

# Лекция 13

## Инфляционная космология.

## Проблемы, неразрешимые в космологии горячего Большого взрыва

1. *Наличие сингулярности метрики.*

Начало эволюции с квантовой флуктуации?

2. *Проблема горизонта.*

Видимая вселенная содержит  $\sim 10^3$  областей, которые были причинно связаны на момент рекомбинации.

Почему температуры одинаковы с точностью лучше  $10^{-4}$ ?

Еще хуже обстоит дело с горизонтами в планковское время:

$$\rho_\gamma = 2\frac{\pi^2}{30}T^4; \quad \rho_\gamma \propto \frac{1}{a^4} \Rightarrow T \propto \frac{1}{a} \quad (13.1)$$

Наш горизонт в планковскую эпоху:

$$\begin{aligned} l_H^0(t_{Pl}) &= l_H(t_0) \times \frac{a_{Pl}}{a_0} = l_H(t_0) \times \frac{T_0}{T_{Pl}} = \\ &= 40 \text{ Гпк} \times 2 \cdot 10^{-32} \sim 3 \times 10^{30} l_{Pl} \quad (13.2) \end{aligned}$$

В видимой вселенной (вероятно)  $\sim 10^{90}$  причинно связанных областей на момент квантового рождения.

Но Вселенная однородна. Почему?

3. *Проблема плоскостности*

$\Omega_K(t)$  – относительная плотность кривизны, зависящая от времени:

$$\Omega_K(t) = \frac{\Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2}{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \quad (13.3)$$

$$\frac{\Omega_K(t_1)}{\Omega_K(t_2)} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \times \frac{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2}{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2} \quad (13.4)$$

$$t_1 = t_{Pl}, \quad t_2 = t_0 \Rightarrow$$

$$\frac{\Omega_K(t_{Pl})}{\Omega_K^0} \cong \left(\frac{a_{Pl}}{a_0}\right)^2 \frac{1}{\Omega_{rad}^0} = \left(\frac{T_{Pl}}{T_0}\right)^2 \frac{1}{\Omega_{rad}^0} \sim 10^{-60} \quad (13.5)$$

$$\Omega_K(t_{Pl}) \sim 10^{-60} \Omega_K^0 \Rightarrow \quad (13.6)$$

$$\Rightarrow \Omega_K(t_{Pl}) \lesssim 10^{-63} \quad (13.7)$$

В момент Большого взрыва Вселенная нереально плоская (ожидается  $\Omega_K^0 \lesssim 0.001$ ). Почему?

#### 4. Проблема энтропии

В момент квантового рождения ожидается энтропия  $\sim 0$ .

Энтропия видимой вселенной  $\sim 10^{88}$  (число фотонов).

Расширяется адиабатически – откуда столько энтропии?

#### 5. Проблема первичных возмущений

Откуда первичные возмущения и почему масштаб  $\delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-5}$ ?

#### 6. Проблема монополей

Если во Вселенной были температуры больше  $10^{16}$  ГэВ, должны были интенсивно рождаться GUT-магнитные монополи. Где они?

**Эти вопросы решаются в инфляционной космологии.**

### Инфляция: основная идея

После Горячего Большого взрыва

$$\ddot{a} < 0 \quad (13.8)$$

Инфляция, по определению – расширение вселенной с

$$\ddot{a} > 0 \quad (13.9)$$

Вводится новая шкала времени, в которой инфляция начинается в момент  $t_{Pl}$ , а до того было неизвестно что (эпоха квантовой гравитации). Предполагается:

- Имеет место от  $t \sim t_{Pl}$  до  $t_e$  ( $e$  значит end)
- В момент  $t_e$  инфляция сменяется горячей стадией
- В начале горячей (РД!) стадии

$$H = \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T_{reh} = \sqrt{M_{Pl}^* H(t_e)} \quad (13.10)$$

- Горячая стадия наступает мгновенно после окончания инфляции и наследует  $H(t_e)$

Важная величина:

$$aH = a \frac{\dot{a}}{a} = \dot{a} \quad (13.11)$$

$$\ddot{a} < 0 \Rightarrow aH \text{ убывает, горячая стадия} \quad (13.12)$$

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow aH \text{ возрастает, инфляция} \quad (13.13)$$

## Решение проблемы плоскостности

Уравнение Фридмана с кривизной:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (13.14)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \left[ \rho + \Lambda - \frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \right] = H^2 \quad (13.15)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_c(t) = H^2(t) \Rightarrow \rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G} H^2(t) \quad (13.16)$$

$$\rho_K(t) = -\frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \quad (13.17)$$

$$\Omega_K(t) \equiv \frac{\rho_K(t)}{\rho_c(t)} = \frac{1}{a^2(t)H^2(t)} \quad (13.18)$$

Хотим, чтобы начальная кривизна была не очень мала:

$$\frac{\Omega_K(t_0)}{\Omega_K(t_{Pl})} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (13.19)$$

$$\frac{[a(t_{Pl})H(t_{Pl})]^2}{(a_0H_0)^2} \lesssim 1 \Leftrightarrow \frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a_0H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (13.20)$$

$$\frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a(t_e)H(t_e)} \frac{a(t_e)H(t_e)}{a_0H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (13.21)$$

$$\frac{a(t_e)H(t_e)}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_e)H(t_e)}{a_0H_0} \sim \frac{T_0}{T_{reh}} \frac{H(t_e)}{H_0} \quad (13.22)$$

Этого всегда можно добиться, если  $a(t)H(t) = \dot{a}(t)$  растет достаточно быстро от  $t_{Pl}$  до  $t_e$

## Решение проблемы горизонта

Оценим размер области, которая была причинно связана на момент  $t_e$ , в настоящее время.

