

## Лекция 8

Последнее рассеяние фотонов. Эпоха реинизации.

Краткая история Вселенной - резюме. Фоновая метрика в конформном времени.

Джинсовская неустойчивость. Возмущения метрики и фиксация калибровки  $h_{0i} = 0$ . Возмущения тензора ЭИ.

## Последнее рассеяние фотонов

Не то же самое, что рекомбинация – позже!

Томсоновское сечение рассеяния фотонов:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m_e^2} \approx 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \quad (8.1)$$

Время свободного пробега фотона по отношению к томсоновскому рассеянию:

$$\tau_\gamma = \frac{1}{\sigma_T n_e(T)} \quad (8.2)$$

Из (7.62):

$$\begin{aligned} n_e^2(T) &= n_p^2(T) = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} = \\ &= \setminus n_H \cong \eta_B \cdot n_\gamma \text{ т.к. рекомбинация} \\ &\quad \text{практически завершена} \setminus = \\ &= \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 e^{-\Delta_H/T} \quad (8.3) \end{aligned}$$

Время последнего рассеяния определяется

$$\tau_\gamma(T_f) \simeq H^{-1}(T_f) \simeq t_f \quad (8.4)$$

$t_f$  мало отличается от  $t_{rec} = 350$  тыс. лет, поэтому для оценки  $T_f$  можно в правой части уравнения использовать  $t_{rec}$  вместо  $t_f$ :

$$\frac{1}{\sigma_T} \frac{1}{\left[ \left( \frac{m_e T_f}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 e^{-\Delta_H/T_f} \right]^{1/2}} = t_{rec} \quad (8.5)$$

$$e^{\Delta_H/T_f} = \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left( \frac{m_e T_f}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \quad (8.6)$$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} = \ln \left[ \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left( \frac{m_e T_f}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \right] \quad (8.7)$$

В п.ч.  $T_f \rightarrow T_{rec} \Rightarrow$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} \cong \ln \left[ \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left( \frac{m_e T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \right] \quad (8.8)$$

$$T_{rec} = 0.32 \text{ эВ} \quad (8.9)$$

$$\eta_B = 0.75 \cdot 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.10)$$

$$t_{rec} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ лет} \Rightarrow \quad (8.11)$$

$$\boxed{T_f = 0.27 \text{ эВ}} \quad (8.12)$$

Аналогично (7.81)

$$t_f = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_f^3}} \approx 460 \text{ тыс. лет} \quad (8.13)$$

$$z_f = \frac{0.27 \text{ эВ}}{2.73 \times 8.6 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}} = 1140 \approx 1100 \quad (8.14)$$

## Горизонт на момент последнего рассеяния ( $z \approx 1100$ )

Момент последнего рассеяния обычно отождествляют с рекомбинацией:  $f \rightarrow r$

Можно (довольно грубо) найти, считая, что Вселенная всегда была пылевидной:

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_r(t_r)} \quad (8.15)$$

Из уравнения Фридмана:

$$H_r^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M(t_r) \quad (8.16)$$

$$\rho_M(t_r) = \rho_{M,0} \left( \frac{a_0}{a_r} \right)^3 = \rho_{M,0} (1 + z_r)^3 \quad (8.17)$$

$$\rho_{M,0} = \rho_c \Omega_M \quad (8.18)$$

$$l_{H,r} = \frac{2}{\sqrt{\frac{8\pi}{3} G \rho_c \Omega_M (1 + z_r)^3}} = \sqrt{\rho_c = \frac{H_0^2}{\frac{8\pi}{3} G}} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}} \quad (8.19)$$

$$\boxed{l_{H,r} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}}} \quad (8.20)$$

Сейчас этот размер растянут в  $a_0/a_r = 1 + z_r$  раз:

$$l_{H,r}(t_0) = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1 + z_r}} \quad (8.21)$$

Современный горизонт:

