

Лекция 11

Гауссовы случайные поля и начальные условия для адиабатических возмущений. Стандартная космологическая модель. Динамика возмущений CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.

Гауссовы случайные поля

Распределение Гаусса

$$F(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(q - q_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (11.1)$$

q_0 – среднее, σ^2 – дисперсия.

$$\tilde{q} = aq + b \quad (11.2)$$

– снова Гаусс, $\tilde{q}_0 = aq_0 + b$, $\tilde{\sigma} = a\sigma$.

Для определения случайной величины нужен ансамбль событий (систем).

Обобщение на многомерный случай

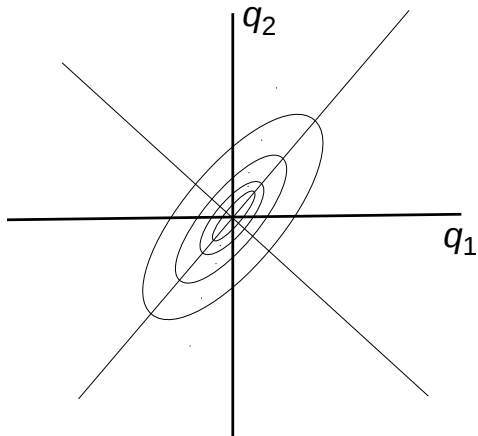
Гауссов набор случайных величин

$$F(q_1, \dots, q_N) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{1}{2} q_m M_{mn} q_n + L_n q_n \right] \quad (11.3)$$

M – положительно определенная симметричная матрица

$$\int F(q) d^n q = 1; \quad \mathcal{N} = (\det M)^{-1/2} (2\pi)^{-N/2} \quad (11.4)$$

$$\langle q_m \rangle = (M^{-1})_{mn} L_n \quad (11.5)$$



Если привести M_{mn} к главным осям, то получится просто произведение одномерных Гауссовых функций

Набор линейных функций от гауссовых случайных величин – тоже набор гауссовых случайных величин.

Рассматриваем случай $L_n = 0 \Rightarrow \langle q_m \rangle = 0$

Терема Вика

Если q_n – гауссов набор случайных величин, то корреляторы нечетного числа величин равны нулю, а для четного числа величин

$$\langle q_p q_r q_s q_t \rangle = D_{pr} D_{st} + D_{ps} D_{rt} + D_{pt} D_{rs}; \quad \text{и т.д.} \quad (11.6)$$

где $D_{pr} = \langle q_p q_r \rangle$ и т.д. И обратно.

Смысл усреднения – *усреднение по ансамблю*

Случайное поле

Кубическая решетка со стороной L , шаг a .

$\varphi_i = \varphi(\mathbf{x}_i)$ – гауссов набор случайных величин \Rightarrow *случайное поле на решетке*.

Непрерывный предел $\varphi(\mathbf{x}_i) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \Rightarrow$ *случайное поле*

• *Гауссово случайное поле*: предел $a \rightarrow 0$

Терема Вика для случайных полей

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \varphi(\mathbf{x}_3) \varphi(\mathbf{x}_4) \rangle = D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) D(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \quad (11.7)$$

где

$$D(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \varphi(\mathbf{x}_i) \varphi(\mathbf{x}_j) \rangle \quad (11.8)$$

– двухточечные корреляторы – основной объект изучения теории случайных полей.

Однородное и изотропное случайное поле:

$$D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = D(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \quad (11.9)$$

Переходим к Фурье-образу

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}); \quad \varphi^*(-\mathbf{k}) = \varphi(\mathbf{k}) \quad (11.10)$$

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (11.11)$$

Будучи интегралом случайного поля, Фурье-образ случайного поля сам является случайным полем.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{y}} D(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = \\ &= \langle \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{z} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int d^3\mathbf{z} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (11.12)$$

так как $P(\mathbf{k})$ зависит от $|\mathbf{k}|$, четна, действительна.

$$\langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.13)$$

$$P(k) = \int d^3\mathbf{z} e^{i\mathbf{k}\mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) \quad (11.14)$$

$P(k)$ – неотрицательна:

$$\varphi[f] = \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}, \quad f^*(\mathbf{k}) = f(-\mathbf{k}) \quad (11.15)$$

Очевидно: $\langle \varphi^2[f] \rangle \geq 0$ (усреднение по ансамблю $\phi!$).

