

Лекция 9

Разложение возмущений по спиральностям. Линеаризованные уравнения для возмущений. Моды за горизонтом и моды под горизонтом. Эволюция векторных и тензорных мод.

Разложение возмущений по спиральностям: скалярные, векторные, тензорные моды

Так как все уравнения пишутся в линейном порядке по возмущениям, то разные компоненты Фурье можно изучать отдельно:

$$h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{k}) \quad (9.1)$$

и т.д. для $\delta\rho, \delta p, v_i$. Переход от компонент Фурье к пространственным величинам в уравнениях и обратно:

$$\partial_i \leftrightarrow ik_i \quad (9.2)$$

Мода Фурье – плоская волна – инвариантна относительно вращения вокруг вектора \mathbf{k} – «малая группа $SO(2)$ ».

Тензорные индексы при вращениях вокруг \mathbf{k} преобразуются друг через друга \Rightarrow моды с определенной спиральностью (3 типа).

1. Скалярные моды (спиральность 0)

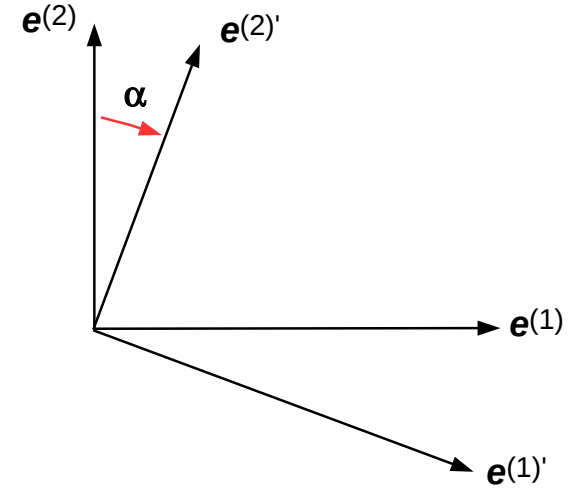
Объект при вращениях малой группы $SO(2)$ не преобразуется.

Типы скалярных мод

- 3-скаляр ($\delta\rho, \delta p, \dots$)
- Вектор, $\parallel \mathbf{k}$
- Тензор, $\propto k_i k_j$ (т.к. k_i, k_j не меняются)
- Тензор, $\propto \delta_{i,j}$

2. Векторные моды (спиральность 1)

Преобразуются как вектор, ортогональный \mathbf{k}



$\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{k}$ – правая тройка.

Поворот против Ч.С. на α

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \cos \alpha - \mathbf{e}^{(2)} \sin \alpha \\ \mathbf{e}^{(2)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \sin \alpha + \mathbf{e}^{(2)} \cos \alpha \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\mathbf{e}^{\pm} = \mathbf{e}^{(1)} \pm i\mathbf{e}^{(2)} \quad (9.4)$$

$$\mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} = \mathbf{e}^{(1)'(\alpha)} + i\mathbf{e}^{(2)'(\alpha)} = e^{i\alpha} \mathbf{e}^{(+)} \quad (9.5)$$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} = -i \frac{\partial}{\partial \alpha} (e^{i\alpha} \mathbf{e}^{(+)}) = +1 \mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} \quad (9.6)$$

– спиральность +1

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(-)'(\alpha)} = -1 \mathbf{e}^{(-)'(\alpha)} \quad (9.7)$$

– спиральность -1

Произвольный поперечный вектор является смесью спиральностей -1 и $+1$:

$$\mathbf{S} = \alpha_- \mathbf{e}^{(-)} + \alpha_+ \mathbf{e}^{(+)} \quad (9.8)$$

Единичную спиральность имеют

- Поперечные векторы
- Тензоры со структурой $k_i W_j^T$, где W_j^T – поперечный вектор, то есть $k_i W_i^T = 0$

(скалярные моды имеют спиральность 0 , т.к. они не зависят от поворота α)