Горизонт  $t_e$ :

$$l_{H,e} = a(t_e) \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} \quad (13.23)$$

$$\begin{aligned} l_{H,e}(t_0) &= \frac{a_0}{a(t_e)} a(t_e) \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a} = a_0 \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a} = \\ &= \left. da = \dot{a} dt \Rightarrow dt = \frac{da}{\dot{a}} \right. = \\ &= a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a\dot{a}} = a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2 H} \quad (13.24) \end{aligned}$$

$a^2 H$  – быстро растет, так как  $aH$  растет;

Будем предполагать, что  $H$  меняется относительно медленно;

Интеграл набирается на нижнем пределе:

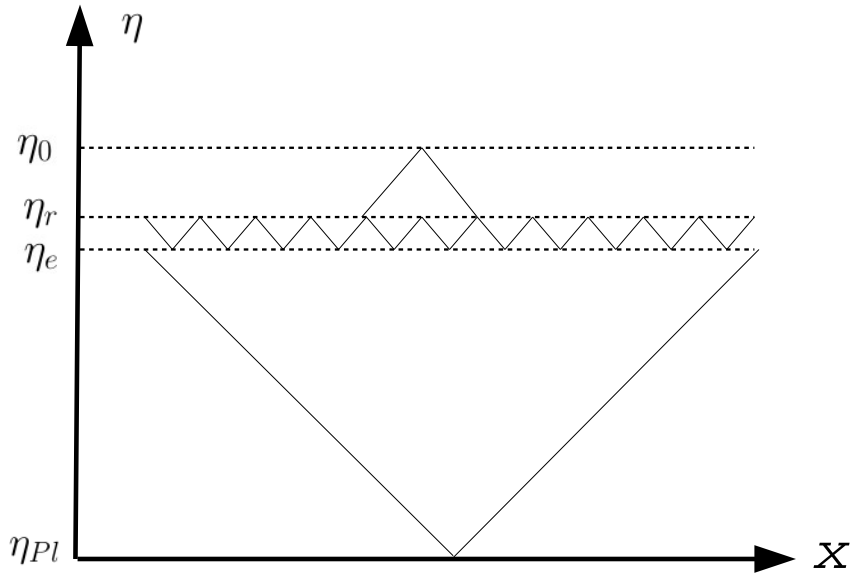
$$a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2 H} \sim \frac{a_0}{H(t_{Pl})} \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2} \sim \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \quad (13.25)$$

$$\frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} \simeq \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \times H_0 = \frac{a_0 H_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \quad (13.26)$$

Если выполнено (13.20), то

$$\frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} \gtrsim 1 \quad (13.27)$$

размер причинно связанной области на момент разогрева  $t_e$  больше нынешнего горизонта событий.



## Оценка необходимой длительности инфляции

Из (13.22):

$$\frac{a(t_e)}{a(t_{Pl})} \gtrsim \frac{T_0}{T_{reh}} \frac{H(t_e)}{H_0} \frac{H(t_{Pl})}{H(t_e)} = \frac{T_0}{T_{reh}} \frac{H(t_{Pl})}{H_0} \quad (13.28)$$

Число  $e$ -фолдингов:

$$N_e^{(tot)} \equiv \ln \frac{a(t_e)}{a(t_{Pl})} \quad (13.29)$$

$$N_e^{(tot)} > \ln \frac{T_0}{H_0} + \ln \frac{H(t_{Pl})}{T_{reh}} \simeq \ln \frac{T_0}{H_0} + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (13.30)$$

$$\frac{T_0}{H_0} \sim 10^{29}; \quad \ln 10^{29} \approx 67 \Rightarrow \quad (13.31)$$

$$N_e^{(tot)} > 67 + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (13.32)$$

Для  $T_{reh} = M_{Pl} \div 1 \text{ TeV}$

$$N_e^{(min)} \simeq 70 \div 100 \quad (13.33)$$

Каково время инфляции, в секундах?

Если инфляция приблизительно экспоненциальна, то

$$N_e^{tot} \sim H_{infl} \Delta t_{infl} \quad (13.34)$$

Из (13.10):

$$\frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}} \Delta t_{infl}^{min} = 70 \div 100 \Rightarrow t_{infl}^{min} = 10^{-42} \div 10^{-9} \text{ сек} \quad (13.35)$$

## Общие замечания

1. Эта оценка  $N_e^{(min)}$  немного завышена из-за предположения о мгновенности разогрева. Принятое значение  $N_e^{(min)} \simeq 60$ .
2. Скорее всего  $N_e^{(tot)} \gg N_e^{(min)} \Rightarrow \Omega_K \ll 0.001$ .
3. Проблема энтропии решается разогревом в момент  $t_e$
4. Проблема начальных возмущений решается за счет квантовых флуктуаций поля инфлатона (см. ниже).
5. Проблема монополей.
  - Если  $T_{reh} < M_{GUT}$ , то монополи в горячей фазе никогда не рождались.