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2[f] \rangle &= \left\langle \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k} \cdot \int f(\mathbf{k}')\varphi(\mathbf{k}')d^3\mathbf{k}' \right\rangle = \\ &= \langle (11.13) \rangle = \int d^3\mathbf{k} |f(\mathbf{k})|^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \geq 0 \Rightarrow P(k) \geq 0. \end{aligned} \quad (11.16)$$

$P(k)$ – спектр мощности случайного поля.

$$\mathcal{P}(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} \quad (11.17)$$

– тоже называется спектром мощности. Смысл:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle &= \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} \langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \\ &= 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) \end{aligned} \quad (11.18)$$

$dk/k = d \ln k \Rightarrow$

$\mathcal{P}(k)$ дает вклад в амплитуду флуктуаций поля логарифмически-одинаковых промежутков k

Важно: Согласно (11.13) $P(k)$ определяется усреднением по ансамблю, но согласно (11.14) $P(k)$ может быть приблизительно оценено усреднением по реализации, если гауссово случайное поле однородное и изотропное \Rightarrow байесовская вероятность.

Первичные адиабатические скалярные моды и наблюдения

- Наблюдения говорят о том, что в начальных возмущениях доминируют адиабатические скалярные моды.
- Тензорные моды и скалярные моды постоянной кривизны не обнаружены, есть только ограничения сверху.

Адиабатические скалярные моды самые существенные – *стандартная космологическая модель* (СКМ) включает пока только их.

Начальные данные для адиабатической скалярной моды – константные моды за горизонтом – характеризуются функцией $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ ($\zeta(\mathbf{k})$), через которую вычисляются относительные флуктуации плотности и возмущения гравитационного потенциала, (10.112)–(10.114).

$\mathcal{R}(\mathbf{k})$ – в СКМ однородное и изотропное случайное гауссово поле.

Однозначно описывается двухточечным коррелятором:

$$\langle \mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P_{\mathcal{R}}(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.19)$$

Задача наблюдений – найти одну скалярную функцию $P_{\mathcal{R}}(k)$ – спектр мощности константной моды адиабатических скалярных возмущений.

Смысл усреднения $\langle \mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle$ – усреднение по ансамблю вселенных.

Оценка $P_{\mathcal{R}}(k)$ через двухточечный коррелятор:

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} D(|\mathbf{x}|) \quad (11.20)$$

Так как мы имеем дело только с конечным фрагментом Вселенной внутри горизонта, то оценка дает лишь конечную точность, в предположении однородности и изотропии.

Остаточная неопределенность – *космическая неопределенность*, cosmic variance

Если некоторая теория предсказывает определенную $P_{\mathcal{R}}(k)$, то предсказание это невозможно будет проверить с любой наперед заданной точностью. Точность измерений здесь ни при чем.

Вместо $P_{\mathcal{R}}(k)$ обычно используют

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \Rightarrow \quad (11.21)$$

$$\langle \mathcal{R}^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \quad (11.22)$$

Иногда используется обозначение: $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$
Плоский спектр

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \text{const} \quad (11.23)$$

– *спектр Гаррисона-Зельдовича*.

Как реальный спектр мощности отличается от спектра Гаррисона-Зельдовича?

Наблюдения показывают, что начальный спектр флуктуаций близок к плоскому.

Степенная параметризация (s – scalar):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1} \quad (11.24)$$

$$\frac{k_*}{a_0} = \frac{1}{500 \text{ Мпк}} = 0.002 \text{ Мпк}^{-1} \quad (11.25)$$