3. Тензорные моды (спиральность 2)

Рассмотрим симметричные, бесследовые, поперечные 3-мерные тензоры:

- $h_{ij} = h_{ji}$ – 3 условия
- $h_{ii} = 0$ – 1 условие
- $k_i h_{ij} = 0$ – поперечность, 3 условия

9 параметров, 7 условий, 2 – свободные \Rightarrow
Размерность = 2

Из $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ построим два тензора:

$$e_{ij}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)} e_j^{(1)} - e_i^{(2)} e_j^{(2)}) \quad (9.9)$$

$$e_{ij}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)} e_j^{(2)} + e_i^{(2)} e_j^{(1)}) \quad (9.10)$$

$$(9.11)$$

– линейно независимы, симметричны, бесследовы, поперечны по определению.

$$e_{ij}^{(\pm 2)} = e_{ij}^{(+)} \pm i e_{ij}^{(\times)} \quad (9.12)$$

Элементарно проверяется:

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) &= e^{+2i\alpha} e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) = +2 e_{ij}^{(+2)'} \\ e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) &= e^{-2i\alpha} e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) = -2 e_{ij}^{(-2)'} \end{aligned} \quad (9.13)$$

– объекты со спиральностью ± 2 .

Среди тензоров ранга не выше 2 нет объектов со спиральностью выше 2. \Rightarrow

Скалярные, векторные и тензорные моды исчерпывают все типы объектов.

Дифференцирование компонент Фурье по x_j (умножение на ik_j) не меняет спиральности \Rightarrow

Линеаризованные (и потому линейные) уравнения разбиваются на независимые компоненты для мод разной спиральности.

Моды разной спиральности эволюционируют существенно по-разному!

Разложение h_{ij} и v_i по спиральностям

В калибровке $h_{0i} = 0$

$$h_{\mu\nu} = h_{00} \oplus h_{ij} \quad (9.14)$$

h_{00} не зависит от поворотов в плоскости $(ij) \Rightarrow$

$$h_{00} = 2\Phi - \text{скаляр} \quad (9.15)$$

h_{ij} есть комбинация всех возможных спиральностей:

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{k}) = \begin{array}{l} -2\Psi\delta_{ij} - 2k_i k_j E \\ +i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) \\ h_{ij}^{TT} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{спиральность } 0 \\ \text{спиральность } 1 \\ \text{спиральность } 2 \end{array} \right. \quad (9.16)$$

Ψ, E – скалярные моды (2 параметра)

W_j^T – векторные моды (2 параметра)

h_{ij}^{TT} – тензорные моды (2 параметра).

Всего 6 параметров, столько же независимых элементов в симметричной матрице h_{ij}

Разложение для скорости:

$$v_i(\eta, \mathbf{k}) = \begin{array}{l} ik_i v(\eta, \mathbf{k}) \\ +V_i^T(\eta, \mathbf{k}) \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{спиральность } 0 \\ \text{спиральность } 1 \end{array} \right. \quad (9.17)$$

v – скалярная мода (1 параметр)

V_i^T – векторные моды (2 параметра)

Всего 3 параметра, столько же независимых компонент вектора v_i

Если под $v(\eta, \mathbf{k})$ понимать всю компоненту Фурье, то

$$ik_i v(\eta, \mathbf{k}) = \partial_i v(\eta, \mathbf{k}) \quad (9.18)$$

поэтому $v(\eta, \mathbf{k})$ иногда называют потенциалом скорости.