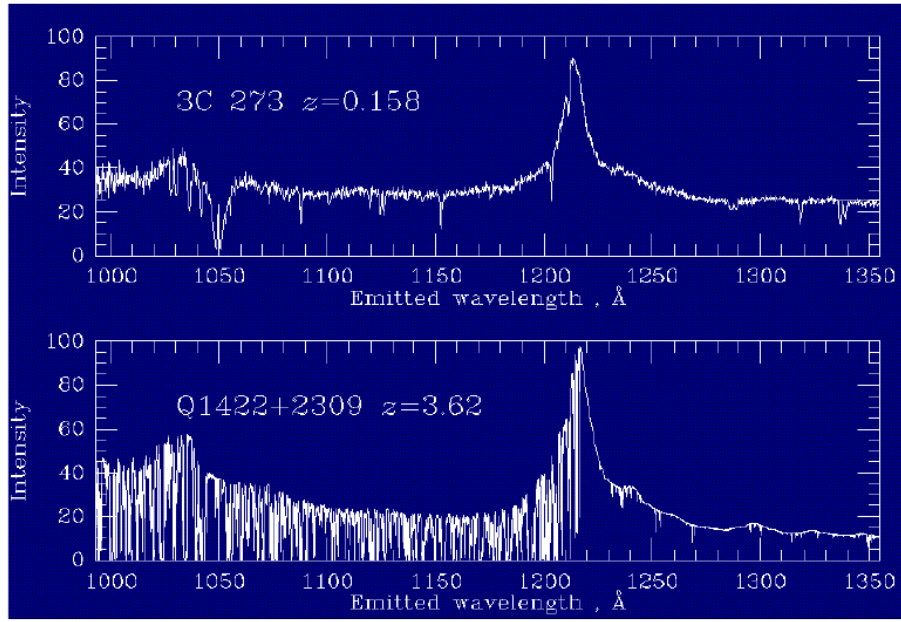
$$\begin{aligned} l_{H,0} &= a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \\ &= a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a_0 \left( \frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \left[ \text{sh} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3}} = \frac{2}{H_0} \times 1.8 \end{aligned} \quad (8.22)$$

Это в  $\sim 30$  раз больше, чем  $l_{H,r}(t_0)$  – видимая часть Вселенной содержит  $\sim 3 \cdot 10^3$  причинно не связанных областей на момент рекомбинации.

Отчего же микроволновой фон однороден с точностью  $\sim 10^{-4}$ ? – «**проблема горизонта**».

## Эпоха реионизации

### Лайман-альфа-лес (Lyman-alpha forest)



- $\text{Ly}_\alpha$ -линия поглощения сдвинутая разным красным смещением облаков водорода.
- Чем дальше квазар, тем гуще лес.
- При  $z > 6$  густота леса перестает расти. Почему?

Реионизация водорода (но не гелия),  
 $6 < z < 20$ ,  $150 \cdot 10^6 - 1000 \cdot 10^6$  лет.

Остаточная оптическая толщина  $\tau \simeq 0.09 \pm 0.03$

## Краткая история Вселенной (13.8 млрд. лет)

Событие	$T$	$z$	$t$
Горячий Большой взрыв	—	—	0
GUT-переход (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Бариогенезис (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Электрослабый переход	100 ГэВ	$10^{15}$	$10^{-11}$ сек
Закалка темной материи(?)	$0.05 \div 300$ ГэВ	$10^{11} \div 10^{15}$	$2 \cdot 10^{-12} \div 10^{-4}$ сек
Адронизация: конфайнмент кварков	170 МэВ	$7 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{-12} \div 10^{-5}$ сек
Закалка нейтрино	1.2 МэВ	$5 \cdot 10^9$	0.85 сек
Закалка нейтронов	0.8 МэВ	$3 \cdot 10^9$	2.5 сек
Нуклеосинтез	65 кэВ	$3 \cdot 10^9$	4.5 мин

Событие	$T$	$z$	$t$
РД $\rightarrow$ МД переход	1 эВ	3000	85 тыс. лет
Рекомбинация электронов	0.32 эВ	1370	350 тыс. лет
Последнее рассеяние фотонов	0.27 эВ	1140	460 тыс. лет
Реионизация	$50 \div 15$ К°	$20 \div 6$	$150 \div 1000$ млн. лет
Начало эры ДеСиттера	4.5 К°	0.65	7.6 млрд. лет
Сейчас	2.73 К°	0.0	13.8 млрд. лет

## Фоновая метрика, конформное время.

$$d\eta = dt/a; \quad dt = ad\eta; \quad dt/d\eta = a \quad (8.23)$$

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - dx^i dx^i] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (8.24)$$