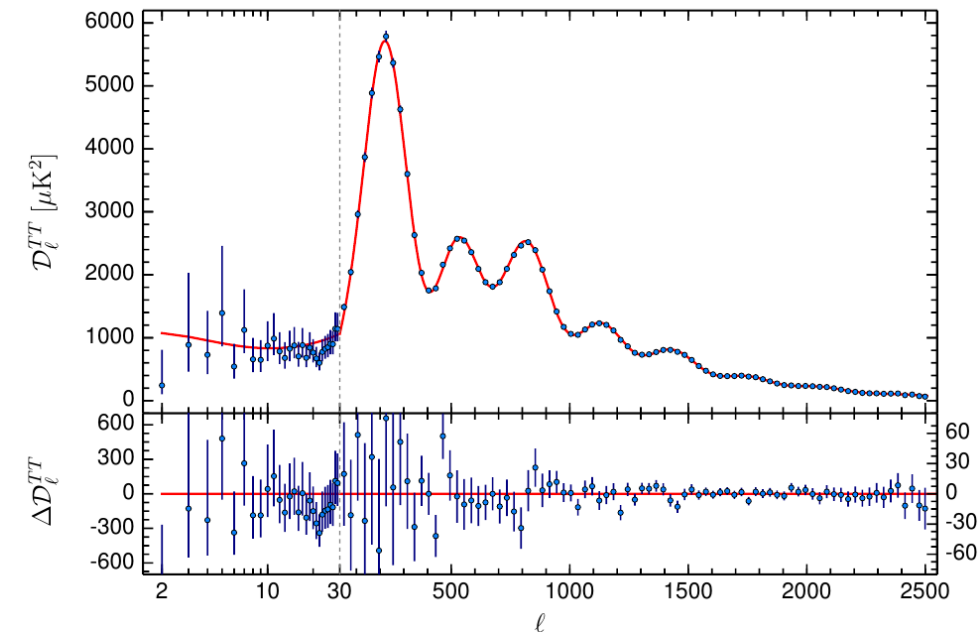
Современные значения:

$$n_s = 0.9667 \pm 0.0040 \quad (11.26)$$

$$A_{\mathcal{R}} = 2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9} \quad (11.27)$$

Относительная амплитуда возмущений

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{A_{\mathcal{R}}} \approx 4.5 \cdot 10^{-5} \quad (11.28)$$



6 параметров СКМ

Физическая плотность барионов	$\Omega_B h^2$	0.02230 ± 0.00014
Физическая плотность темной материи	$\Omega_{CDM} h^2$	0.1188 ± 0.00010
Возраст	t_0	$(13.799 \pm 0.021) \cdot 10^9 \text{ лет}$
Скалярный спектральный индекс	n_s	0.9667 ± 0.0040
Амплитуда флуктуаций кривизны	$A_{\mathcal{R}}, \Delta_{\mathcal{R}}^2$	$2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9}$
Оптическая толщина реионизации	τ	0.066 ± 0.012
Приведенная постоянная Хаббла	h	0.6774 ± 0.0046

⇐

Ошибки на картинке – не экспериментальные, это – космическая неопределенность

Первичные моды постоянной кривизны и наблюдения

Аналогично адиабатическим модам:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) \text{ и } \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$$

Дополнительно, могут быть корреляции с адиабатической модой, которые задаются параметром

$$\beta = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}\mathcal{P}_{\mathcal{S}}}}, \quad \langle \mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{S}(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{RS}}(k) \quad (11.29)$$

Оценки для $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$ зависят от предположений о β :

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.07, \quad \beta = 0 \quad (11.30)$$

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.004, \quad \beta = 1 \quad (11.31)$$

Моды постоянной кривизны малы.

В СКМ $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k) = 0$.

Первичные тензорные моды и наблюдения

Тензорные моды до сих пор (ноябрь 2016) не обнаружены, поэтому можно только предполагать, что они образуют гауссовы случайные поля, причем одинаковые, но независимые для разных компонент поляризации:

$$\langle h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k})h_{(i)}^{(B)}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{1}{2}\delta_{AB} \frac{P_T(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.32)$$

Предполагается спектр, близкий к плоскому:

$$\mathcal{P}_T = A_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T-1}, \quad n_T \approx 1 \quad (11.33)$$

$$\sum_A \langle [h_i^{(A)}(\mathbf{x})]^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(\mathbf{k}) \quad (11.34)$$

Отношение тензорных и скалярных мод (PLANCK-2015)

$$r = \frac{A_T}{A_{\mathcal{R}}} < 0.067, \quad 95\% \quad (11.35)$$

Очень важная величина, так как позволяет различать разные модели инфляции.

В СКМ $r = 0$.

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.

Важна в двух отношениях:

- Определяет структуру анизотропии реликтового микроволнового фона
- Формирует начальные условия для последующего формирования структур – галактик и т.д.

