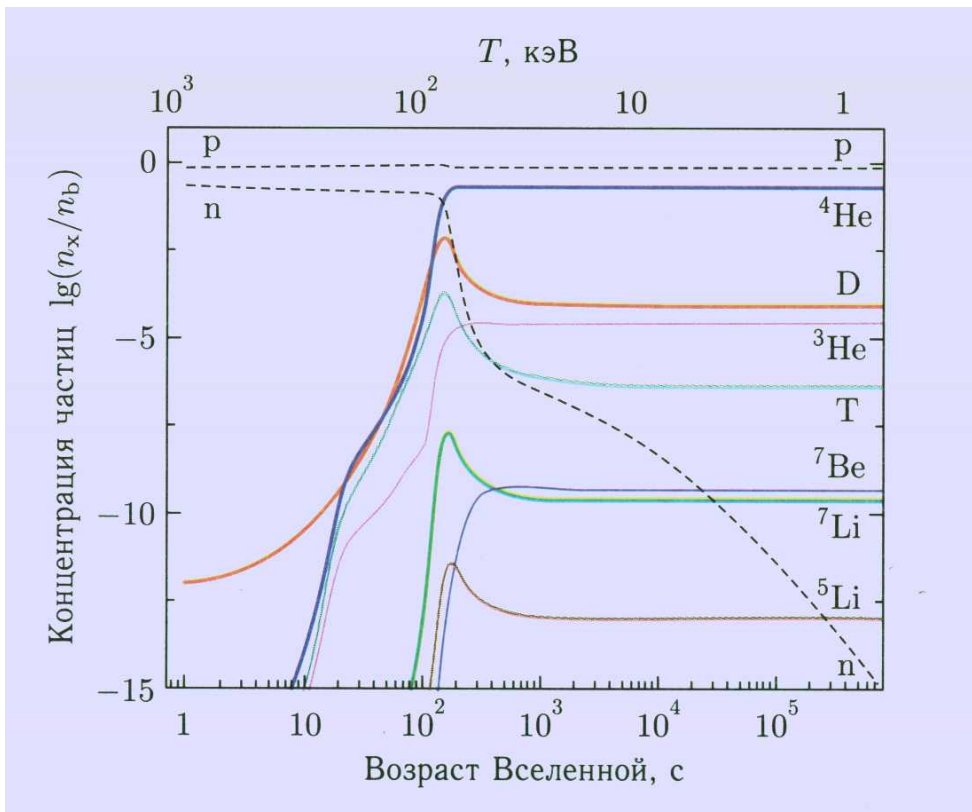
Только для  ${}^4\text{He}$  экспонента  $\sim 1$ .  
Для всех других ядер

$$\Delta_A/(A - Z) - \Delta_{4\text{He}}/2 < 0 \quad (7.6)$$

и экспонента очень мала.  
При  $T_{NS} = 65$  кэВ из (7.5):

$$X_D \sim 10^{-79}, \quad X_{3\text{H}} \sim 10^{-118}, \dots \quad (7.7)$$

Это равновесные концентрации, но в действительности для большинства реакций равновесия нет.  
Но качественный вывод верен –  ${}^4\text{He}$  сильно преобладает из-за высокой энергии связи на нуклон.



## Остаточная концентрация ${}^4\text{He}$

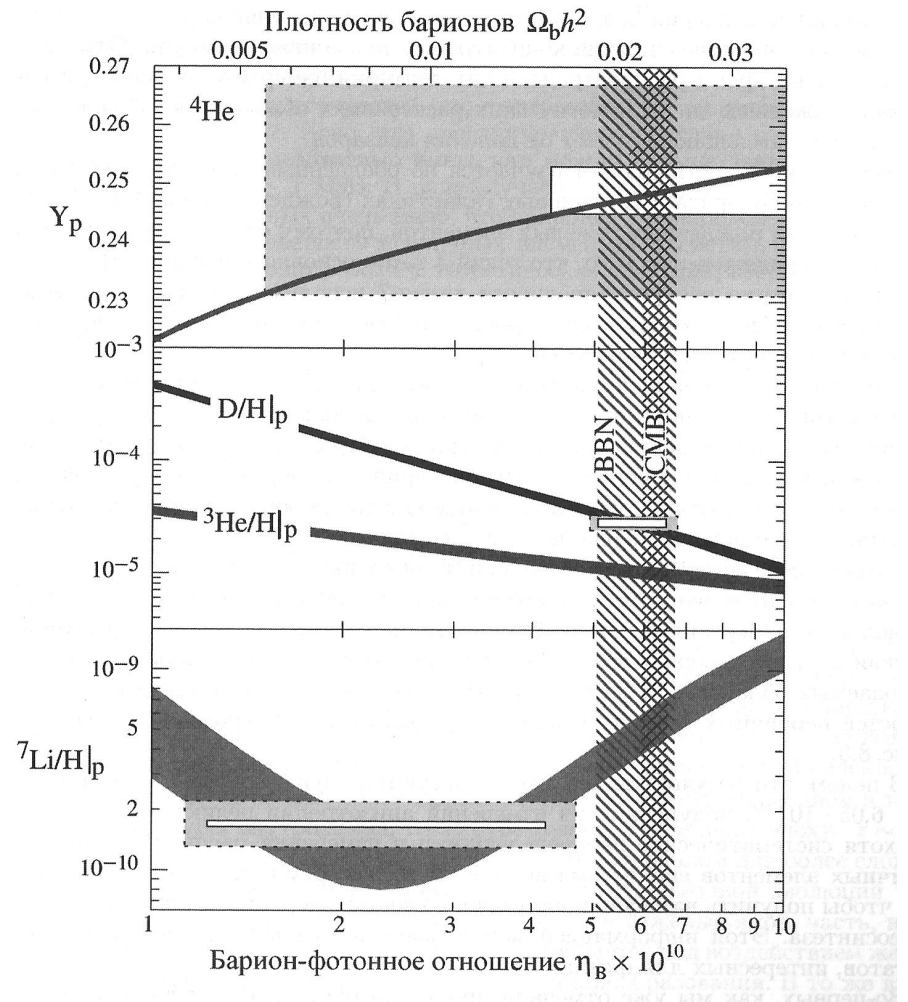
Все нейтроны, не распавшиеся к  $t_{NS} = 4.5$  мин, входят в  ${}^4\text{He}$ .

