

## Лекция 10

Скалярные возмущения – однокомпонентные среды.  
Многокомпонентные среды: адиабатические моды и моды постоянной кривизны

## Скалярные возмущения – однокомпонентные среды

Формализм описывает возмущения той компоненты, которая доминирует.

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод, однокомпонентная среда (см. (9.71)–(9.73))

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi Ga^2\delta\rho \quad (10.1)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2[(\rho + p)v] \quad (10.2)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi Ga^2\delta p \quad (10.3)$$

Для однокомпонентной среды уравнения сохранения следуют из (10.1)–(10.3).

(10.1) в импульсном представлении:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (10.4)$$

Уравнение состояния:  $\delta p = u_s^2\delta\rho$

(10.4) + (10.3)  $\times u_s^2$ :

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' + \left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1-3u_s^2)\right]\Phi + u_s^2k^2\Phi = 0 \quad (10.5)$$

Уравнение Фридмана:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (10.6)$$

Уравнения для  $(i, j)$ -компонент (см. (8.28)):

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp \Rightarrow \quad (10.7)$$

$$\left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1-3u_s^2)\right] = -8\pi Ga^2(p - u_s^2\rho) \quad (10.8)$$

Считаем  $p = u_s^2\rho$ , тогда [...] исчезает

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' + u_s^2k^2\Phi = 0 \quad (10.9)$$

### Скалярные моды за горизонтом

$$k \ll \frac{a'}{a} \Rightarrow \quad (10.10)$$

последним слагаемым в (10.9) пренебрегаем

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' = 0 \quad (10.11)$$

Имеется константное решение

$$\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const} \quad (10.12)$$

и есть падающая мода

$$\Phi(\eta) = \text{const} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{a^{3(1+u_s^2)}(\eta)} \quad (10.13)$$

Предполагаем, как обычно, что падающей моды нет.

Ищем

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (10.14)$$

Из (10.4), за горизонтом для константной моды

$$3 \frac{a'^2}{a^2} \Phi_{(i)} = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.15)$$

Из уравнения Фридмана

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} a^2 G \rho \quad (10.16)$$

Подставляем в (10.15)  $\Rightarrow$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi_{(i)} = \text{const} \quad (10.17)$$

Скорости, соответствующие скалярной моде  $v$ :  $v_j = \partial_j v$

Из (10.2) потенциал скорости

$$v = -\frac{1}{4\pi G a^2 (\rho + p)} \frac{a'}{a} \Phi \quad (10.18)$$

$$\Phi = \Phi_{(i)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} v_j = \partial_j v &= -\frac{1}{4\pi G (\rho + p)} \frac{a'}{a^2} \frac{1}{a} i k_j e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sim \\ &\sim \frac{1}{4\pi G (\rho + p)} H q = \frac{1}{4\pi G (\rho + p)} H^2 \frac{q}{H} \sim \frac{q}{H} \ll 1 \end{aligned} \quad (10.19)$$

**Скалярные моды под горизонтом: УР вещество**

$$w = u_s^2 = 1/3 \quad (10.20)$$

Из (10.9)

$$\Phi'' + 3 \frac{a'}{a} (1 + u_s^2) + u_s^2 k^2 \Phi = 0; \quad \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \quad (10.21)$$

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta} + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \quad (10.22)$$

Сводится к уравнению для сферической функции Бесселя 1-го порядка. Решение:

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[ \cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] \quad (10.23)$$

$$\Phi(\eta \rightarrow 0) = \Phi_{(i)} \quad (10.24)$$

*Звуковой горизонт:*

$$l_s = u_s \cdot \frac{1}{H} \quad (10.25)$$

Далеко под звуковым горизонтом ( $u_s k \eta \gg 1$ ) имеет-ся падающая волна с определенной фазой:

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \cos(u_s k \eta) \quad (10.26)$$

Ищем  $\delta = \delta\rho/\rho$  глубоко под (звуковым) горизонтом. Из (10.4)