Компоненты ТЭИ

Скаляр:

$$\delta T_0^0 = \delta\rho \quad (9.19)$$

Скаляр и вектор:

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i \quad (9.20)$$

Скаляр:

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p \quad (9.21)$$

Линеаризованные уравнения для возмущений

Ковариантное сохранение ТЭИ

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_{\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (9.22)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ считаются в метрике

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \quad (9.23)$$

в калибровке $h_{0i} = 0$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a} + \frac{1}{2}h'_{00} \quad (9.24)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (9.25)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} \quad (9.26)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a'}{a}(1 - h_{00})\delta_{ij} - \frac{a'}{a}h_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} \quad (9.27)$$

$$\Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2}(\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk}) \quad (9.28)$$

Подставляем в (9.22), используем выражения для δT , получаем два уравнения:

$$\delta\rho' + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p) \left(\partial_i v_i - \frac{1}{2}h' \right) = 0 \quad (9.29)$$

$$\partial_i \delta p + (\rho + p) \left(4\frac{a'}{a}v_i + \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \right) + [v_i(\rho + p)]' = 0 \quad (9.30)$$

где $h = h_{ii}$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$\delta G_{\mu}^{\nu} = 8\pi G \delta T_{\nu}^{\mu} \quad (9.31)$$

$$a^2 \delta G_0^0 = -3h_{00} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\Delta h - \frac{a'}{a}h' \quad (9.32)$$

$$a^2 \delta G_i^0 = \frac{1}{2}\partial_i h' - \frac{1}{2}\partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i h_{00} \quad (9.33)$$

$$\begin{aligned} a^2 \delta G_j^i = & \frac{1}{2}\partial_i \partial_k h_{jk} + \frac{1}{2}\partial_j \partial_k h_{ik} + \frac{1}{2}h''_{ij} - \frac{1}{2}\Delta h_{ij} + \\ & + \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h + \frac{a'}{a}h'_{ij} - \\ & - \delta_j^i \left[\frac{1}{2}h'' + \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{1}{2}\partial_l \partial_k h_{lk} - \frac{1}{2}\Delta h + \right. \\ & \left. + 2\frac{a''}{a}h_{00} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 h_{00} + \frac{a'}{a}(h'_{00} + h') \right] \quad (9.34) \end{aligned}$$

Тензорные моды (Для компонент Фурье!)

В выражениях для δT_{ν}^{μ} [идеальная жидкость] (8.125)–(8.129) тензорного вклада нет, поэтому уравнение для тензорных мод однородное:

$$\partial_{\eta}^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_{\eta} h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \quad (9.35)$$

Это уравнение для гравитационных волн в пр-ве Фридмана.

В статическом пределе Минковского $\eta \rightarrow t$, $a' = 0$ и уравнение переходит в обычное волновое уравнение

$$\partial_t^2 h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \quad (9.36)$$

Векторные моды

Векторные моды метрического тензора, скорости и ТЭИ

$$h_{ij} = i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \quad (9.37)$$

$$v_i = V_i^T; \quad ik_i V_i = \partial_i V_i = 0 \quad (9.38)$$

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i \quad (9.39)$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна:

00-компонента удовлетворяется тождественно;

0*i*-компоненты

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (9.40)$$

ij-компоненты

$$\partial_\eta^2 W_i^T + 2\frac{a'}{a} \partial_\eta W_i^T = 0 \quad (9.41)$$

Откуда в 0*i*-компоненте 3-я производная? Получим:

$$\delta G_i^0 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} \partial_i h' - \frac{1}{2} \partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a} \partial_i h_{00} \right) = 8\pi G \delta T_i^0 \quad (9.42)$$

$$h_{00} \equiv 0 \Rightarrow \quad (9.43)$$

$$\partial_j h'_{ij} - \partial_i h' = a^2 16\pi G (\rho + p) V_i^T \quad (9.44)$$

$$\begin{aligned} \partial_j h'_{ij} &= \partial_\eta \partial_j (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) = \partial_\eta [\partial_j \partial_i W_j^T + \partial_j \partial_j W_i^T] = \\ &= \partial_\eta \partial_j \partial_i W_j^T + \partial_\eta \Delta W_i^T \quad (9.45) \end{aligned}$$

$$\partial_j \partial_i W_j^T = -k_i k_j W_j^T = 0 \quad (\text{поперечность}) \quad (9.46)$$

$$h = i2k_j W_j^T = 0 \quad (\text{поперечность}) \quad (9.47)$$

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (9.48)$$

или

$$-k^2 \partial_\eta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (9.49)$$

Из ковариантных сохранений нетривиально одно:

$$\partial_\eta [(\rho + p) V_i^T] + 4\frac{a'}{a} (\rho + p) V_i^T = 0 \quad (9.50)$$

Уравнение (9.41) является следствием (9.50) и (9.40).