$$n_{4\text{He}}(t_{NS}) = \frac{1}{2}n_n(t_{NS}) \quad (7.8)$$

$$\frac{n_n(t_{NS})}{n_p(t_{NS})} \cong 0.2 \cdot e^{-t_{NS}/\tau_n} \approx \frac{1}{7} \quad (\tau_n = 886 \text{ сек}) \quad (7.9)$$

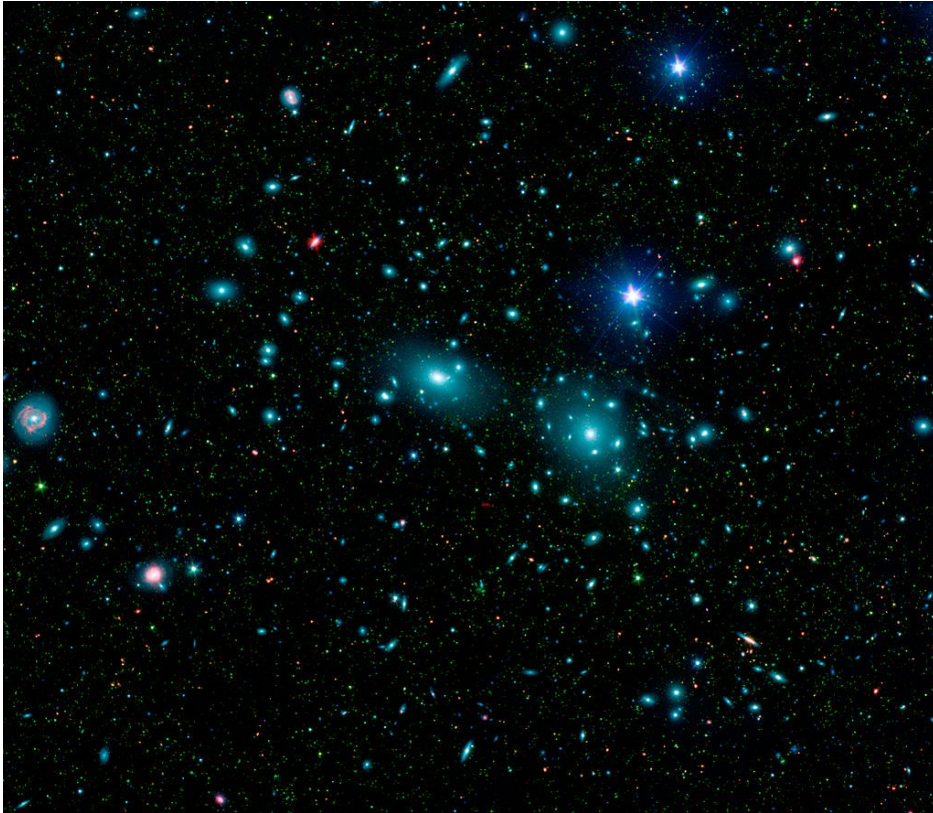
Массовая доля  ${}^4\text{He}$ :

$$\begin{aligned} X_{4\text{He}} &= \frac{m_{4\text{He}}n_{4\text{He}}}{m_p(n_p + n_n)} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}n_n(t_{NS})}{n_p + n_n} = \\ &= \frac{2}{\frac{n_p(t_{NS})}{n_n(t_{NS})} + 1} \approx 25\% \quad (7.10) \end{aligned}$$



## Темная материя

Скорости галактик в скоплениях Франц Цвикки, 1937. Скопление Кома (Волосы Вероники): Масса скопления в десятки раз превышает массу видимого вещества. «Темная материя» – термин Цвикки. F. Zwicky. 1937, ApJ, 86, 217.