Вплоть до рекомбинации барион-фотонная компонента среды $B\gamma$ остается релятивистской, в том смысле, что

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_r) \cong 0.85 \quad (11.36)$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_{eq}) \cong 0.30 \quad (11.37)$$

$B\gamma$ рассматривается как единая среда.



Длинноволновые адиабатические моды

Входят под горизонт между η_{eq} и η_r

Современная длина волн больше $2\pi a_0 \eta_{eq} = 750$ Мпк (см. (8.59)).

Нерелятивистская CDM доминирует, осцилляций в компоненте CDM нет, возмущения CDM растут как масштабный фактор, но никогда не входят в нелинейный режим ($\delta < 0.03$,

см. (10.61))

Однако в среде $B\gamma$ осцилляции продолжаются вплоть до рекомбинации

Адиабатические моды, входящие под горизонт на РД-стадии

Уже известно: Релятивистская компонента на РД-стадии осциллирует с фиксированной фазой (10.23)

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[\cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] \quad (11.38)$$

$$\Phi_{(i)} = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \quad (11.39)$$

Осцилляции $B\gamma$ продолжаются до рекомбинации.

• Существенно новое явление: Потенциал главной УР осциллирующей компоненты $\Phi(\eta)$ индуцирует возмущения темной материи, которые уже на РД-стадии логарифмически растут во времени.

• Релятивистская $B\gamma$ -материя осциллирует до самой рекомбинации, и остаточных возмущений $\sqrt{R} \sim 5 \cdot 10^{-5}$ не хватило бы для перехода в нелинейный режим и формирования структур.

• После рекомбинации барионная материя сваливается в потенциальные ямы, сформированные CDM еще до рекомбинации, и только благодаря этому возникают структуры.

• Изучаем возмущения CDM, индуцированные потенциалом (10.23) (или (11.38))

Возмущения темной материи на РД-стадии

Потенциалы считаем заданными уравнениями (10.23) (или (11.38)).

Покомпонентные уравнения ковариантного сохранения ЭИ (10.81), (10.82):

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1 + w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1 + w_\lambda)\Phi' \quad (11.40)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \quad (11.41)$$

$$\lambda = CDM \Rightarrow w_\lambda = u_{s,\lambda}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 3\Phi' \quad (11.42)$$

$$v'_{CDM} + \frac{1}{\eta}v_{CDM} = -\Phi \quad (11.43)$$

Из (11.43), методом вариации постоянных:

$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} \eta\Phi(\eta) d\eta \quad (11.44)$$

η_0 – неопределенная постоянная.

Решение расходится в нуле при всех $\eta_0 \neq 0 \Rightarrow \eta_0 = 0$.

Следовательно конечное решение есть

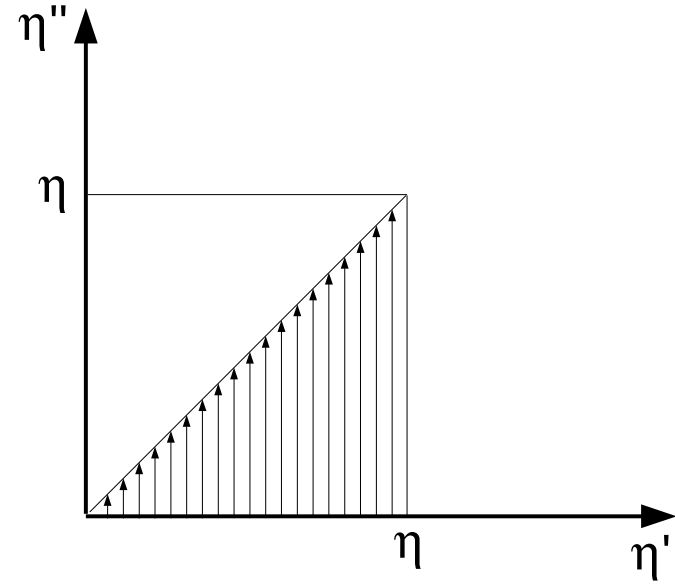
$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \eta\Phi(\eta) d\eta \quad (11.45)$$

Из (11.42) сразу получается:

$$\delta_{CDM}(\eta) = 3\Phi(\eta) + C - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \quad (11.46)$$

$$\eta = 0 \Rightarrow C = -3\Phi_{(i)} + \delta_{CDM(i)} \Rightarrow \quad (11.47)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \end{aligned} \quad (11.48)$$