Однородное уравнение (9.40) ($\rho = 0$) имеет решением любую функцию \mathbf{x} , не зависящую от η – это чистая калибровка.

Устраняется преобразованием (см. (8.103)):

$$\xi_i = W_i^T(\mathbf{x}), \quad \xi_0 = 0 \quad (9.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ij} &= h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} = \\ &= \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T - \partial_i W_j^T - \partial_j W_i^T - 2\eta_{ij} W_j^T \frac{\partial_j a}{a} = 0 \quad (9.52) \end{aligned}$$

Векторные моды грав. поля в отсутствии источников не распространяются.

Скалярные моды,

конформная Ньютонова калибровка

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} \quad (9.53)$$

Используем возможность остаточной калибровки, не нарушающей условия $h_{0i} = 0$ (см. (8.102)):

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \quad (9.54)$$

Общий вид такой калибровки:

$$\xi_i = -\partial_i \sigma(\eta, \mathbf{x}), \quad \xi_0 = \partial_\eta \sigma(\eta, \mathbf{x}) \quad (9.55)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \sigma' \quad (9.56)$$

Общий вид скалярной моды h_{ij} :

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} - 2k_i k_j E \quad (9.57)$$

В координатном представлении

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E \quad (9.58)$$

$$\tilde{h}_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E - 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \sigma' \quad (9.59)$$

Подбираем σ :

$$2\partial_i \partial_j \sigma - 2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \sigma' = \partial_i \partial_j E \quad (9.60)$$

Калибровка полностью фиксирована.

Для скалярных мод остается:

$$h_{00} = 2\Phi \quad (9.61)$$

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} \quad (9.62)$$

$$v_i = \partial_i v \text{ [или } ik_i v \text{]} \quad (9.63)$$

Метрика:

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 + 2\Psi)dx^2] \quad (9.64)$$

В Ньютоновом пределе Φ – гравитационный потенциал

Из (9.32)–(9.34) тензор Эйнштейна для скалярных мод:

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} \left(-\Delta \Psi + 3\frac{a'}{a} \Psi' - 3\frac{a'^2}{a^2} \Phi \right) \quad (9.65)$$

$$\delta G_i^0 = \frac{2}{a^2} \left(-\partial_i \Psi' + \frac{a'}{a} \partial_i \Phi \right) \quad (9.66)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i = & \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_j (\Phi + \Psi) - \\ & - \frac{2}{a^2} \delta_{ij} \left[-\Psi'' + \frac{1}{2} \Delta (\Phi + \Psi) + \frac{a'}{a} (\Phi' - 2\Psi') + \right. \\ & \left. + \Phi \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a} \right) \right] \quad (9.67) \end{aligned}$$

В индексах (i, j) для скалярных мод

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p \quad (9.68)$$

Нет структуры $\partial_i \partial_j$, которая есть в $\delta G_j^i \Rightarrow$

$$\Phi + \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = -\Phi \quad (9.69)$$

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод:

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho_{tot} \quad (9.70)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v]_{tot} \quad (9.71)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \quad (9.72)$$

Уравнения ковариантного сохранения
(λ – тип материи):

$$\delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) + (\rho_\lambda + p_\lambda)(\Delta v_\lambda - 3\Phi') = 0 \quad (9.73)$$

$$[(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0 \quad (9.74)$$

Не все уравнения (9.70)–(9.74) независимы.