- Если монополи рождались до инфляции, то инфляция сделала их плотность пренебрежимо малой.

## Модели инфляции

### Де-Ситтеровская вакуумная инфляция

- Какая материя нужна, чтобы получить инфляцию?
- Простейший вариант уже известен: плотность вакуума,  $\Lambda$ -член:

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow \rho = \Lambda, \quad p = -\Lambda = -\rho \quad (13.36)$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{H_{vac} t} \quad (13.37)$$

$$H_{vac} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{\Lambda}{M_{Pl}^2}} \quad (13.38)$$

- Проблема: Инфляция не кончается (Роджер Пенроуз не согласен).

### Скалярное поле во Вселенной

- В некоторых случаях ведет себя очень похоже на  $\Lambda$ -член, но инфляция кончается естественным способом и может закончиться разогревом – инфлатон.
- Рассматривается теория вещественного скалярного поля  $\varphi$  с действием (для минимальной связи):

$$S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] \quad (13.39)$$

Полное действие (без  $\Lambda$ -члена):

$$S = S_g + S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g, \varphi) \quad (13.40)$$

$\delta S = 0$  – общий принцип действия.

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_g + \delta S_\varphi = \\ &= \int d^4x \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \left( \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} \delta \varphi \right) = \\ &= \int d^4x \left( \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} \delta \varphi \end{aligned} \quad (13.41)$$

$\delta g_{\mu\nu}$  и  $\delta \varphi$  варьируются независимо, поэтому

$$\begin{cases} \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \rightarrow \text{Уравнения Эйнштейна} \\ \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} = 0 \rightarrow \text{Уравнения поля} \end{cases} \quad (13.42)$$

Требуется найти явный вид  $\frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi}$ .

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi|_\varphi &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) - \delta(V(\varphi)) \right] = \\ &= \text{\textbackslash все считается просто } \star \text{\textbackslash} = \\ &= - \int d^4x \left[ \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] \delta \varphi \Rightarrow \end{aligned} \quad (13.43)$$

$$\frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} = - \left[ \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] \quad (13.44)$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}} \quad (13.45)$$

Однородная и изотропная космология

Работаем в плоской метрике

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2 \quad (13.46)$$

Рассматриваем только однородные поля  $\varphi$

$$\partial_i \varphi = 0; \quad i \geq 1 \quad (13.47)$$

Тогда

$$g = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -a^2 & & \\ & & -a^2 & \\ & & & -a^2 \end{vmatrix} = -a^6 \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3 \quad (13.48)$$

В уравнении остается только 0-компонента:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left( a^3 g^{00} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \Rightarrow \quad (13.49)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0} \quad (13.50)$$

ТЭИ однородного скалярного поля:

$$\delta S_\varphi|_g = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (13.51)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (13.52)$$

Скалярное поле как идеальная жидкость

В локально-лоренцевой системе отсчета, где  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (13.53)$$

$$T_{ij} = \left[ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right] \delta_{ij} \quad (13.54)$$

Это похоже на идеальную жидкость с плотностью и давлением:

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (13.55)$$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (13.56)$$

Если  $\dot{\varphi}$  мало, то жидкость очень похожа на вакуум  $\rho \approx -p!$

Размерности

$$\begin{aligned} [V] = \text{GeV}^4 &\Rightarrow [\dot{\varphi}]^2 = \text{GeV}^4 \Rightarrow [\dot{\varphi}] = \text{GeV}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\varphi] = \text{GeV}; \quad V \sim g\varphi^n \Rightarrow [g] = \text{GeV}^{4-n} \end{aligned} \quad (13.57)$$

**Основные режимы для уравнения скалярного поля**

Уравнение (13.50) похоже на уравнение осциллятора с трением.

Отсюда два основных режима для решений:

- Режим быстрого скатывания  $\rightarrow$  осцилляции
- Режим медленного скатывания  $\rightarrow$  инфляция

## 1. Режим быстрого скатывания

$$H\dot{\varphi} \ll \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (13.58)$$

– осцилляции вблизи минимума  $V(\varphi)$

Пример: потенциал вблизи минимума квадратичен:

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad (13.59)$$

Учтем явно малый член с  $\dot{\varphi}$ . Из (13.50):

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a} + m^2\varphi = 0 \quad (13.60)$$

Уравнение гармонического осциллятора с зависящим от времени коэффициентом затухания.

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^{3/2}}\chi(t) \quad (13.61)$$

$$\ddot{\chi} + \left[ m^2 - \frac{3}{2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] \chi = 0 \quad (13.62)$$

Для степенных и экспоненциальных  $a(t)$  имеет место:

$$\ddot{a} \sim \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} \sim \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 \quad (13.63)$$

Потребуем  $m^2 \gg H^2$  (иначе не будет быстрого скатывания). Тогда

$$\ddot{\chi} + m^2\chi = 0 \Rightarrow \quad (13.64)$$

$$\chi(t) = \chi_* \cos(mt + \beta) \Rightarrow \quad (13.65)$$

$$\varphi(t) = \frac{\chi_*}{a^{3/2}(t)} \cos(mt + \beta) \quad (13.66)$$

– осцилляции с затуханием.