## Плоские кривые вращения галактик

Ожидается  $V \propto \sqrt{R}$

Туманность Андромеды (Хорес Бэбкок, 1939)

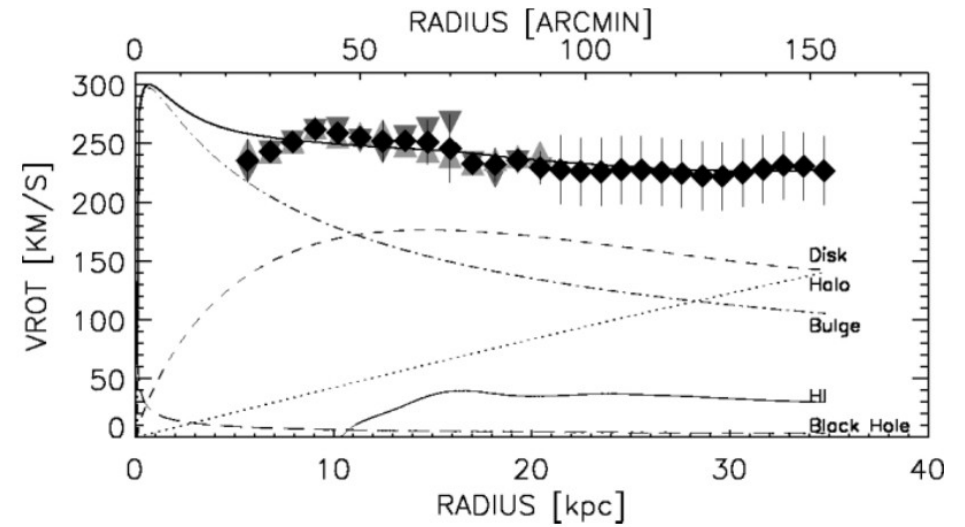
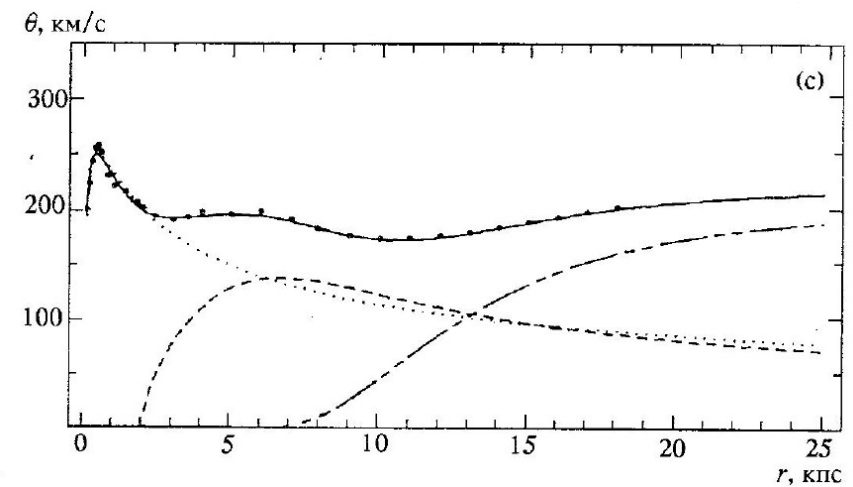


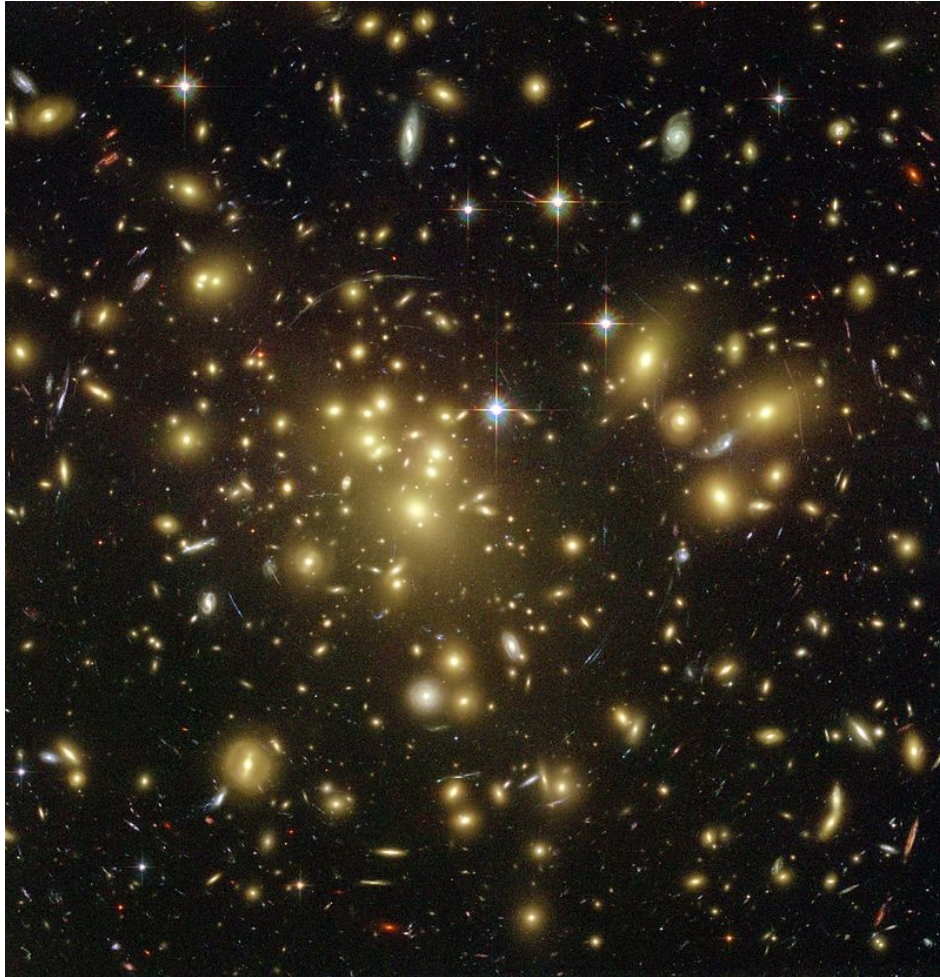
FIG. 2.—Rotation curve and mass model for M31. The new rotation velocities from the Effelsberg and GBT 100 m observations are for  $R > 21$  kpc.