$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} d\eta' \int_0^{\eta'} d\eta'' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') &= \int_0^{\eta} d\eta'' \int_{\eta''}^{\eta} d\eta' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') = \\ \int_0^{\eta} d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \int_{\eta''}^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} &= \int_0^{\eta} d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left(\frac{\eta}{\eta''} \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (11.49)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^\eta d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left(\frac{\eta}{\eta''} \right) \end{aligned} \quad (11.50)$$

Интеграл сходится и считается, для мод глубоко под акустическим горизонтом ($u_s k \eta \gg 1$) получается ★:

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM(i)} - 9\Phi_{(i)} \left[\ln(u_s k \eta) + \mathbf{C} - \frac{2}{3} \right] \quad (11.51)$$

$\mathbf{C} = 0.577\dots$ – постоянная Эйлера.

Из (10.112), (10.114) следует $\delta_{CDM(i)} = -\frac{3}{2}\Phi_{(i)} \Rightarrow$

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left[\ln \left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \quad (11.52)$$

Есть логарифмический рост возмущения плотности CDM , скорость которого определяется амплитудами потенциалов $9\Phi_{(i)}$

Важны потенциалы CDM , в которые потом сваливаются обычное вещество:

Из (10.73)

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho_{CDM} \quad (11.53)$$

В пределе $u_s k \eta \gg 1$ остается только член $k^2\Phi \Rightarrow$

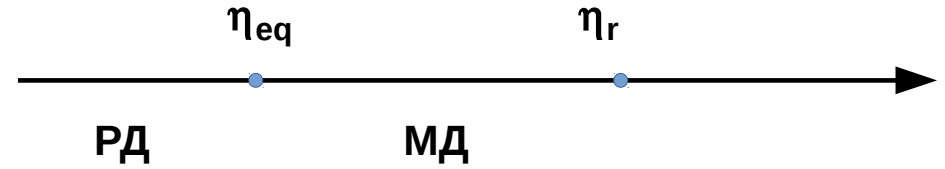
$$\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G \frac{a^2(\eta)}{k^2} \rho_{CDM}(\eta) \delta_{CDM} \quad (11.54)$$

– падает немного медленнее, чем $1/a(\eta)$.

На РД-стадии $\Phi_{CDM}(\eta)$ мал по сравнению с релятивистским $\Phi(\eta)$ из-за малости ρ_{CDM} по сравнению с ρ_{tot} .

Но вклад CDM становится главным при переходе на МД-стадию.

Возмущения темной материи на МД-стадии



Так как CDM является доминирующей компонентой на МД-стадии после η_{eq} , то заранее ясно, что нужно ожидать роста δ_{CDM} пропорционально $a(\eta)$ на фоне постоянных потенциалов $\Phi_{CDM}(\eta)$, как это предсказывает упрощенная однокомпонентная модель адиабатических возмущений, см. (10.39) и (10.56).

Наивная оценка:

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \delta_{CDM}(\eta_{eq}) \frac{a(\eta)}{a_{eq}} = \\ &= -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \left[\ln \left(\frac{k\eta_{eq}}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \approx \\ &\approx -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \ln(0.6k\eta_{eq}) \end{aligned} \quad (11.55)$$

Более точная оценка (в пределе $\rho_B/\rho_{CDM} = 0$):

$$\delta_{CDM}(\eta) \approx -\frac{27}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (11.56)$$

Решения не совсем сшиваются – есть переходная область в районе η_{eq} («ступенька»).

Из (11.54):

$$\begin{aligned}\Phi_{CDM}(\eta) &= \frac{27}{2} \Phi_{(i)} 4\pi G \rho_{CDM} \frac{a^2}{k^2} \frac{a}{a_{eq}} \ln(0.2k\eta_{eq}) = \\ &= \left\langle \rho_{CDM} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \rho_{CDM}^0 = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Omega_{CDM} \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \right\rangle = \\ &= \frac{81}{4} \Phi_{(i)} \frac{a_0^2}{k^2} \Omega_{CDM} H_0^2 (1 + z_{eq}) \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (11.57)\end{aligned}$$

– не зависит от времени.

Возмущения барион-фотонной компоненты $B\gamma$ на МД-стадии до рекомбинации

- Продолжаются осцилляции, но на фоне растущего возмущения CDM-компоненты.