## 2. Режим медленного скатывания

- «Первое условие медленного скатывания»

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \quad (13.67)$$

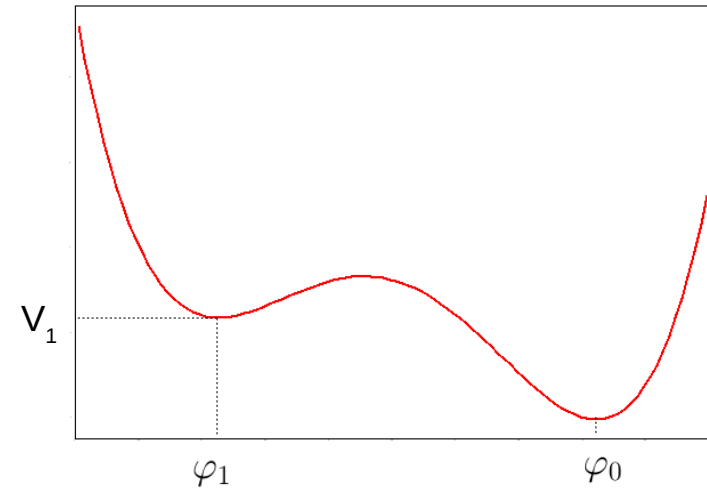
– на самом деле условие вакуумоподобности:

$$p(\varphi) = -\rho(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \approx -\rho(\varphi) \quad (13.68)$$

При доминировании  $\rho(\varphi)$  получаем инфляцию.

**За счет чего можно получить медленное скатывание?**

- Первая идея – сценарий Гута (Guth), «старая инфляция»



Пока  $\varphi$  сидит в минимуме  $\varphi_1$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  точно,  $p = -\rho$  точно.

$\varphi_1$  – ложный вакуум,  $\varphi_0$  – истинный вакуум.

- Поле  $\varphi$  локально квантово туннелирует из  $\varphi_1$  в  $\varphi_0$  с образованием пузырей истинного вакуума  $\Rightarrow$



механизм остановки инфляции.

- Горячая материя образуется при столкновении стенок пузырей.

- Проблема: оказалось, что из-за инфляции пузыри никогда не сталкиваются  $\Rightarrow$  сценарий не работает.

Медленное скатывание за счет «вязкости»

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (13.69)$$

Трение велико, если

$$\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 \quad (13.70)$$

Имеют место два условия:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} \ll 1 \text{ — из ТЭИ} \quad (13.71)$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 \text{ — из уравнения движения} \quad (13.72)$$

- Если выполнены оба условия, то имеется квази-экспоненциальное расширение Вселенной.

Исходим из системы:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \\ H^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \end{cases} \quad (13.73)$$

При выполнении условий (13.71), (13.72) приводятся к виду:

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{3H}V'(\varphi) \quad (13.74)$$

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3}V(\varphi) \right)^{1/2} \quad (13.75)$$

Из (13.75):

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3}V \right)^{1/2} \Rightarrow \quad (13.76)$$

$$a(t) = a_i \exp \left\{ \left( \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \right)^{1/2} \int_{t_i}^t [V(\varphi(t))]^{1/2} dt \right\} \quad (13.77)$$

Расширение близко к экспоненциальному в том смысле, что изменение  $H$  за хаббловское время много меньше  $H$ :

$$\dot{H} \frac{1}{H} \ll H \Rightarrow \frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \quad (13.78)$$

Из (13.75):

$$\dot{H} = \frac{1}{2M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3V} \right)^{1/2} V'(\varphi)\dot{\varphi} \quad (13.79)$$

Из (13.75) и (13.79):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{H}}{H} &= \frac{1}{2} \frac{V'}{V} \dot{\varphi} = \backslash (13.74) \backslash = -\frac{3}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{V} H \Rightarrow \\ \left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{V} \ll 1 \text{ (следует из (13.71))} \quad (13.80) \end{aligned}$$

Условия (13.71) и (13.72) переформулируем в виде условий на потенциал  $V$ .

(13.75) подставляем в (13.74), получаем

$$\dot{\varphi} = -\frac{M_{Pl}}{(24\pi)^{1/2}} \frac{V'}{V^{1/2}} \quad (13.81)$$

Подставляем это  $\dot{\varphi}$  в (13.71):

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} = \frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1 \quad (13.82)$$

Теперь используем (13.72).