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.27)$$

Покажем, что слева существенен только член  $k^2\Phi$ .

$$\begin{aligned} \eta^2 \left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi &= \\ &= \eta^2 \left(k^2 + \frac{3}{\eta^2}\right) \left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2}\right) = \\ &= (\eta^2 k^2 + 3) \left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2}\right) = \\ &= \backslash u_s k \eta \gg 1 \backslash \approx \\ &\approx \eta^2 k^2 \left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2}\right) \sim \Phi_{(i)} \quad (10.28) \end{aligned}$$

$$\eta^2 3\frac{a'}{a}\Phi' \cong \frac{9\Phi_{(i)}}{u_s k \eta} \sin(u_s k \eta) \sim \frac{1}{u_s k \eta} \Phi_{(i)} \quad (10.29)$$

$$\eta^2 \left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi \approx \eta^2 k^2 \Phi \gg \eta^2 3\frac{a'}{a}\Phi' \quad (10.30)$$

$$\begin{aligned} \delta\rho &= -\frac{1}{4\pi G} \frac{k^2}{a^2} \Phi(\eta) = \\ &= \frac{3\Phi_{(i)}}{4\pi G} \frac{1}{u_s^2} \frac{1}{a^2 \eta^2} \cos(u_s k \eta) = \backslash \frac{1}{a^2 \eta^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho \backslash = \\ &= 6\Phi_{(i)} \rho \cos(u_s k \eta) \Rightarrow \quad (10.31) \end{aligned}$$

$$\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho} = 6\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \quad (10.32)$$

Возмущения плотности релятивистского вещества под горизонтом испытывают акустические осцилляции.

Амплитуда не растет и не убывает – Джинсовской неустойчивости нет.

*Возмущение скорости релятивистской материи*

Исходим из (10.2):

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 (\rho + p)v \quad (10.33)$$

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3} G \rho; \quad \frac{a'}{a^2} = \frac{1}{a\eta}; \quad p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow \quad (10.34)$$

$$a^2(p + \rho) = \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{2\pi G} \quad (10.35)$$

Подставляем  $\Phi_{(i)}$  (10.23) и (10.35) в (10.2) и получаем:

$$kv = \frac{3\Phi_{(i)}}{u_s} \left[ \frac{\sin(u_s k \eta)}{(u_s k \eta)^2} - \frac{\cos(u_s k \eta)}{u_s k \eta} - \frac{1}{2} \sin(u_s k \eta) \right] \quad (10.36)$$

$v$  – потенциал скорости:  $v_i = ik_i v = \partial_i v$ ;  $kv$  – «физическая скорость».

Для мод глубоко под (акустическим) горизонтом ( $u_s k \eta \gg 1$ )

$$kv = -\frac{3\Phi_{(i)}}{2u_s} \sin(u_s k \eta) \quad (10.37)$$

– акустические осцилляции.

Ср. (10.32) и (10.37) – фазы сдвинуты на  $\pi/2$ .

## Нерелятивистское вещество (под и за горизонтом)

(10.9):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \quad (10.38)$$

$r = 0$ ;  $u_s = 0 \Rightarrow$  все моды находятся за звуковым горизонтом.

Все, что остается от уравнения:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' = 0 \Rightarrow \Phi(\eta) = \Phi = \text{const} \quad (10.39)$$

Начальные данные – константная мода, она для потенциала и сохраняется.  $\Rightarrow$

• В линейном режиме возмущения потенциалов скалярной моды НР вещества не меняются.