- Единство $B\gamma$ (приближение тесной связи):

$$v_\gamma \approx v_B \equiv v_{B\gamma} \quad (11.58)$$

- Для адиабатической моды:

$$\delta_B = 3 \frac{\delta T}{T}, \quad \delta_\gamma = 4 \frac{\delta T}{T} \Rightarrow \delta_B = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (11.59)$$

- Из-за того, что барионы нерелятивистские, переноса энергии от фотонов к барионам нет, поэтому ковариантное сохранение для барионов и фотонов выполняется отдельно.

- $B\gamma$ – субдоминантная компонента (CDM - доминантная).

С использованием потенциала (11.57) (или какого-то похожего, более точного), уравнений ковариантного сохранения и Эйнштейна для возмущений, ищется δ_γ .

Можно считать численно, можно приближенно аналитически (метод типа ВКБ).

Результат:

$$R_B \equiv \frac{3\rho_B(\eta)}{4\rho_\gamma(\eta)} \propto a(\eta) \propto \eta^2 \quad (11.60)$$

$$R_B(\eta_{eq}) \approx 0.2; \quad R_B(\eta_r) \approx 0.6 \quad (11.61)$$

$$u_s^2(\eta) = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\delta \rho_\gamma/3}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_B} = \frac{1}{3[1 + R_B(\eta)]} \quad (11.62)$$

$u_s \neq 1/\sqrt{3}$, но меняется не очень сильно.

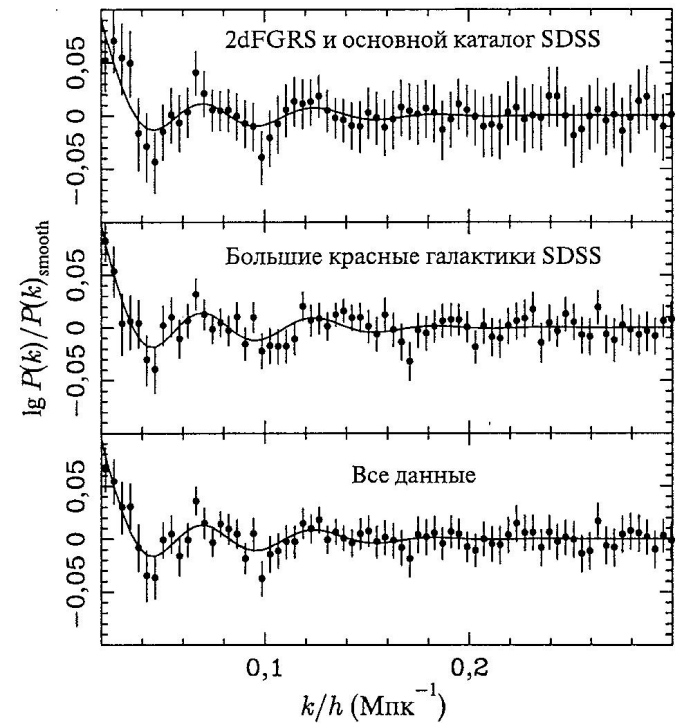
$$\begin{aligned} \delta_\gamma(\eta) = \Phi_i \times \\ \times \left[-324 \cdot (1 + R_B) I(\Omega_M)^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1 + z_{eq}) \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{6}{(1 + R_B)^{1/4}} \cos \left(k \int_0^\eta u_s(\eta') d\eta' \right) \right] \quad (11.63) \end{aligned}$$

где (см. (8.48))

$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} \approx 0.89 \quad (11.64)$$

Осцилляции $B\gamma$ -материи до момента рекомбинации отражаются

- на анизотропии микроволнового фона
- на распределении барионной материи – *барионные осцилляции*