Из (13.81):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{M_{Pl}}{(24\pi)^{1/2}} \left( \frac{V''}{V^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{V'^2}{V^{3/2}} \right) \dot{\varphi} = \\ &= \left\langle (13.75) \Rightarrow V^{1/2} = HM_{Pl} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/2} \right\rangle = \\ &= -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \left[ \frac{V''}{V} - \frac{1}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \right] H \dot{\varphi} \quad (13.83) \end{aligned}$$

(13.82) и (13.83) подставляем в (13.72):

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} &= -\frac{M_{Pl}^2}{24\pi} \frac{V''}{V} + \frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \frac{M_{Pl}^2}{24\pi} \frac{V''}{V} \right| \ll 1 \quad (13.84) \end{aligned}$$

(13.82) и (13.84) – два условия на потенциалы, которые следуют из двух условий (13.71) и (13.72)

Два параметра медленного скатывания:

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (13.85)$$

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V} \ll 1 \quad (13.86)$$

Условие медленного скатывания:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1 \quad (13.87)$$

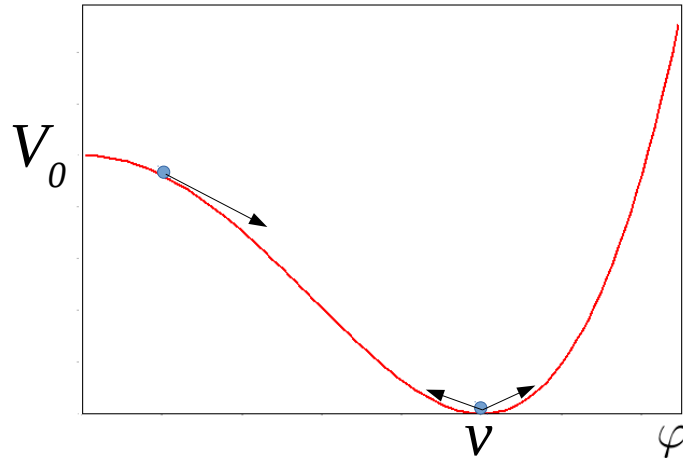
Связь с условиями (13.71), (13.72):

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V} = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} = \frac{1}{3}(\varepsilon - \eta) \quad (13.88)$$

$\varepsilon, \eta$  действительно однозначно связаны с (13.71), (13.72), но выражаются исключительно через  $V$ .

Условие на квазиэкспоненциальное расширение ★:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\varepsilon \quad (13.89)$$



- Хиггс-подобный потенциал
- Поле застревает вблизи нуля, запускает инфляцию, когда скатывается вниз инфляция прекращается, осцилляции рождают частицы  $\rightarrow$  горячий взрыв.

Подробный пример (популярная модель):

Поле вблизи нуля

$$V(\varphi) = V_0 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (\lambda - \text{безразмерно!}) \quad (13.90)$$

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{\lambda^2 \varphi^6}{V_0^2} \quad (13.91)$$

$$\eta = -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{3\lambda\varphi^2}{V_0} \quad (13.92)$$

Малое поле  $\varphi$  обеспечивает медленное скатывание. Почему начальное поле может быть мало?

- $\varphi = 0$  получается естественным образом, если в начальной горячей (возможно неоднородной) Вселенной эффективный потенциал имеет минимум в нуле.
- Начальная горячая Вселенная расширяется, и потенциал переходит в 0-температурный, запуская инфляцию.

Специальный случай: медленное скатывание заканчивается при небольшом значении поля

$$\lambda\varphi_e^4 \ll V_0 \quad (13.93)$$

(противоположный случай напоминает другой сценарий – хаотической инфляции)

При выполнении (13.93):

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{\lambda\varphi^2}{V_0} \times \frac{\lambda\varphi^4}{V_0} \ll |\eta| \quad (13.94)$$

поэтому конец инфляции определяется условием  $|\eta| \sim 1$ :

$$|\eta_e| = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{3\lambda\varphi_e^2}{V_0} \sim 1 \Rightarrow \quad (13.95)$$

$$\varphi_e^2 \sim \frac{V_0}{3\lambda} \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \Rightarrow \quad (13.96)$$

$$\lambda\varphi_e^4 \ll V_0 \Rightarrow \lambda \left( \frac{V_0}{3\lambda} \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \right)^2 \ll V_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{M_{Pl}^4} \ll \left( \frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda \Rightarrow V_0 \ll \left( \frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda M_{Pl}^4 \quad (13.97)$$

– это условия сценария новой инфляции при малых полях.

- Поля планковского масштаба не нужны!
- Правильный масштаб флуктуаций получается при  $\lambda \sim 10^{-13}$ .

### Температура разогрева

Предполагая, что почти вся плотность энергии  $\sim V_0$  переходит в тепло:

$$g_* T_{reh}^4 \lesssim V_0 \ll \left( \frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda M_{Pl}^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{reh} \ll \left[ \frac{\left( \frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda}{g_*} \right]^{1/4} M_{Pl} \sim 10^{-3} M_{Pl} \quad (13.98)$$

– без подгонки параметров температура не слишком высока.