*Плотность (стадия ДМ - автоматически из-за однокомпонентности!)*

(10.4):

$$k^2 \Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.40)$$

$\Phi' = 0 \Rightarrow$

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \Rightarrow \quad (10.41)$$

$$\begin{aligned} \delta\rho &= -\frac{1}{4\pi G a^2} \left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right) = \\ &= \backslash a = \text{const } \eta^2 \Rightarrow a'/a = 2/\eta \backslash = \\ &= -\frac{1}{4\pi G a^2} \left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi \quad (10.42) \end{aligned}$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2} \left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi \quad (10.43)$$

*За горизонтом*

$$k\eta \ll 1 \Rightarrow k^2 \ll 1/\eta^2 \Rightarrow$$

$$12/\eta^2 \text{ доминирует} \Rightarrow$$

$$\delta\rho \propto 1/a^3.$$

$$\text{Но } \rho \propto 1/a^3 \Rightarrow \delta = \delta\rho/\rho = \text{const}$$

$$H = \frac{a'}{a^2} = \frac{2}{a\eta} \quad (10.44)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2 \Rightarrow \quad (10.45)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi \quad (10.46)$$

$$\delta = \delta_{(i)} = -2\Phi_{(i)} = \text{const} - \text{за горизонтом} \quad (10.47)$$

*Для мод за горизонтом для нерелятивистского вещества Джинсовская неустойчивость не развивается.*

Под горизонтом

$$k\eta \gg 1 \Rightarrow k^2 \gg 1/\eta^2 \Rightarrow$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2} k^2 \Phi = +\frac{1}{8\pi G a^2} k^2 \delta_{(i)} \quad (10.48)$$

Уже видно, что  $\delta$  будет расти пропорционально  $a$ . Найдем, как:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} H^2 \quad (10.49)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{3} \frac{k^2}{a^2} \frac{1}{H^2} \delta_{(i)} = \frac{1}{3} \frac{q^2}{H^2} \delta_{(i)} \quad (10.50)$$

В момент входа под горизонт  $q_{\times} = H_{\times}$ , из (10.50)  $\Rightarrow$

$$\delta_{\times} = \frac{1}{3} \delta_{(i)} \quad (10.51)$$

$$H^2 = \left( \frac{2}{a\eta} \right)^2 \Rightarrow \quad (10.52)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{3} \frac{k^2}{a^2} \frac{a^2 \eta^2}{4} \delta_{(i)} = \frac{1}{12} k^2 \eta^2 \delta_{(i)} = \\ &= \left\langle \eta^2 = \frac{a}{\text{const}} \right\rangle = \frac{1}{12} k^2 \frac{a}{\text{const}} \delta_{(i)} \quad (10.53) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12} k^2 \frac{a_{\times}(k)}{\text{const}} \delta_{(i)} = \delta_{\times} = \frac{1}{3} \delta_{(i)} \quad (10.54)$$

$$\text{const} = \frac{1}{4} k^2 a_{\times}(k) \quad (10.55)$$

$$\delta(\eta) = \frac{1}{3} \frac{a(\eta)}{a_{\times}} \delta_{(i)}, \quad k\eta \gg 1 \quad (10.56)$$

Амплитуда моды растет со временем – неустойчивость Джинса. Чем позднее мода входит под горизонт, тем меньше успевает вырасти к моменту  $\eta$

Рассмотрим все моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии.

Самая короткая среди них – вошедшая под горизонт в момент  $q_{eq}$

Координатный импульс (волновое число) моды определяется

$$k_{eq} \eta_{eq} \sim 1 \quad (10.57)$$

Длина волны сейчас:

$$\frac{k_{eq}}{a_0} (a_0 \eta_{eq}) = q_{eq} (a_0 \eta_{eq}) = \frac{2\pi}{\lambda_{eq}} (a_0 \eta_{eq}) \sim 1 \Rightarrow \quad (10.58)$$

$$\lambda_{eq} \sim 2\pi (a_0 \eta_{eq}) = 2\pi \times 120 \text{ Мпк} \approx 750 \text{ Мпк} \quad (10.59)$$

$$\delta = \frac{1}{3} (1 + z_{eq}) \delta_{(i)} \quad (10.60)$$

$$\delta_{(i)} \sim 3 \cdot 10^{-5}, \quad z_{eq} \approx 3000 \Rightarrow \delta \sim 0.03 \quad (10.61)$$

Моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии не вошли в нелинейный режим  $\Rightarrow$

Вселенная на масштабах 750 Мпк и более – заведомо однородна.