Перепишем уравнения в производных по конформному времени:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta} \frac{d}{dt} = a \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \quad (8.25)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} \quad (8.26)$$

Уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (8.27)$$

$(i, j)$ -компонента уравнений Эйнштейна

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi Gp \Rightarrow 2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp \quad (8.28)$$

Ковариантный закон сохранения энергии

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0 \quad (8.29)$$

Космологические решения  $a(\eta)$ :

$$\text{РД-стадия: } a(\eta) = \text{const} \cdot \eta; \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/2} \quad (8.30)$$

$$\text{МД-стадия: } a(\eta) = \text{const} \cdot \eta^2; \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/3} \quad (8.31)$$

$$\Lambda\text{-стадия: } a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}; \quad \eta = -\text{const} \cdot e^{-H_{dS}t}, \quad \eta < 0 \quad (8.32)$$

$$H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (8.33)$$

## Коэффициенты в (8.30) и (8.31)

*РД-стадия*

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}G\frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \quad (8.34)$$

Сохранение энтропии:

$$g_*a^3T^3 = g_*^0a_0^3T_0^3 \quad (8.35)$$

$$T^3 = \frac{g_*^0}{g_*} \frac{a_0^3}{a^3} T_0^3 \Rightarrow T = \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \frac{a_0}{a} T_0 \quad (8.36)$$

$$\rho_c \Omega_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \Rightarrow T_0^4 = \frac{\Omega_{rad}\rho_c}{\frac{\pi^2}{30}g_*^0} \quad (8.37)$$

Подставляем (8.37) в (8.36), (8.36) в (8.34):

$$H^2 = \left(\frac{8\pi}{3}G\rho_c\right) \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right) \Omega_{rad} = \\ H_0^2 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right) \Omega_{rad} \quad (8.38)$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{\dot{a}} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \sqrt{\Omega_{rad}}} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0^2} \frac{a}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \\
&= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \sqrt{\Omega_{rad}}} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0^2} \frac{a}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \quad (8.39)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \frac{a}{a_0}} \quad (8.40)$$

*МД-стадия (но не  $\Lambda$ )*

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c \quad (8.41)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M = \frac{8\pi}{3} G \rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \quad (8.42)$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_M^0}{\rho_c} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow H^2 = H_0^2 \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad (8.43)$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \sqrt{\Omega_M} (a_0/a)^{3/2}} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \quad (8.44)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\eta^2 = \frac{a}{a_0} \frac{4}{a_0^2 H_0^2 \Omega_M}} \quad (8.45)$$

**Конформные времена  $\eta_0, \eta_r, \eta_{eq}$**

Уравнение Фридмана:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4} \quad (8.46)$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_{z+1}^{\frac{a_0}{a}} \frac{da}{a^2 H(a)} = \int_{\infty}^z -\frac{a_0}{(z+1)^2} dz = \\
&= \int_{\infty}^z -\frac{dz}{a_0 H(z)} = \\
&= \frac{1}{a_0 H_0} \int_z^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4}} \quad (8.47)
\end{aligned}$$

Конформное время современной эпохи:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + (1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\
&= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times I(\Omega_M) \quad (8.48)
\end{aligned}$$

$$\Omega_M = 0.31, \Omega_\Lambda = 0.69, \Omega_{rad} = 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow I(\Omega_M) \approx 0.89 \quad (8.49)$$

Конформное время последнего рассеяния (рекомбинации):

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{2} \int_{z_r}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \mathcal{F} \left( \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) \end{aligned} \quad (8.50)$$

$\mathcal{F}$  считается:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left( \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} = \\ \sqrt{\frac{\Omega_M}{\Omega_{rad} = 1+z_{eq}}} &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \\ \mathcal{F} &= 0.017 \end{aligned} \quad (8.51)$$

Легко считается угол видимости горизонта рекомбинации:

$$\Delta\theta_r = \eta_r / \eta_0 = 0.019; \quad \Delta\theta_r = 1.1^\circ \quad (8.52)$$

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+z_{eq}}}; \quad \mathcal{F} = 0.0076 \quad (8.53)$$

$$\frac{\eta_r}{\eta_{eq}} = 2.3; \quad \frac{\eta_0}{\eta_{eq}} = 1.2 \cdot 10^2 \quad (8.54)$$

$\eta_r$  и  $\eta_{eq}$  близки, но не совпадают.