### *Число e-фолдингов*

$$N_e(\varphi) = \ln \frac{a_e}{a(\varphi)} \quad (13.99)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = H(t) \Rightarrow d \ln a = H(t) dt \Rightarrow N_e(\varphi) = \int_{t_\varphi}^{t_e} H(t) dt \quad (13.100)$$

Из уравнений медленного скатывания (13.74), (13.75)

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{3H} V'(\varphi) \quad (13.101)$$

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3} V(\varphi) \right)^{1/2} \quad (13.102)$$

получаем

$$N_e(\varphi) =$$

$$= \left\langle \varphi \text{ как часы : } t \rightarrow \varphi(t), d\varphi = \dot{\varphi} dt, dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \right\rangle =$$

$$= \int_{\varphi}^{\varphi_e} H(\varphi) \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \left\langle (13.101), (13.102) \star \right\rangle =$$

$$= \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi \quad (13.103)$$

$$N_e(\varphi) = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi \quad (13.104)$$

Для «новой инфляции»:

$$N_e(\varphi) = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \left[ \frac{V_0}{2\lambda} \frac{1}{\varphi^2} \Big|_{\varphi_e}^{\varphi} - \frac{1}{4} \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi_e}^{\varphi} \right] =$$

$$= \left\langle \lambda\varphi_e^4 \ll V_0 \Rightarrow \frac{1}{4} \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi_e}^{\varphi} \rightarrow 0 \right\rangle \simeq \frac{4\pi}{M_{Pl}^2} \frac{V_0}{\lambda} \frac{1}{\varphi^2} \quad (13.105)$$

$$N_e(\varphi) = \frac{4\pi}{M_{Pl}^2} \frac{V_0}{\lambda} \frac{1}{\varphi^2} \quad (13.106)$$

$$N_e^{(tot)} = \frac{4\pi V_0}{\lambda M_{Pl}^2 \varphi_i^2} \quad (13.107)$$

Как оценить порядок?

На протяжении инфляции (из (13.75) или (13.102))

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi V}{3} \right)^{1/2} \approx \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi V_0}{3} \right)^{1/2} \quad (13.108)$$

– меняется мало.

Если  $\varphi_i$  имеет порядок квантовой флуктуации  $\varphi$ :

$$\varphi_i \sim \delta\varphi \sim H \quad (13.109)$$

Тогда в (13.107)

$$\varphi_i^2 \sim \frac{1}{M_{Pl}^2} \frac{8\pi V_0}{3} \quad (13.110)$$

Подставляем и получаем

$$N_e^{(tot)} \approx \frac{3}{2\lambda} \sim 10^{13} \quad (13.111)$$

а нужно всего  $N_e^{(tot)} \sim 60 \div 100$ .

Вселенная раздувается в  $\sim 10^{10^{13}}$  раз – «инфляционно большое число».

Видимая Вселенная – крошечный кусочек инфляционного пузыря.

● Проблема сценария «новой инфляции» – противоясственное значение  $\lambda \sim 10^{-13}$  – очень мало, и не появляется естественным образом в GUT.

### Сценарий хаотической инфляции Андрея Линде

Насколько сильно условия (13.85), (13.86)

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (13.112)$$

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V} \ll 1 \quad (13.113)$$

ограничивают вид потенциала?

Рассмотрим потенциалы

$$V = g\varphi^n \quad (13.114)$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{n}{\varphi} \quad (13.115)$$

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{n^2}{\varphi} \ll 1 \Rightarrow \varphi \gg M_{Pl} \frac{n}{4\pi} \quad (13.116)$$

$$\frac{V''}{V} = \frac{n(n-1)}{\varphi} \quad (13.117)$$

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{n(n-1)}{\varphi^2} \ll 1 \Rightarrow \varphi \gg M_{Pl} \sqrt{\frac{n(n-1)}{8\pi}} \quad (13.118)$$

● При не слишком больших  $n$  режим медленного скатывания автоматически реализуется для

$$\varphi \gg M_{Pl} \quad (13.119)$$

Не противоречит ли такое значение поля условиям применимости классической гравитации?

Условие классичности:

$$V(\varphi) \ll M_{Pl}^4 \quad (13.120)$$

$$V(\varphi) = g\varphi^n \ll M_{Pl}^4 \Rightarrow \varphi \ll \left(\frac{M_{Pl}^4}{g}\right)^{1/n} \quad (13.121)$$

Нужно обеспечить:

$$M_{Pl} \ll \varphi \ll \left(\frac{M_{Pl}^4}{g}\right)^{1/n} \quad (13.122)$$

Это можно получить за счет малой постоянной  $g$  (в планковских единицах)  
[что согласуется с получением реалистичных амплитуд начальных возмущений и не вызывает отторжения в КТП]

Примеры

$$V_2(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad (13.123)$$

$$\left(\frac{M_{Pl}^4}{m^2/2}\right)^{1/2} \gg M_{Pl} \Rightarrow m \ll M_{Pl} \quad (13.124)$$

$$V_4(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (13.125)$$

$$\left(\frac{M_{Pl}^4}{\lambda/4}\right)^{1/4} \gg M_{Pl} \Rightarrow \lambda \ll 1 \quad (13.126)$$

*Начало инфляции*

- Хаотические начальные условия:

Вселенная неоднородна на всех масштабах вплоть до планковского – радиусы кривизны  $\sim M_{Pl}^{-1} = l_{Pl}$ ,  $\rho \sim M_{Pl}^4$ .

- Имеется инфлатон со степенным потенциалом. Естественными условиями для него являются

$$V = g\varphi^n \sim M_{Pl}^4 \Rightarrow \varphi \sim \left(\frac{M_{Pl}^4}{g}\right)^{1/n} \quad (13.127)$$

- Поле сильно неоднородно, поэтому также

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \sim M_{Pl}^4 \quad (13.128)$$

- Вклад кривизны в уравнение «Фридмана» существенен.