Существующие структуры определяются модами, вошедшими под горизонт раньше – на РД-стадии.

Скорости

(10.2):

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2(\rho + p)v \quad (10.62)$$

$\Phi' = 0, p = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{a'}{a}\Phi \frac{1}{4\pi Ga^2} \frac{1}{\rho} = \\ &= \left\langle \frac{8\pi}{3}G\rho = H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2, \frac{a'}{a} = \frac{2}{\eta} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{3}\Phi\eta \quad (10.63) \end{aligned}$$

$$\boxed{kv = -\frac{\Phi}{3}k\eta} \quad (10.64)$$

Моды за горизонтом  $k\eta \ll 1 \Rightarrow kv \ll \Phi$   
Под горизонтом скорости растут  $kv \propto \eta \propto \sqrt{a}$   
При всех масштабах, т.к.  $u_s = 0$

**Нерелятивистское вещество  
на  $\Lambda$ -доминированной стадии**

$$(8.32) : \quad a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}, \quad H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (10.65)$$

$\Lambda$  создает давление, но не создает возмущения давления!

Потенциал  $\Phi$ .

Из (10.3):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi Ga^2\delta p_{tot} \quad (10.66)$$

$\delta p_{tot} = 0$ . Подставляем (10.65):

$$\Phi'' - \frac{3}{\eta}\Phi' + \frac{3}{\eta^2}\Phi = 0 \quad (10.67)$$

Два типа решений:

$$\Phi(\eta) = \text{const} \cdot \eta \propto \frac{1}{a} \quad (10.68)$$

$$\Phi(\eta) = \text{const} \cdot \eta^3 \propto \frac{1}{a^3} \quad (10.69)$$

Плотность

(10.4):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (10.70)$$

Подставляем (10.68), пренебрегаем (10.69),  
используем  $a'/a = -1/\eta$

$$k^2\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \Rightarrow \delta\rho = -\frac{k^2\Phi}{4\pi Ga^2} \quad (10.71)$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{\Phi}{a^2} \cdot a^3 = k^2a \cdot \frac{1}{a} \propto 1 \text{ (не растут)} \quad (10.72)$$

Структуры большего масштаба, чем наблюдаются сейчас, не появятся никогда.

## Первичные скалярные возмущения в многокомпонентной Вселенной

Основные уравнения для возмущений в импульсном представлении

Линеаризованные уравнения Эйнштейна (9.71)–(9.73), переписаны с учетом нескольких компонент материи  $\lambda$  :

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} \delta\rho_{\lambda} \quad (10.73)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} \quad (10.74)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a}\right)\Phi = 4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} \delta p_{\lambda} \quad (10.75)$$

Линеаризованный закон сохранения ТЭИ:

$$\delta\rho'_{\lambda} + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_{\lambda} + \delta p_{\lambda}) - (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})(k^2v_{\lambda} + 3\Phi') = 0 \quad (10.76)$$

$$[(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} + \delta p_{\lambda} + (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})\Phi = 0 \quad (10.77)$$

До рекомбинации:

- Барион-электрон-фотонная среда  $\lambda = B\gamma$
- Темная материя:  $\lambda = CDM$ .
- Нейтрино (лептоны):  $\lambda = L$

Обозначения и связи:

$$\delta_{\lambda} = \delta\rho_{\lambda}/\rho_{\lambda} \quad (10.78)$$

$$\delta p_{\lambda} = u_{s,\lambda}^2 \delta\rho_{\lambda} \quad (10.79)$$

$$p_{\lambda} = w_{\lambda}\rho_{\lambda} \quad (10.80)$$

Уравнения (10.76) и (10.77) в терминах  $\delta_{\lambda}, w_{\lambda}, u_{s,\lambda}^2$  ★:

$$\delta'_{\lambda} + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_{\lambda})\delta_{\lambda} - (1 + w_{\lambda})k^2v_{\lambda} = 3(1 + w_{\lambda})\Phi' \quad (10.81)$$

$$[(1 + w_{\lambda})v_{\lambda}]' + \frac{a'}{a}(1 - 3w_{\lambda})(1 + w_{\lambda})v_{\lambda} + u_{s,\lambda}^2\delta_{\lambda} = -(1 + w_{\lambda})\Phi \quad (10.82)$$