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}} (\sqrt{2}-1) \quad (8.55)$$

$$a_0 \eta_r = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \left( \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \right) \quad (8.56)$$

$$a_0 \eta_0 = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M); \quad I(\Omega_M) = 0.89 \quad (8.57)$$

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} (a_{eq} \eta_{eq}) = \frac{a_0}{a_{eq}} l_H^{eq} \quad (8.58)$$

– до каких размеров сейчас растянулся горизонт на момент перехода РД→МД. И т.д.

$$a_0 \eta_{eq} = 120 \text{ Мпк} \quad (8.59)$$

$$a_0 \eta_r = 510 \text{ Мпк} \quad (8.60)$$

$$a_0 \eta_0 = 14.1 \text{ Гпк} = 46.0 \text{ Млрд. св. лет} \quad (8.61)$$



# Космологические возмущения

## Джинсовская неустойчивость

Ньютоновская гравитация + классическая гидродинамика нерелятивистской идеальной жидкости.

Гравитационный потенциал:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (8.62)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (8.63)$$

Уравнение Эйлера:

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \mathbf{g}\rho dV - \oint_{\partial V} p d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{g}\rho dV - \int_V \nabla p dV \quad (8.64)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \quad (8.65)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \Rightarrow \quad (8.66)$$

$$\rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \quad (8.67)$$

Начальные условия – бесконечная однородная статическая среда:

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad p(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (8.68)$$

[Заведомо нереалистично, т.к.  $\Delta\varphi = 4\pi G\rho \neq 0$ ]

Изучаем малые возмущения.

Линеаризованные уравнения:

Из (8.62):

$$\Delta(\varphi + \delta\varphi) = 4\pi G(\rho + \delta\rho) \Rightarrow \quad (8.69)$$

$$\Delta\delta\varphi = 4\pi G\delta\rho \quad (8.70)$$

Из (8.63):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho + \delta\rho) + \nabla[(\rho + \delta\rho)(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})] &= \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v} + \delta\rho\mathbf{v} + \rho\delta\mathbf{v} + \delta\rho\delta\mathbf{v}) = \\ &= \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) \right] + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\delta\mathbf{v}) = \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.71)$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} = 0 \quad (8.72)$$

Из (8.67):

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \simeq 0 - 2\text{-й порядок малости} \quad (8.73)$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi \quad (8.74)$$

Уравнение состояния:  $p = p(\rho)$

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \delta\rho \equiv u_s^2 \delta\rho \quad (8.75)$$

Из (8.72), подставляя  $\partial\delta\mathbf{v}/\partial t$  из (8.74)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} &= \\ = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi\right) &= \left\langle \nabla\delta p = \nabla\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho\right) \right\rangle = \\ = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}u_s^2\nabla\delta\rho - 4\pi G\rho\delta\rho\right) &= \\ = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - u_s^2\nabla\delta\rho - 4\pi G\rho\delta\rho &= 0 \quad (8.76) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - u_s^2\Delta\delta\rho - 4\pi G\rho\delta\rho = 0} \quad (8.77)$$

[Если  $G = 0$ , то простое волновое уравнение]

Ищем решения в виде малых линейных волн:

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \int d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q}) = \int d^3q e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \delta\rho(\mathbf{q}, t) \quad (8.78)$$

$$\frac{\partial^2\delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \int [-\omega^2(\mathbf{q})] d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q}) \quad (8.79)$$

$$\Delta\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \int (-q^2) d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q})$$

Подставляем в (8.77):

$$\int [-\omega^2(\mathbf{q}) + u_s^2q^2 - 4\pi G\rho] e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)} \delta\rho(\mathbf{q}) d^3q = 0 \quad (8.80)$$

$\Rightarrow$  Закон дисперсии

$$\omega^2(\mathbf{q}) = \omega^2(q) = u_s^2q^2 - 4\pi G\rho \quad (8.81)$$

Джинсовский импульс (волновое число) и длина волны

$$q_J = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{u_s^2}}; \quad \lambda_J = \frac{2\pi}{q_J} \quad (8.82)$$

$$\lambda < \lambda_J \Rightarrow \omega^2(q) > 0, \text{ волна} \quad (8.83)$$

$$\lambda < \lambda_J \Rightarrow \text{волновых решений нет} \quad (8.84)$$

$$\omega(q) = \pm i\sqrt{4\pi G\rho - u_s^2q^2} = \pm\Omega_q, \quad \Omega_q > 0 \quad (8.85)$$

$$\delta\rho(q, t) = \delta\rho(q, 0)e^{\pm\Omega_q t} \quad (8.86)$$

Экспоненциально растущее и экспоненциально падающее решения – гравитационная неустойчивость Джинса.