- Вклады кривизны и кинетического члена (13.128) при расширении падают как  $1/a^2$ , но  $V(\varphi)$  меняется медленно.

- В результате случайной «квантовой» флуктуации может возникнуть область чуть больше  $l_{Pl}$ , где градиентные члены и вклад кривизны меньше  $V(\varphi)$ . Она попадает в режим медленного скачивания и начинает раздуваться.

- Инфляция продолжается, пока не нарушается условие  $M_{Pl} \ll \varphi$ , после чего поле переходит в режим осцилляций и приводит к рождению частиц (разогрев). Нужно взаимодействие  $\varphi$  с другими полями.

Ограничение на начальную температуру.

Вся энергия поля переходит в тепло:

$$\rho \sim g_* T^4 \lesssim V(\varphi \sim M_{Pl}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{reh} \lesssim T_{max} \sim \left[ \frac{V(\varphi \sim M_{Pl})}{g_*} \right]^{1/4} \quad (13.129)$$

Из  $V(\varphi) \ll M_{Pl}^4$  (классичность) следует, что  $T_{reh} \ll M_{Pl}$

- Разогрев означает увеличение энтропии.

Сценарий хаотической инфляции, кратко:

- Предельно ранняя Вселенная заполнена полем инфлатона планковской плотности, что плохо описывается классической физикой и даже наличие гладкого пространства-времени проблематично.
- Некоторые кластеры планковского размера раздуваются за счет инфляции в «инфляционные пузыри», и то, что мы наблюдаем малая часть одного из пузырей.

Сколько e-фолдингов дает хаотическая инфляция

$N_e(\varphi)$  из (13.104):

$$N_e(\varphi) = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi \quad (13.130)$$

Для  $V = g\varphi^n$

$$\int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi = \frac{1}{2n}(\varphi^2 - \varphi_e^2) = \backslash \varphi \gg \varphi_e \backslash \simeq \frac{1}{2n} \varphi^2 \quad (13.131)$$

$$N_e(\varphi) = \frac{4\pi}{n} \frac{\varphi^2}{M_{Pl}^2} \quad (13.132)$$

Считаем, что в начале инфляции  $V(\varphi_i) \sim M_{Pl}^4 \Rightarrow$

$$g\varphi_i^n \sim M_{Pl}^4 \Rightarrow \varphi_i \sim \frac{1}{g^{1/n}} M_{Pl}^{4/n} \Rightarrow \quad (13.133)$$

$$N_e^{(tot)} = N_e(\varphi_i) = \frac{4\pi}{n} \left( \frac{M_{Pl}^{4-n}}{g} \right)^{2/n} \quad (13.134)$$

Примеры

$$n = 2; g = \frac{m^2}{2} \Rightarrow N_e^{(tot)} = 4\pi \frac{M_{Pl}^2}{m^2} \quad (13.135)$$

$$n = 4; g = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow N_e^{(tot)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \quad (13.136)$$

$\delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-5} \Rightarrow$

$$n = 2: m \sim 10^{-6} M_{Pl} \Rightarrow N_e^{(tot)} \sim 10^{13} \quad (13.137)$$

$$n = 4: \lambda \sim 10^{-13} \Rightarrow N_e^{(tot)} \sim 10^7 \quad (13.138)$$

Планковский масштаб растягивается инфляцией в  $10^{10^{13}}$  или в  $10^{10^7}$  раз.

## Продолжительность инфляции

$$\Delta t^{(tot)} = \int_{t_i}^{t_e} dt = \int_{\varphi_i}^{\varphi_e} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \quad (13.139)$$

Из уравнений инфляции (13.74), (13.75)

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{3H} V'(\varphi) \quad (13.140)$$

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3} V(\varphi) \right)^{1/2} \quad (13.141)$$

⇒

$$\Delta t^{(tot)} = 3 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{M_{Pl}} \int_{\varphi_e}^{\varphi_i} \frac{\sqrt{V}}{V'} d\varphi \quad (13.142)$$

Из условия  $V(\varphi_i) \sim M_{Pl}^4$  находим ★:

$$n = 2: \Delta t^{(tot)} \sim \frac{1}{M_{Pl}} \frac{\varphi_i}{m} \sim \frac{M_{Pl}}{m^2} \sim 10^{-31} \text{сек} \quad (13.143)$$

$$\begin{aligned} n = 4: \Delta t^{(tot)} &\sim \frac{1}{M_{Pl}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\varphi_i}{\varphi_e} \sim \\ &\sim \frac{1}{M_{Pl}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \frac{1}{\lambda} \sim 10^{-35} \text{сек} \quad (13.144) \end{aligned}$$

## Модель Старобинского

Модель не содержит дополнительных полей, но учитывает квантовые поправки к лагранжиану Гильберта-Эйнштейна:

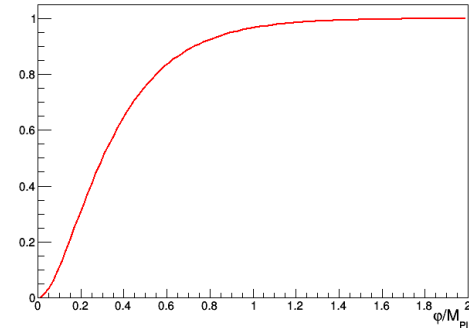
$$S = -\frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \int dx^4 \sqrt{-g} \left( R - \frac{R^2}{6M^2} \right) \quad (13.145)$$

$M$  имеет размерность массы, свободный параметр.