### Адиабатическая мода и мода постоянной кривизны

Контекст:

- Начальные условия для возмущений ставятся глубоко за горизонтом.
- Интерес представляют моды, отвечающие за анизотропию СМВ и за рост структур вещества.
- Такие моды находятся за горизонтом для  $T \sim 100$  кэВ:
  - барионы и электроны нерелятивистские
  - CDM нерелятивистская
  - нейтрино и CDM заморожены, не взаимодействуют с барион-электрон-фотонной плазмой



Основные параметры космической плазмы:

- $n_B, n_{CDM}, n_L$
- $T \sim s$

- Вообще говоря, имеют место возмущения температуры, плотности и состава среды вместе.

- Если возмущения малы (линейный режим), то можно разделить на две линейно-независимые компоненты:

- Возмущения плотности (температуры) – отдельно;
- Возмущения состава – отдельно.

*Возмущения плотности – адиабатическая мода*

Релятивистское вещество имеет ненулевые возмущения плотности энергии (температуры), но относительные величины, характеризующие барионную асимметрию, плотность темной материи и плотность лептонов не зависят от координат:

$$\delta \left( \frac{n_B}{s} \right) = \delta \left( \frac{n_{CDM}}{s} \right) = \delta \left( \frac{n_L}{s} \right) = 0 \quad (10.83)$$

*Возмущения состава – моды постоянной кривизны*

Глубоко на РД-стадии возмущения плотности релятивистского вещества отсутствуют, но:

- Неоднородность барионного числа  $\rightarrow$  барионная мода постоянной кривизны
- Неоднородность плотности темной материи  $\rightarrow$  CDM-мода постоянной кривизны
- Неоднородность лептонного числа  $\rightarrow$  лептонная мода постоянной кривизны (при прочих фоновых концентрациях)

Кривизна постоянна потому, что изменения конце-

нтраций рассматриваются на фоне постоянной полной плотности энергии.

Общее определение: для мод постоянной кривизны за горизонтом возмущение гравитационных потенциалов отсутствует.

Наблюдения показывают: вклад мод постоянной кривизны мал.

**Адиабатическая мода за горизонтом.  
Начальные условия для адиабатической моды – что это такое?**

За горизонтом возмущения существуют в виде константных мод  $\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const}$ ,  $\delta\rho/\rho = \text{const}$  и общая пространственно-временная картина, соответствующая одной константной моде, на эвристическом уровне соответствует набору независимых однородных вселенных несколько различающихся по времени эволюции и потому имеющих разную температуру, или начавших развиваться в разное время.

Тогда для адиабатической моды для каждой независимой компоненты среды можно записать:

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv \rho'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (10.84)$$

$$\delta p_\lambda = p'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv p'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (10.85)$$

Функция  $\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$  – одна для всех компонент  $\lambda$ , так как моды адиабатические.

В то же время, при фиксированном составе среды  $\rho$  и  $p$  однозначно зависят от температуры  $\Rightarrow$ :

$$\delta\rho_\lambda = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T}\delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (10.86)$$

$$\delta p_\lambda = \frac{\partial p_\lambda}{\partial T}\delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (10.87)$$

Тогда:

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \varepsilon = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial\eta}\varepsilon = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial\eta}\varepsilon = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T}\delta T \Rightarrow \quad (10.88)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \eta) = \frac{\delta T(\mathbf{x}, \eta)}{T'} \quad (10.89)$$

$\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$  и  $\delta T(\mathbf{x}, \eta)$  однозначно связаны, поэтому определения (10.86,10.87) и (10.84,10.85) эквивалентны.

При этом формулы (10.86,10.87) можно считать определением адиабатической моды.