## Млечный Путь



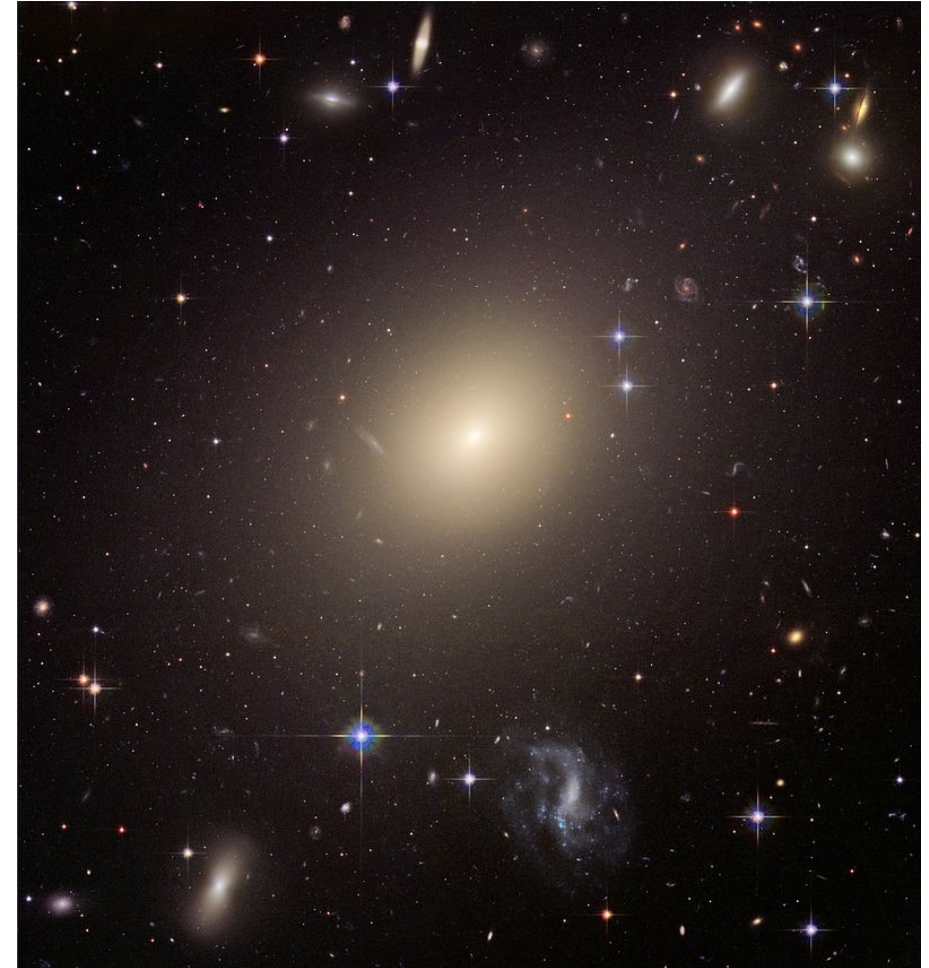
## Сильное гравитационное линзирование скоплениями галактик

Дает результаты, согласующиеся с измерением скоростей в скоплениях галактик.



Скопления галактик Abell 1689. Снимок космического телескопа Хаббл (HST). Галактики самого скопления изображены жёлтым цветом. Галактики на заднем фоне (синие и красные) изогнуты в длинные дуги.

## Удержание горячего газа эллиптическими галактиками



Эллиптическая галактика ESO 325-G004

Гравитационного поля одних только звезд и газа недостаточно для удержания горячего газа эллиптической галактики.