Система не полна: нужны уравнения состояния:

$$p_\lambda = w_\lambda \rho_\lambda \quad (9.75)$$

и скорости звука

$$\delta p_\lambda = u_{s\lambda}^2 \delta\rho_\lambda \quad (9.76)$$

Вообще говоря, $w_\lambda \neq u_{s\lambda}^2$ так как $w_\lambda \neq \text{const!}$

В отсутствие материи (9.70)–(9.72) не имеют нетривиальных решений \Rightarrow свободное грав. поле не имеет распространяющихся скалярных (и векторных) мод. Все распространяющиеся моды – тензорные, спиральность ± 2 (или смесь).

Моды за горизонтом и моды под горизонтом

Длина волны возмущения

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} \quad (9.77)$$

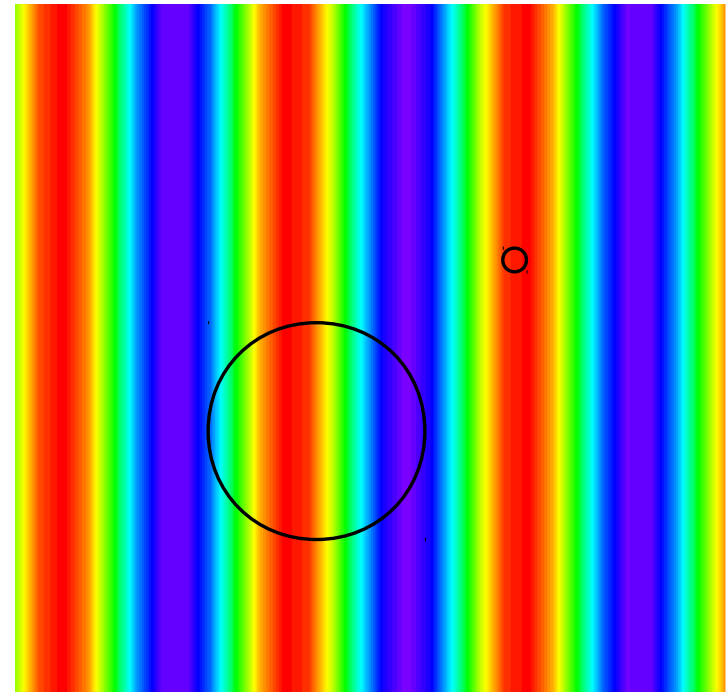
Для РД-стадии $l_H(\eta) = 1/H(\eta)$,
Для МД-стадии $l_H(\eta) = 2/H(\eta)$,
Всегда $l_H(\eta) \sim 1/H(\eta)$

Важно различать случаи:
Далеко за горизонтом

$$\lambda(\eta) \gg l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \ll H(\eta) \quad (9.78)$$

Глубоко под горизонтом

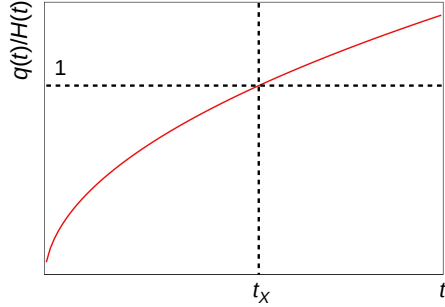
$$\lambda(\eta) \ll l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \gg H(\eta) \quad (9.79)$$



РД и МД-стадии идут с замедлением ускорения \Rightarrow

$$\frac{q(t)}{H(t)} = \frac{k/a(t)}{H(t)} \propto \frac{1/t^\alpha}{1/t} = t^{1-\alpha} \quad (9.80)$$

$\alpha < 1 \Rightarrow$ отношение растёт,
мода может войти под горизонт



На РД-стадии

$$l_H = \frac{1}{H} = \frac{1}{a'/a^2} = \frac{\text{const}^2 \eta^2}{\text{const}} = \text{const} \cdot \eta \cdot \eta = a(\eta)\eta \quad (9.81)$$