Можно показать, что любая теория  $f(R)$  эквивалентна обычной теории Эйнштейна со скалярным полем с некоторым потенциалом  $V(\varphi)$ .

Для теории (13.145):

$$V(\varphi) = \frac{3M^2 M_{Pl}^2}{32\pi^2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}} \right) \right]^2 \quad (13.146)$$



- Модель Старобинского эквивалентна модели хаотической инфляции с инфлатонным полем (13.146)
- «Натуральная инфляция»  $V(\varphi) = (m^2/2)\varphi^2$  закрыта низким значением скалярно-тензорного отношения  $r < 0.07$ , но модель Старобинского предсказывает  $r \sim 0.001$



## Генерация космологических возмущений

- Скалярные возмущения: *усиленные инфляцией* вакуумные флуктуации поля инфлатона.
- Тензорные возмущения: *усиленные инфляцией* вакуумные флуктуации гравитационного поля (метрики).

Количественная теория дает:

- Скалярно/тензорное отношение  $r$
- Спектральные индексы скалярных и тензорных мод возмущений

*Инфляционное усиление квантовых флуктуаций поля инфлатона*

- Квантовые флуктуации  $\phi$  поля инфлатона  $\varphi$  являются гауссовым случайным полем.
- Разложение среднего квадрата отклонения по импульсам (длинам волн), расходящийся интеграл:

$$\langle \phi^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{q^2}{(2\pi)^2} \frac{dq}{q} \Rightarrow \quad (13.147)$$

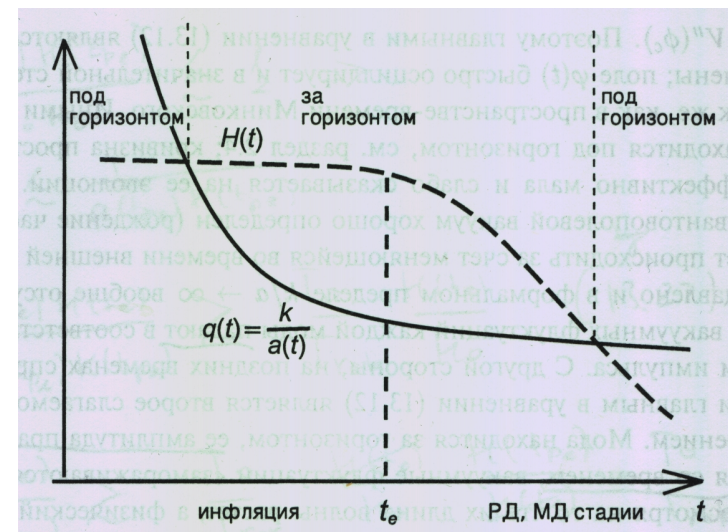
- Спектр мощности квантовых флуктуаций

$$\mathcal{P}_\phi(q) = \frac{q^2}{(2\pi)^2} \quad (13.148)$$

- Амплитуда квантовых флуктуаций, по определению

$$\delta\phi(q) \equiv \sqrt{\mathcal{P}_\phi(q)} \Rightarrow \delta\phi(q) = \frac{q}{2\pi} \quad (13.149)$$

- На фазе горячего взрыва: Вселенная расширяется медленнее, чем растет горизонт событий  $\Rightarrow$  константные моды входят под горизонт, и начинают осциллировать.
- На фазе инфляции – обратная картина: Раздувание быстрее роста горизонта  $\Rightarrow$  короткие вакуумные флуктуации выходят за горизонт и замораживаются  $\Rightarrow$
- Фиксируется амплитуда флуктуаций.
- При фиксированной амплитуде длина волны резко увеличивается,
  - амплитуда для этой волны становится много больше, чем предписывается формулой (13.149) –
  - это есть механизм усиления вакуумных флуктуаций за счет инфляции.
- Эти усиленные флуктуации есть те константные моды, которые дают начальные условия для эволюции возмущений на горячей стадии.



## Вечная инфляция и Мультиверс

- Инфляция идет, моды квантовых флуктуаций на стадии инфляции выходят за горизонт и замораживаются.
- В масштабе горизонта ДеСиттера устанавливаются новые значения почти однородного поля инфлатона.
- Вся область инфляции оказывается разбита на под-области со своими полями инфлатона  $\Rightarrow$  Вселенная в целом сильно неоднородна.
- В некоторых областях инфлатон велик, и там усиливается раздувание.
- В некоторых областях инфлатон мал, там инфляция завершается горячим взрывом.
- Там, где инфляция продолжается, новые квантовые возмущения выходят за горизонт и т.д. ...  $\Rightarrow$  рекурсия  $\Rightarrow$  Вечная инфляция
- Разные области представляют собой независимые «локальные» вселенные. На стадии горячего взрыва могут быть по-разному нарушены симметрии, тогда в разных вселенных будет разная физика.
- Теория хаотической инфляции естественно приводит к существованию ансамблей вселенных, чего требует формализм теории космологических возмущений.