## Карликовые галактики низкой поверхностной яркости

Состоят на  $> 95\%$  из невидимого вещества.



Карликовая неправильная галактика в Стрельце.

## Что такое темная материя?

*MOND (MOdified Newtonian Dynamics) и другие модифицированные теории гравитации.*

Темная материя – *не материя*, а модификация закона тяготения при малых ускорениях/больших расстояниях.

Проблема: недостаточная универсальность.

- Центр тяготения всегда должен быть совмещен с центром масс барионной материи, что иногда не так (например, в парах взаимодействующих галактических кластеров).
- Отношение гравитирующей материи к барионной материи должно быть постоянным, что не так.

*Темная материя – «материя»*

- Небарионная. Крупные объекты давали бы интенсивное микролинзирование, мелкие объекты – интенсивное поглощение и рассеяние света.
- Электрически нейтральная. Заряженная темная материя интенсивно излучала бы или поглощала э.м. излучение. Коллапсировала бы в крупные объекты.
- Если это частицы, то взаимодействуют только слабо и гравитационно – WIMPy (Weakly Interacting Massive Particles) в широком смысле.

## Холодная, теплая и горячая ТМ

- *Холодная темная материя.* Выход из термодинамического равновесия при температуре  $T_f < M_X$ . Имеет место для  $m_X \gtrsim 30$  КэВ. WIMPy (Weakly Interacting Massive Particles) в узком смысле.
- *Теплая темная материя.* Массы между  $\sim 1$  эВ и 30 КэВ. Частицы не являются релятивистскими на момент перехода от РД к МД стадии ( $T_{eq} \sim 1$  эВ), но являются релятивистскими на момент замораживания.
- *Горячая темная материя.*  $M_X < 1$  эВ. Частицы УР на момент перехода от РД к МД стадии.

## Ограничение по массе для частиц теплой темной материи

В диапазоне температур  $M_X < T < T_f$  частицы уже свободны, но еще релятивистские.

Это приводит к сглаживанию начальных неоднородностей ТМ («перемешивание»)  $\Rightarrow$  амплитуды возмущений на малых масштабах малы.

Перемешивание прекращается при  $T \sim M_X$ . Размер горизонта на этот момент определяет размер областей сейчас, где возмущения подавлены.

Т.к. для теплой ТМ перемешивание кончается на РД стадии  $\Rightarrow$

$$l_{Hor} \sim \frac{1}{H} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X^2} \quad (7.11)$$

Этот размер сейчас:

$$l_{Hor,0} = l_{Hor}(1+z) = l_{Hor} \frac{T}{T_0} \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X T_0} \quad (7.12)$$

Электроны уже нерелятивистские:

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 3.36 \Rightarrow \quad (7.13)$$

$$M_{pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}} = 4 \cdot 10^{18} \text{ ГэВ}. \quad (7.14)$$

$$M_X \sim 1 \text{ эВ} \Rightarrow l_{Hor,0} \sim 100 \text{ Мпк} \quad (7.15)$$

– слишком много.

$$M_X \sim 1 \text{ кэВ} \Rightarrow l_{Hor,0} \sim 0.1 \text{ Мпк} \quad (7.16)$$

– разумно, т.к. приводит к структурам типа карликовых галактик  $\Rightarrow$

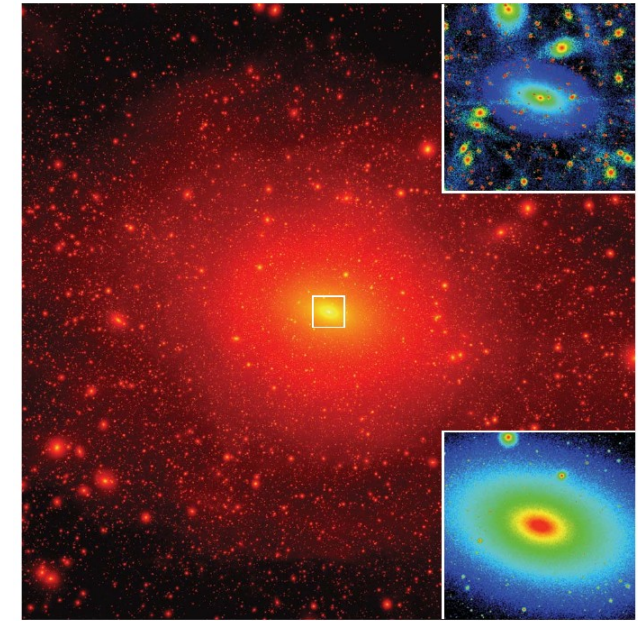
$$M_X \gtrsim 1 \text{ кэВ} \quad (7.17)$$

Теплая темная материя  $1 \text{ кэВ} < M_X < 30 \text{ кэВ}$  не исключена!