На МД-стадии

$$l_H = \frac{2}{H} = \frac{2}{a'/a^2} = \frac{2\text{const}^2 \eta^4}{2\text{const} \eta} = \text{const} \cdot \eta^2 \cdot \eta = a(\eta)\eta \quad (9.82)$$

Условие входа под горизонт

$$\lambda(\eta) \sim l_H(\eta) \quad (9.83)$$

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} = \frac{2\pi}{k/a(\eta)} = \frac{2\pi a(\eta)}{k} \sim a(\eta)\eta \quad (9.84)$$

$$\Rightarrow k\eta_x \sim 2\pi \sim 1 \quad (9.85)$$

$$\frac{1}{k} \gg \eta - \text{в момент } \eta \text{ за горизонтом} \quad (9.86)$$

$$\frac{1}{k} \ll \eta - \text{в момент } \eta \text{ под горизонтом} \quad (9.87)$$

Эквивалентное условие

$$k \ll \frac{a'}{a} - \text{за горизонтом} \quad (9.88)$$

$$k \gg \frac{a'}{a} - \text{под горизонтом} \quad (9.89)$$

Особенно важен момент η_{eq} .

Под горизонт входят волны

$$k_{eq} \sim \frac{1}{\eta_{eq}} \quad (9.90)$$

Их современный импульс (волновое число)

$$q_{eq}^{(0)} = \frac{k_{eq}}{a_0} = \frac{1}{a_0 \eta_{eq}} \quad (9.91)$$

$$\lambda_{eq}^{(0)} = \frac{2\pi}{q_{eq}^{(0)}} = 2\pi a_0 q_{eq} = 2\pi \cdot 1.2 \cdot 10^2 \text{ Мпк} = 750 \text{ Мпк} \quad (9.92)$$

Эволюция векторных мод

Векторные моды:

$$h_{ij} = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \quad (9.93)$$

$$v_i = V_i^T \quad (9.94)$$

$$h_{00} = 0 \quad (9.95)$$

$$\delta p = \delta \rho = 0 \quad (9.96)$$

$$\delta T_i^0 = (\rho + p)V_i^T \quad (9.97)$$

Ковариантное сохранение:

$$\partial_\eta [(\rho + p)V_i^T] + 4\frac{a'}{a}(\rho + p)V_i^T = 0 \quad (9.98)$$

(0, i)-компонента уравнений Эйнштейна:

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p)V_i^T \quad (9.99)$$

Из (9.98):

$$\frac{\partial_\eta [(\rho + p)V_i^T]}{(\rho + p)V_i^T} = -4\frac{\partial_\eta a}{a} \Rightarrow \quad (9.100)$$

$$\boxed{(\rho + p)V_i^T = \text{const} \cdot a^{-4}} \quad (9.101)$$

Если среда НР, то похоже на сохранение момента. Для каждой компоненты среды λ (9.101) выполняется отдельно.

Для релятивистского вещества $p \propto \rho \propto a^{-4} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \text{const}} \quad (9.102)$$

Для нерелятивистского вещества $p = 0, \rho \propto a^{-3} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \text{const}/a} \quad (9.103)$$

Векторные моды v_i либо не растут, либо убывают.