Если  $u_s = 0$  (пыль) то колебательных решений нет совсем.

Линейный и нелинейный режимы:

$$\delta(\mathbf{q}, t) \equiv \frac{\delta\rho(\mathbf{q}, t)}{\rho} \quad (8.87)$$

Если  $\delta(\mathbf{q}, t) \ll 1$  работает линейный анализ (представление Фурье).

Время входа в нелинейный режим определяется условием

$$\delta(\mathbf{q}, t_{nl}) \sim 1 \quad (8.88)$$

Режим роста вообще говоря не экспоненциальный, но условия выхода в нелинейный режим всегда такие.

## Возмущения метрики и фиксация калибровки $h_{0i} = 0$

$$ds^2 = a^2(\eta)\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (8.89)$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (8.90)$$

$\eta_{\mu\nu}$  – Минковский,  $h_{\mu\nu}$  – возмущение. Индексы возмущений будем поднимать/опускать метрикой Минковского:

$$h_\mu^\nu = \eta^{\nu\lambda}h_{\lambda\mu} \text{ и т.д.} \quad (8.91)$$

Если  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , то  $\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$  (проверить)

Теория инвариантна относительно калибровочных преобразований – произвольных диффеоморфизмов. Рассматриваем произвольные инфинитезимальные преобразования

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad \xi^\mu \sim h^{\alpha\beta} \quad (8.92)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu \text{ (проверить)} \quad (8.93)$$

Как преобразуются  $h^{\mu\nu}$ ? Используем (8.93):

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\nu} &= \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) + g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\nu + g^{\nu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\mu \end{aligned} \quad (8.94)$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu + (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\mu \quad (8.95)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu &\simeq \eta^{\mu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\nu = \eta^{\mu\lambda}(\partial_\lambda \xi^\nu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma) = \\ &= \partial^\mu \xi^\nu + \eta^{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma \end{aligned} \quad (8.96)$$

$\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu$  достаточно считать в 0-порядке:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu &= \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\sigma g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\sigma\lambda}) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\eta^{\nu\rho}[\partial_\sigma(a^2\eta_{\lambda\rho}) + \partial_\lambda(a^2\eta_{\rho\sigma}) - \partial_\rho(a^2\eta_{\sigma\lambda})] = \\ &= \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \delta_\lambda^\nu + \partial_\lambda a \delta_\sigma^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho}\eta_{\sigma\lambda}) \end{aligned} \quad (8.97)$$

$$\eta^{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a \eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \quad (8.98)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu &= \\ &= \partial^\mu \xi^\nu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a \eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \end{aligned} \quad (8.99)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\mu &= \\ &= \partial^\nu \xi^\mu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\nu\mu} + \partial_\lambda a \eta^{\nu\lambda}\xi^\mu - \partial_\rho a \eta^{\mu\rho}\xi^\nu) \end{aligned} \quad (8.100)$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu + 2\eta^{\mu\nu}\xi^\sigma \frac{\partial_\sigma a}{a} \quad (8.101)$$

Так как  $\xi^\mu$  есть 4 произвольные функции, то их выбираем так, чтобы занулить 3 величины  $h_{i0} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Остается еще остаточная инвариантность для преобразований

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \quad (8.102)$$

$$\xi_i = \xi_i(\mathbf{x}), \quad \xi_0 = 0 \quad (8.103)$$

В калибровке  $h_{i0} = 0$ :

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + h_{00})d\eta^2 - (\delta_{ik} + h_{ik})dx_i dx_k]. \quad (8.104)$$