Но предпочтительной считается холодная темная материя  $M_X > 30 \text{ кэВ}$

Ограничение сверху на массу «частиц»:  
 $M_X \lesssim 10^3 M_\odot$  – по разрушению звездных скоплений.

## Проблема каспов холодной темной материи



Темная материя должна концентрироваться в компактных сгущениях с «сингулярностями» в центре (cusps, каспы), но никаких признаков каспов в Галактике не обнаружено.



## Закалка темной материи

Предположения:

- $X$  стабильны
- Находятся в равновесии до температур  $T < M_X$
- $n_X - n_{\bar{X}} = 0 \Rightarrow \mu_X = \mu_{\bar{X}} = 0$

При  $T < M_X$ , в равновесии

$$n_X = n_{\bar{X}} = g_X \left( \frac{M_X T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-M_X/T} \quad (7.18)$$

Уменьшение числа частиц ТМ в сопутствующем объеме возможно только за счет аннигиляции:

$X + \bar{X} \rightarrow$  легкие частицы.

После окончания аннигиляции количество частиц в сопутствующем объеме постоянно (с точностью до возможного распада  $X$ ).  $T_f = ?$

Время пробега до аннигиляции

$$\tau = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} \quad (7.19)$$

Условие замораживания числа частиц  $X$ :

$$\tau(T_f) = \frac{1}{n_X(T_f)} \frac{1}{\langle \sigma_{ann}(T_f) v(T_f) \rangle} = \frac{1}{H(T_f)} \quad (7.20)$$

Аннигиляция в  $s$ -волне (закон Бете):

$$\sigma_{ann}(v) = \frac{\sigma_0}{v}; \quad \sigma_0 = \text{const} \Rightarrow \langle \sigma_{ann} v \rangle = \sigma_0 \Rightarrow \quad (7.21)$$

$$\frac{1}{n_X} \frac{1}{\sigma_0} = \frac{1}{H(T_f)} = \left( \frac{T_f^2}{M_{pl}^*} \right)^{-1} \quad (\text{РД стадия!}) \quad (7.22)$$

Подставляем в (7.18):

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{1}{g_X} \left( \frac{2\pi}{M_X T_f} \right)^{3/2} e^{M_X/T_f} = \frac{M_{Pl}^*}{T_f^2} \Rightarrow \quad (7.23)$$

$$\frac{M_X}{T_f} = \ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \cdot \left( \frac{M_X}{T_f} \right)^{1/2} \right] \quad (7.24)$$

Уравнение типа

$$x = \ln(Ax^\alpha) \quad (7.25)$$

$A = ?$

Область взаимодействия  $a^2 \sim \sigma_0$

$$a \sim \lambda_C(M_X) = \frac{1}{M_X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X} \gtrsim 10^{13}; \quad \ln(A) \gtrsim 30 \quad (7.26)$$

Решаем (7.25) методом итераций,  $\alpha = 1/2$ :

$$x_0 = 1 \quad (7.27)$$

$$x_1 = \ln(A) \quad (7.28)$$

$$x_2 = \ln(A) + 0.5 \ln(\ln(A)) \quad (7.29)$$

$0.5 \ln(\ln(A)) \sim 1.5 \Rightarrow$  можно ограничиться приближением  $x_1$  («решение в логарифмическом порядке»)  
 $\Rightarrow$

$$\frac{M_X}{T_f} \approx \ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \Rightarrow \quad (7.30)$$

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right]} \quad (7.31)$$

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right]} \quad (7.32)$$

Знаменатель  $\gtrsim 30 \Rightarrow T_f \ll M_X \Rightarrow$  ТМ действительно холодная.

Найдем  $n_X$ , но не будем пользоваться (7.18), т.к.  $T_f$  в (7.32) получено только с логарифмической точностью.

Из (7.20):

$$n_x(T_f) = \frac{H(T_f)}{\sigma_{ann} v} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} \quad (7.33)$$

Настоящее время:

$$n_X(t_0) = \left( \frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right)^3 n_X(T_f) \quad (7.34)$$

$$s a^3 = \text{const} \Rightarrow s \sim \frac{1}{a^3} \Rightarrow \quad (7.35)$$

$$n_X(t_0) = \frac{s_0}{s(t_f)} n_X(t_f) \quad (7.36)$$

$$s_0 = \frac{4\pi}{90} (2T_\gamma^3 + 2 \cdot 3 \cdot T_\nu^3) \approx 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3} \quad (7.37)$$

$$s(t_f) = g_*(t_f) \frac{4\pi^2}{90} T_f^3 \Rightarrow \quad (7.38)$$

$$\begin{aligned} n_X(t_0) &= \frac{s_0}{s(t_f)} \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} = \left\langle M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66 \sqrt{g_*(t_f)}} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{s_0}{\sqrt{g_*(t_f)} T_f M_{Pl} \left( \frac{4\pi^2}{1.66 \cdot 90} \right)} = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$n_X(t_0) = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \quad (7.40)$$

Найдем  $\Omega_X$ . Подставляя  $T_f$  из (7.32):

$$\begin{aligned} \Omega_X &= 2 \cdot \frac{M_X n_X(t_0)}{\rho_c} = \left\langle 2 - \text{из } X + \bar{X} \right\rangle = \\ &= \left\langle s_0 = 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}; M_{Pl} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ}; \right. \\ &\quad \left. \rho_c = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{\Gamma}{\text{см}^2} \right\rangle = \\ &= \frac{3 \cdot 10^{-10}}{(\sigma_0 / \Gamma \text{ЭВ}^{-2}) \sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \end{aligned} \quad (7.41)$$

Уравнение (7.41) перепишем как уравнение для  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \frac{1}{\Omega_X} \times \frac{3 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \quad (7.42)$$

$\Omega_X = 0.26$  – известно.