Из (9.99) и (9.101):

$$\partial_\eta (-k^2)W_i^T = 16\pi G a^2 \frac{\text{const}}{a^4} = \text{const} \frac{1}{a^2} \quad (9.104)$$

РД-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{\text{const} \eta^2} = \frac{\text{const}}{\eta^2} \Rightarrow \quad (9.105)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{\eta} = \frac{\text{const}}{a}} \quad (9.106)$$

МД-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{\text{const} \eta^4} = \frac{\text{const}}{\eta^4} \Rightarrow \quad (9.107)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{\eta^3} = \frac{\text{const}}{a^{3/2}}} \quad (9.108)$$

ΛД-стадия

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{(-1/H_{dS}\eta)^2} = \text{const} \eta^2 \Rightarrow \quad (9.109)$$

$$W_i^T = \text{const} \eta^3; \quad \eta = -\frac{1}{aH_{dS}} \Rightarrow \quad (9.110)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{a^3}} \quad (9.111)$$

Векторные моды гравитации *падают* во всех режимах эволюции \Rightarrow падающие моды не должны себя проявлять, так как *ведут к сингулярности в начальных условиях*.

Обычно считается, что векторных мод нет.

Эволюция тензорных мод (реликтовые гравитационные волны)

Уравнение Эйнштейна для тензорных мод (см. (9.35))

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \quad (9.112)$$

$$h_{ij}^{TT} = \sum_A e_{ij}^{(A)} h^{(A)}; \quad A = +, \times \quad (9.113)$$

Из (9.112) для каждой (A):

$$\partial_\eta^2 h^{(A)} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h^{(A)} - \Delta h^{(A)} = 0; \quad (9.114)$$

или в импульсном представлении (для любой из компонент)

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2 h = 0 \quad (9.115)$$

Тензорные моды за горизонтом: константная мода и падающая мода

Условие на k для мод за горизонтом (9.88):

$$k \ll \frac{a'}{a} \quad (9.116)$$

Пренебрегаем в (9.115) членом $k^2 h$:

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' = 0 \quad (9.117)$$

Одно из решений – константная мода:

$$h = h_{(i)} = \text{const} \quad (9.118)$$

Другое решение – падающая мода:

$$h(\eta) = \text{const} \int_\eta^\infty \frac{d\eta}{a^2(\eta)} \quad (9.119)$$

Ведет себя как падающая векторная мода

$$\begin{aligned} \text{РД} &: h \propto a^{-1} \\ \text{МД} &: h \propto a^{-3/2} \\ \text{ЛД} &: h \propto a^{-3} \end{aligned}$$

Следовательно такие решения не рассматриваются.

Все тензорные моды за горизонтом – только константные моды

$$h^A = h_{(i)}^A(\mathbf{k}); \quad A = +, \times \quad (9.120)$$

Тензорные моды под горизонтом. Сшивка с константной модой

Введем новую переменную:

$$f(\eta) = a(\eta)h(\eta) \quad (9.121)$$

Уравнение (9.115) принимает вид:

$$f'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) f = 0 \quad (9.122)$$

Т.к. a зависит от η степенным образом (РД и МД стадии), то

$$\frac{a''}{a} = \text{const} \frac{1}{\eta^2}, \quad \text{const} \sim 1 \quad (9.123)$$

Под горизонтом

$$k\eta \gg 1 \Rightarrow k^2 \gg \frac{1}{\eta^2} \sim \frac{a''}{a} \Rightarrow k^2 - \frac{a''}{a} \cong k^2 \Rightarrow \quad (9.124)$$

получается уравнение осциллятора

$$f'' + k^2 f = 0 \Rightarrow \quad (9.125)$$

$$f(\eta) = C \cos(k\eta + \alpha) \Rightarrow h(\eta) = \frac{C}{a(\eta)} \cos(k\eta + \alpha) \quad (9.126)$$

C, α ищем из условия сшивки с константной модой.

Грубо (асимптотика)

Момент входа под горизонт η_\times :

$$h(\eta_\times) = \frac{C}{a(\eta_\times)} \cos(k\eta_\times + \alpha) \sim \frac{C}{a(\eta_\times)} \Rightarrow \quad (9.127)$$

$$C \sim h(\eta_\times)a(\eta_\times) \sim h_{(i)}a(\eta_\times) \Rightarrow \quad (9.128)$$

$$h(\eta) \sim h_{(i)} \frac{a(\eta_\times)}{a(\eta)} \cos(k\eta + \alpha) \quad (9.129)$$

(η_\times для разных k – разные!)