Совместимо ли определение (10.86,10.87) или (10.84,10.85) с уравнениями (10.73)–(10.77)?

Покажем, что  $\Phi$  (а следовательно и все остальное) действительно выражается только через  $\varepsilon$  – при том, что уравнения записаны для отдельных компонент  $\lambda$ .

Используем (10.76). За горизонтом можно считать  $k = 0$ , остается:

$$\delta\rho_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)3\Phi' =$$

$$= \left\langle \delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \varepsilon; \rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \text{ ков. сохр. (8.29)} \right\rangle$$

$$= -3(\rho_\lambda + p_\lambda) \left[ \left( \frac{a'}{a}\varepsilon \right)' + \Phi' \right] = 0 \Rightarrow \quad (10.90)$$

$$\boxed{\Phi' = - \left( \frac{a'}{a}\varepsilon \right)'} \quad (10.91)$$

– Зависимости от  $\lambda$  нет!

Решение (10.91):

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = -\frac{a'}{a}\varepsilon(\mathbf{x}, \eta) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (10.92)$$

$\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  важна, т.к., в действительности, и определяет константную моду за горизонтом.

Из ковариантного сохранения (8.29)

$$\rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \Rightarrow \quad (10.93)$$

$$\frac{a'}{a} = -\frac{1}{3} \frac{\rho'_\lambda}{(\rho_\lambda + p_\lambda)} = \left\langle \rho'_\lambda = \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon(\rho_\lambda + p_\lambda)} \Rightarrow \quad (10.94)$$

$$\zeta(\mathbf{k}) = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (10.95)$$

– так как мода адиабатическая

$$\zeta(\mathbf{k}) = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (10.96)$$

– не зависит от времени, в то время, как слагаемые в п.ч. могут зависеть от времени!

Выразим  $\Phi$  только через  $\zeta$ .

Решаем уравнение (10.73)

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2 \sum_\lambda \delta\rho_\lambda \quad (10.97)$$

- Для константной моды  $k = 0$
- Подставляем  $\delta\rho_\lambda = \rho_\lambda\varepsilon$
- Подставляем  $\Phi$  из (10.92)
- Используем  $\rho_{tot} = \frac{3}{8\pi G} \frac{a'^2}{a^4}$

$$2\frac{a'}{a}\varepsilon + \varepsilon' + \zeta = 0 \quad \star \quad (10.98)$$

Решение вариацией постоянных.

Общее решение при  $\zeta = 0 \Rightarrow \varepsilon = Ca^{-2}$

– падающая мода, должно быть отброшено  $\Rightarrow \zeta \neq 0$

Ответ:

$$\varepsilon(\eta) = -\zeta \frac{1}{a^2(\eta)} \int_0^\eta a^2(\eta) d\eta \quad (10.99)$$

Нижний предел выбран исходя из  $\varepsilon(\eta \rightarrow 0) = 0$ , так как только в этом случае  $\Phi = -\frac{a'}{a}\varepsilon - \zeta$  конечен в  $\eta = 0$ .

Уравнение (10.75) с (10.99) удовлетворяется автоматически  $\star$ .

$$\Phi = -\zeta \left( 1 - \frac{a'}{a^3} \int_0^\eta a^2(\eta) d\eta \right) \quad (10.100)$$

Из (10.74) ищется потенциал скорости  $v_\lambda$  (и сама скорость)

$\Rightarrow \zeta(\mathbf{k})$  полностью определяет адиабатическую моду за горизонтом.

Вместо  $\zeta$  можно использовать (и часто используется) величину

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a}v_{tot}; \quad v_{tot} \equiv \frac{\sum_\lambda (\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda}{\sum_\lambda (\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (10.101)$$

Из (10.73), (10.74) и

$$\frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (\text{адиабатичность}) \quad (10.102)$$

следует  $\star$

$$\zeta - \mathcal{R} = -\frac{k^2\Phi}{12\pi Ga^2(\rho + p)_{tot}} \rightarrow 0 \quad \text{в пределе } k \rightarrow 0 \quad (10.103)$$

За горизонтом  $\zeta$  и  $\mathcal{R}$  – одно и то же.