$g_* = 10 \div 100$  – в зависимости от  $T_f$

(7.42) решается методом итераций (4 итерации дают 6 значащих цифр):

$$\begin{aligned} M_X = 1 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.76 \div 2.5) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 100 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.82 \div 2.7) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 10 \text{ ТэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.88 \div 2.9) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Сечение очень слабо зависит от  $M_X$  и сравнимо со слабым сечением при энергиях  $\sim 100$  ГэВ:

$$\sigma_w \sim \alpha_w / M_W^2 \sim 10^{-7} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (7.44)$$

$$\sigma_0 \sim a^2 \sim \frac{1}{M_X^2} \Rightarrow M_X \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sim 10 \text{ ТэВ} \quad (7.45)$$

Тяжелая частица со слабым взаимодействием – WIMP.

В современную эпоху

$$\tau_{ann} = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} \quad (7.46)$$

$$\sigma_{ann} = \frac{\sigma_0}{v} \Rightarrow \langle \sigma_{ann} v \rangle = \sigma_0 \sim 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (7.47)$$

Это значение используется для вычисления сигнала аннигиляции темной материи в современных условиях.

$n_X$ , естественно, зависит от  $M_X$ .

$n_X$  зависит от того, куда смотрим: внутренние области Галактики, внешние области, каспы и т.д.

Сечения (7.47) на 2-3 порядка не хватает, чтобы объяснить наблюдаемый поток позитронов в космических лучах  $\Rightarrow$  «буст-фактор».

По формуле (7.32), подбирая подходящий вес  $g_*$ :

$M_X$	$T_f$	$t_f$
1 ГэВ	0.048 ГэВ	$1 \cdot 10^{-4}$ сек
100 ГэВ	3.9 ГэВ	$1.6 \cdot 10^{-8}$ сек
10 ТэВ	330 ГэВ	$2.2 \cdot 10^{-12}$ сек

# Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов

## Температура рекомбинации

Энергия связи электрона в водороде 13.6 эВ.  
Температура рекомбинации масштаба 13 эВ?

- Предполагаем, что все ядра – протоны.
- Предполагаем, что рекомбинация идет равновесно.
- $T \lesssim 10$  эВ  $\Rightarrow p^+$  и  $e^-$  – нерелятивистские

$$n_e = g_e \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T}; \quad g_e = 2 \quad (7.48)$$

$$n_p = g_p \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T}; \quad g_p = 2 \quad (7.49)$$

$$n_H = g_H \left( \frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T}; \quad g_H = 4 \quad (7.50)$$

1. Температура рекомбинации определяется условием:

$$\boxed{n_p(T) = n_H(T)} \quad (7.51)$$

Это одно уравнение, но неизвестных 4:

$T, \mu_e, \mu_p, \mu_H$

Нужно еще 3 уравнения.

2. Сохранение  $n_B$ :

$$n_p + n_H = n_B = \eta_B n_\gamma(T) \quad (7.52)$$

$$\eta_B \approx 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (7.53)$$

$$n_\gamma(T) = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \Rightarrow \quad (7.54)$$

$$n_p + n_H = 6.1 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (7.55)$$

3. Химическое равновесие:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H \quad [p + e \leftrightarrow H + \gamma] \quad (7.56)$$

4. Электронейтральность (сохранение заряда)

$$n_p = n_e \quad (7.57)$$

Решение

$$n_p n_e = g_p g_e \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p + \mu_e - m_p - m_e)/T} \quad (7.58)$$

$$m_p + m_e = m_H + \Delta_H, \quad \Delta_H = 13.6 \text{ эВ} \quad (7.59)$$

(7.57), (7.56)  $\Rightarrow$

$$n_p^2 = g_p g_e \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T} e^{-\Delta_H/T} \quad (7.60)$$

Из (7.50):

$$e^{(\mu_H - m_H)/T} = \frac{n_H}{g_H \left( \frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2}} \Rightarrow \quad (7.61)$$

$$n_p^2 = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} \quad (7.62)$$

К форме Саха:

$$X_p = \frac{n_p}{n_B}, \quad X_H = \frac{n_H}{n_B}, \quad X_p + X_H = 1 \quad (7.63)$$

Из (7.62)

$$X_p^2 \left( \frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = X_H \frac{1}{n_B} \Rightarrow \quad (7.64)$$

$$X_p + n_B X_p^2 \left( \frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (7.65)$$

$$n_B = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (7.66)$$

$$X_p + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} X_p^2 \eta_B \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (7.67)$$

Малый множитель:

$$\eta_B \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} \sim 10^{-17} \Rightarrow \quad (7.68)$$

сразу видно, что  $T_r \ll \Delta_H$ .