Для наблюдателя, покоящегося в сопутствующей системе,  $dx_i = 0 \Rightarrow$

$$ds^2 = d\tau^2 = a^2(\eta)(1 + h_{00})d\eta^2 \Rightarrow \quad (8.105)$$

$$d\tau = a(\eta)\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right)d\eta \quad (8.106)$$

### Возмущения тензора энергии-импульса

ТЭИ идеальной жидкости:

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - \delta_\nu^\mu p \quad (8.107)$$

С возмущениями:

$$T_\nu^\mu = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u^\mu + \delta u^\mu)(u_\nu + \delta u_\nu) - \delta_\nu^\mu(p + \delta p) \quad (8.108)$$

### Скорость

Невозмущенная скорость имеет только 0-компоненту:  $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 \Rightarrow a^2\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = a^2u^0u^0 = 1 \Rightarrow u^0 = \frac{1}{a}; \quad u_0u^0 = 1 \Rightarrow u_0 = a \quad (8.109)$$

$u^\mu$  – координатные (не физические) скорости.

Физические скорости:

$$dX^\mu = a dx^\mu \Rightarrow V^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = a \frac{dx^\mu}{ds} = a u^\mu \quad (8.110)$$

$$V^0 = a u^0 = 1; \quad V^i = a u^i = 0; \quad (8.111)$$

Возмущенная скорость:

$$\hat{V}^0 = V^0 + v^0 = 1 + v^0 \quad (8.112)$$

$$\hat{V}^i = V^i + v^i = v^i - \text{физическая скорость} \quad (8.113)$$

$v^0$  и  $v^i$  – величины первого порядка малости.

$$\hat{V}^\mu = a \hat{u}^\mu \quad (8.114)$$

$$\hat{u}^0 \equiv u^0 + \delta u^0 = \frac{1}{a}(1 + v^0) \quad (8.115)$$

$$\hat{u}^i \equiv u^i + \delta u^i \equiv \delta u^i = \frac{1}{a}v^i \quad (8.116)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_\mu \hat{u}^\mu &= (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) + \delta u_i \delta u^i \cong \\ &\cong (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) = 1 \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.117)$$

$$u_0 + \delta u_0 = \frac{1}{u^0 + \delta u^0} = a(1 - v^0) \quad (8.118)$$

$$\delta u_i = a^2 \eta_{i\mu} \delta u^\mu = -a^2 \delta u^i = -a^2 \frac{1}{a} v^i = -a v^i \quad (8.119)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= g_{\mu\nu} \hat{u}^\mu \hat{u}^\nu = a^2 [(\eta_{00} + h_{00}) \hat{u}^0 \hat{u}^0 + (\delta_{ij} + h_{ij}) \hat{u}^i \hat{u}^j] = \\ &= a^2 (1 + h_{00}) \frac{1}{a^2} (1 + v^0)^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) \delta u^i \delta u^j \cong \\ &\cong (1 + h_{00}) (1 + v^0)^2 \cong 1 + h_{00} + 2v^0 \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.120)$$

$$v^0 = -\frac{1}{2}h_{00} \quad (8.121)$$

В линейном порядке это есть гравитационное замедление времени. Даже если  $v^i = 0$  время замедляется.

$$\boxed{v^i \text{ могут быть любыми (малыми)}} \quad (8.122)$$

Соглашение: для трехмерных величин индексы опускаются трехмерной метрикой  $\delta_{ij}$

$$v_i = \delta_{ij}v^j = v^i \quad (8.123)$$

Компоненты ТЭИ

$$\begin{aligned} T_0^0 &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}(1 + v_0)a(1 - v_0) - \delta_0^0(p + \delta p) = \\ &= \rho + \delta\rho \text{ в первом порядке} \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.124)$$

$$\boxed{\delta T_0^0 = \delta\rho} \quad (8.125)$$

$$\begin{aligned} T_i^0 &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}(1 + v_0)(-av_i) - \delta_i^0(p + \delta p) \cong \\ &\cong (\rho + p + \delta\rho + \delta p)(-v_i) \cong -(\rho + p)v_i \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.126)$$

$$\boxed{\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i} \quad (8.127)$$

$$\begin{aligned} T_j^i &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}v^i(-av_j) - \delta_j^i(p + \delta p) \cong \\ &\cong -\delta_j^i p - \delta_j^i \delta p \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.128)$$

$$\boxed{\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p} \quad (8.129)$$