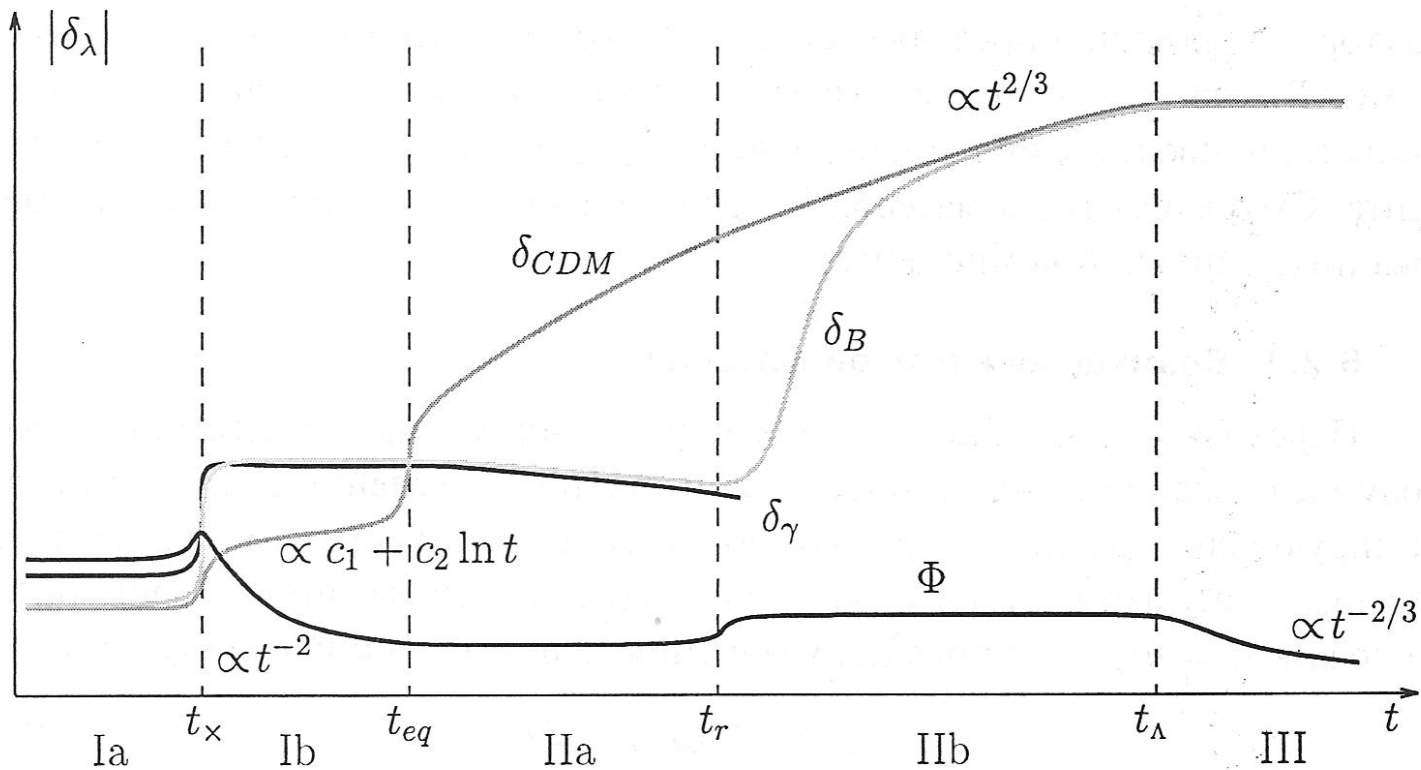


Рис. 6.1. Схематическое изображение эволюции линейных скалярных возмущений в адиабатической моде с фиксированным конформным импульсом k , входящих под горизонт на РД-стадии. Осцилляции не изображены. t_x — момент входа под горизонт. Поведение вблизи характерных времен ($t_x, t_{eq}, t_r, t_\Lambda$) показано условно. Масштаб по осям не соблюден. I — РД-стадия, доминируют возмущения релятивистской компоненты (раздел 4.2); Ia — до входа под горизонт моды не эволюционируют, их значения удовлетворяют соотношениям (5.22); Ib — вблизи входа под горизонт возмущение релятивистского вещества индуцирует логарифмически растущее возмущение CDM, формула (6.11); II — МД-стадия, доминируют возмущения CDM (раздел 4.3) с начальными данными для этой стадии, соответствующими формуле (6.11); IIa — возмущения барион-фотонной компоненты — звуковые волны — осциллируют согласно (6.36), кроме того, CDM-возмущения индуцируют возмущения барион-фотонной компоненты, формула (6.35); IIb — барионы отщеплены, их возмущения догоняют возмущения CDM, формулы (7.19), (7.18); III — ΛД-стадия, рост возмущений прекращается (раздел 4.4)