В качестве начального условия для адиабатических скалярных мод можно взять  $\zeta_{(i)}(\mathbf{k})$  или  $\mathcal{R}_{(i)}(\mathbf{k})$

На РД-стадии, для главных УР мод за горизонтом (10.17) (поскольку УР моды доминируют)

$$\delta_{rad} = -2\Phi \quad (10.104)$$

$$p_{tot} = \rho_{tot}/3 \Rightarrow$$

$$\zeta = -\Phi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})} = -\Phi + \frac{1}{4}\delta = -\frac{3}{2}\Phi \Rightarrow \quad (10.105)$$

$$\Phi = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \quad (10.106)$$

Это же можно получить из (10.100) в пределе  $\eta \rightarrow 0$

*Начальные условия для НР вещества*

На РД стадии, не слишком задолго до РД→МД перехода имеется нерелятивистское вещество – В и CDM. Для НР вещества

$$\rho_M \propto 1/a^3 \Rightarrow \rho'_M = -3\rho_M \frac{a'}{a} \quad (10.107)$$

Для УР вещества

$$\rho_{rad} \propto 1/a^4 \Rightarrow \rho'_{rad} = -4\rho_{rad} \frac{a'}{a} \quad (10.108)$$

Отсюда

$$\delta_M = \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} = \frac{\rho'_M \varepsilon}{\rho_M} = -3\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (10.109)$$

$$\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho_{rad}} = \frac{\rho'_{rad}\varepsilon}{\rho_{rad}} = -4\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (10.110)$$

$$\delta_M = \frac{3}{4}\delta_{rad} = -\frac{3}{2}\Phi = \mathcal{R} \quad (10.111)$$

Эти соотношения выполняются для каждой компоненты в отдельности: В, CDM,  $\gamma$ ...

Итог:

$$\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\zeta(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (10.112)$$

$$\delta_{rad}(\mathbf{k}) = \frac{4}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (10.113)$$

$$\delta_M(\mathbf{k}) = \mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (10.114)$$

**Начальные условия для мод постоянной кривизны**

Для мод постоянной кривизны  $\zeta_{tot} = \mathcal{R}_{tot} \equiv 0$  по определению.

Для каждой отдельной компоненты  $\lambda$ :

$$\zeta_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (10.115)$$

не зависит от времени (см. (10.95)).

Начальные условия для мод постоянной кривизны выражаются через  $\zeta_\lambda$ :

$$S_{\lambda,\lambda'} = 3(\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda'}) = \frac{\delta_\lambda}{1+w_\lambda} - \frac{\delta_{\lambda'}}{1+w_{\lambda'}} \quad (10.116)$$

Обычно  $\lambda' = \gamma$ ;  $S_\lambda \equiv S_{\lambda,\gamma}$

$$S_\lambda = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad \lambda = B, CDM \quad (10.117)$$

Для УР материи ( $\gamma$ )

$$s_\gamma = g_\gamma \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (10.118)$$

$$n_\gamma = g_\gamma \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (10.119)$$

$$\rho_\gamma = g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (10.120)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (10.121)$$

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (10.122)$$

$$\frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = 4 \frac{\delta T}{T} \quad (10.123)$$

$$(10.124)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{3}{4}\delta_\gamma \quad (10.125)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta(n_\lambda/s_\gamma)}{n_\lambda/s_\gamma} &= \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{3}{4}\delta_\gamma = \\ &= \backslash \lambda - \text{HP} \backslash = \frac{\delta \rho_\lambda}{\rho_\lambda} - \frac{3}{4}\delta_\gamma = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma \Rightarrow \end{aligned} \quad (10.126)$$

$$S_\lambda = \frac{\delta(n_\lambda/s)}{n_\lambda/s} - \text{«Энтропийные моды»} \quad (10.127)$$