Если $h_{(i)}$ не зависят от k (белый шум), то зависимость h от k для мод, вошедших под горизонт, определяется зависимостью $a(\eta_\times(k))$

$$\eta_\times \sim 1/k \Rightarrow$$

Волны входят на РД стадии

$$a(\eta_\times) = \text{const} \eta_\times = \text{const} \frac{1}{k} \Rightarrow h(k) \propto h_i \frac{1}{k}; \quad k \gg k^{(eq)} \quad (9.130)$$

Волны входят на МД стадии

$$a(\eta_\times) = \text{const} \eta_\times^2 = \text{const} \frac{1}{k^2} \Rightarrow h(k) \propto h_i \frac{1}{k^2}; \quad k \ll k^{(eq)} \quad (9.131)$$

Уточнение оценки: решаем (9.115) при $\eta \sim \eta_\times$

Для РД-входящих мод

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \quad (9.132)$$

из (9.115)

$$h'' + \frac{2}{\eta} h' + k^2 h = 0 \quad (9.133)$$

Замена $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dh}{dx} + h = 0 \quad (9.134)$$

Решение, стремящееся к константе есть сферическая функция Бесселя 0-го порядка:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (9.135)$$

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{\sin k\eta}{k\eta} \quad (9.136)$$

Решение стремится к константе $h_{(i)}$ при $\eta \rightarrow 0$.

• Это решение верно лишь на РД-стадии. Как оно ведет себя потом?

Запишем в виде (переходит в (9.136) вблизи η_{\times}):

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{a(\eta_{\times})}{\eta_{\times}} \frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \quad (9.137)$$

Отношение $a(\eta)/\eta$ не зависит от времени (вблизи η_{\times}). Из (8.40):

$$\frac{a(\eta_{\times})}{\eta_{\times}} = \left(\frac{g_*}{g_{*,0}} \right)^{1/6} a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \Rightarrow \quad (9.138)$$

$$h(\eta) = h_{(i)} \left[\left(\frac{g_*}{g_{*,0}} \right)^{1/6} a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \right] \frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \quad (9.139)$$

Это решение универсально верно при всех η после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как $1/a$ (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!

Для МД-входящих мод

$$a(\eta) = \text{const } \eta^2; \quad \frac{a'}{a} = \frac{2\eta}{\eta^2} = \frac{2}{\eta} \quad (9.140)$$

из (9.115)

$$h'' + \frac{4}{\eta} h' + k^2 h = 0 \quad (9.141)$$

Замена:

$$h(\eta) = \frac{1}{\eta} y(\eta) \Rightarrow \quad (9.142)$$

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{dy}{d\eta} + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) y = 0 \quad (9.143)$$

Еще замена: $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) y = 0 \quad (9.144)$$

– уравнение для сферической функции Бесселя 1-го порядка:

$$j_1(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \quad (9.145)$$

Асимптотика $j_1(x \rightarrow 0) = 1/3$.

Решение с асимптотикой $h(\eta \rightarrow 0) = h_{(i)}$:

$$h(\eta) = -3h_{(i)} \frac{1}{(k\eta)^2} \left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) \quad (9.146)$$

$$\begin{aligned}
h(\eta) &= -3h_{(i)} \frac{a(\eta_{\times})}{\eta_{\times}^2} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) = \\
&= \left\langle \text{Из (8.45)} : \frac{a}{\eta^2} = \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \right\rangle = \\
&= -3h_{(i)} \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) \quad (9.147)
\end{aligned}$$

При $k\eta \gg 1$ (глубоко под горизонтом)

$$h(\eta) = -3h_{(i)} \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \cos k\eta \quad (9.148)$$

что соответствует (9.129) и (9.131).

Это решение универсально верно при всех η после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как $1/a$ (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!