$X_p = 0.5 \Rightarrow$

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (7.69)$$

Уравнение привести к виду  $x = \ln(Ax^\alpha)$ :

$$\frac{\Delta_H}{T} = \ln \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\zeta(3)\eta_B 2\sqrt{2}} \left( \frac{m_e}{\Delta_H} \right)^{3/2} \left( \frac{\Delta_H}{T} \right)^{3/2} \right] \quad (7.70)$$

В логарифмическом порядке (первая итерация):

$$T_{rec}^{(1)} = 0.37 \text{ эВ} \quad (7.71)$$

Точное решение

$$\boxed{T_{rec} = 0.321 \text{ эВ}} \quad (7.72)$$

Учтены электроны и барионы, уже связанные в гелии:

$$\eta_B = 0.75 \times 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (7.73)$$

Красное смещение:

$$T(t) = T_0 \frac{a_0}{a(t)} = T_0(z+1) \Rightarrow \quad (7.74)$$

$$z_{rec} = \frac{T}{T_0} - 1 \approx 1370 \quad (7.75)$$

Красное смещение РД-МД перехода

$$z \approx 3 \cdot 10^3 \Rightarrow \quad (7.76)$$

Рекомбинация происходит на МД- (пылевидной) стадии.

$$t = \frac{2}{3H} \quad (7.77)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho \quad (\text{общее уравнение Фридмана}) \quad (7.78)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{1}{6\pi G \rho_M(t_{rec})}} = \sqrt{\frac{M_{Pl}^2}{6\pi \rho_M(T_{rec})}} \quad (7.79)$$

т.к. материя доминирует.

$$\begin{aligned}\rho_M &= \rho_B + \rho_{CDM} = \frac{\rho_B + \rho_{CDM}}{\rho_c} \frac{\rho_c}{\rho_B} \cdot \rho_B = \\ \frac{\Omega_M}{\Omega_B} \rho_B &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p n_B(T_{rec}) = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B n_\gamma(T_{rec}) = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \Rightarrow\end{aligned}\quad (7.80)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_{rec}^3}} \approx 350 \text{ тыс. лет} \quad (7.81)$$

**Каковы были химические потенциалы  $\mu_p, \mu_H, \mu_e$  на момент рекомбинации?**

$$\begin{cases} g_p \left( \frac{m_p T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_H \left( \frac{m_H T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_{rec}} \\ g_p \left( \frac{m_p T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_e \left( \frac{m_e T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T_{rec}} \\ \mu_p + \mu_e = \mu_H \end{cases} \quad (7.82)$$

Решение:

$$\mu_p = m_p - \Delta_H + T \ln \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{m_e}{m_H} \right)^{3/2} \right] \quad (7.83)$$

$$\mu_e = m_e - \Delta_H + T \ln \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{m_p}{m_H} \right)^{3/2} \right] \quad (7.84)$$

$$\mu_H = m_H - \Delta_H + T \ln \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{m_e}{m_p} \right)^{3/2} \right] \quad (7.85)$$

Во всех случаях

$$\mu_i = m_i - \delta\mu_i; \quad \delta\mu_i \ll m_i \quad (7.86)$$

**Каков хим. потенциал атомов водорода сейчас?**

$$\begin{aligned} n_H &\approx \eta_B n_\gamma = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_0^3 = \\ &= g_H \left( \frac{m_H T_0}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_0} \end{aligned} \quad (7.87)$$

$$e^{(\mu_H - m_H)/T_0} = \frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T_0}{m_H} \right)^{3/2} \Rightarrow \quad (7.88)$$

$$\begin{aligned} \mu_H &= m_H + T_0 \ln \left[ \frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T_0}{m_H} \right)^{3/2} \right] = \\ &= m_H - \delta\mu_H^0; \quad \delta\mu_H^0 = 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ ГэВ} \end{aligned} \quad (7.89)$$

## Длительность рекомбинации

Диапазон температур, когда  $\exp(\Delta_H/T)$  отличается от  $\exp(\Delta_H/T_{rec})$  в  $e$  раз:

$$\left| \frac{\Delta_H}{T \pm \Delta T} - \frac{\Delta_H}{T_r} \right| = 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_{rec}} \approx \frac{T_{rec}}{\Delta_H} = \frac{0.32}{13.6} \approx 0.02 \quad (7.90)$$

$$T = \frac{\text{const}}{a} \Rightarrow \frac{\Delta a}{a_{rec}} = \frac{\Delta T}{T_{rec}} = 0.02 \ll 1 \quad (7.91)$$

Время рекомбинации много меньше хаббловского времени.