Лекция 2

Основы ОТО. II. Свойства афинной связности. Тензор кривизны. Уравнения Эйнштейна.

Первое дополнительное условие на коэффиценты связности: метричность

Хотим, чтобы операци поднятия/опускания индексов была универсальной:

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda A_\mu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \text{ т.е.} \tag{2.1}$$

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} A^\nu) \tag{2.2}$$

По правилу Лейбница:

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda (g_{\mu\nu} A^\nu) = (\nabla_\lambda g_{\mu\nu}) A^\nu + g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \\ = g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) \Rightarrow\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0} \tag{2.4}$$

Метрический тензор ковариантно постоянен, если *связность метрична.*

Метричность связности априори ниоткуда не следует → рассматриваются обобщения ОТО, в которых связность не метрична.

Закон преобразования афинных связностей

$$\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\nu - \text{Должно быть тензором!} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\lambda A^\mu)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\nabla_\alpha A^\beta) = \\ = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\partial_\alpha A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} A^\gamma) = \\ = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} A^\gamma\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}(\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\nu)' = \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma} A'^\gamma = \\ = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} A^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} A^\delta\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} A^\alpha + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} A^\delta \tag{2.8}$$

$A^\gamma, A^\alpha, A^\delta \to A^\varepsilon$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\varepsilon} \ \Bigg|\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \tag{2.9}$$

$$\boxed{\Gamma'^\mu_{\lambda\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon} - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon}} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\lambda}}+\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\varepsilon}}\equiv 0 \quad \bigstar \tag{2.11}$$

$$\boxed{\Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}}\Gamma^{\beta}_{\alpha\varepsilon}+\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\delta}\partial x'^{\lambda}}} \tag{2.12}$$

Афинная связность – не тензор!

Кручение

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{2.13}$$

Преобразуется как тензор!

Локально Лоренцевы системы отсчета

Если $C^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$ во всех системах отсчета $\Rightarrow$

Если $C^{\alpha}_{\beta\gamma}\neq 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C^{\alpha}_{\beta\gamma}\neq 0$ в любой системе отсчета, следовательно в любой системе отсчета $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\neq 0$ и гравитацию исключить невозможно.

Чтобы гравитацию *можно было* локально исключить, в ОТО *требуется* $C^{\alpha}_{\beta\gamma}\equiv 0$, $\Rightarrow \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$

Второе условие на связность:
Принцип эквивалентности требует симметричности связности (отсутствия кручения).

Первая проблема ОТО со спином: частицы со спином не движутся по геодезическим (?).

Вторая проблема ОТО со спином: нет рецепта расчета гравитационного поля спина.

Система спинов может создавать макроскопический момент и должна приводить к макроскопическому гравитационному полю, которое ОТО не может сосчитать $\Rightarrow$.

Попытка учета поля спинов приводит к теориям Эйнштейна-Картана, в которых кручение не равно нулю.

Если $C^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$, то афинную связность *локально занулить действительно можно.*

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+T^{\mu}_{\sigma\rho}x^{\sigma}x^{\rho} \tag{2.14}$$

$$\left.\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right|_0=\delta^{\mu}_{\nu};\ \left.\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\right|_0=\delta^{\nu}_{\mu} \tag{2.15}$$

$$\left.\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\varepsilon}}\right|_0=T^{\mu}_{\varepsilon\beta}+T^{\mu}_{\beta\varepsilon}\Rightarrow \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta}&=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}}\Gamma^{\beta}_{\alpha\varepsilon}-\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}}\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\varepsilon}}=\\&=\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\varepsilon}_{\delta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\varepsilon}-\delta^{\beta}_{\lambda}\delta^{\varepsilon}_{\delta}(T^{\mu}_{\varepsilon\beta}+T^{\mu}_{\beta\varepsilon})=\\&=\Gamma^{\mu}_{\lambda\delta}-(T^{\mu}_{\delta\lambda}+T^{\mu}_{\lambda\delta})\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$T^{\mu}_{\delta\lambda}+T^{\mu}_{\lambda\delta}=\Gamma^{\mu}_{\lambda\delta}(0)\Rightarrow\Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta}(0)=0. \tag{2.18}$$

Симметричность $\Gamma^{\mu}_{\lambda\delta}$ – необходимое условие!

С помощью преобразования

$$\hat{g}' = \hat{J}\hat{g}\hat{J}^T, \;\; \hat{J} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \tag{2.19}$$

симетричная матрица $\hat{g}$ может быть приведена к диагональному виду

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} k^0 & & & 0 \\ & -k^1 & & \\ & & -k^2 & \\ 0 & & & -k^3 \end{pmatrix}, \;\; k^\mu > 0 \tag{2.20}$$

С помощью масштабного преобразования:

$$x'^\mu = x^\mu \frac{1}{\sqrt{k^\mu}} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Преобразование (2.14) в силу (2.15) не меняет тензоры в начале координат, поэтому связность можно занулить после того, как как $\hat{g}$ приведен к лоренцову виду.

Метрический тензор можно привести к Лоренцеву виду и связность можно занулить одновременно – это локально Лоренцева система отсчета

Однако производные $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, вообще говоря, не исчезают!

В частности, неустранимы приливные силы и остаются градиенты, которые могут (?) влиять на движение частицы со спином.

Явное выражение коэффициентов связности через метрический тензор

Используется *одновременно* метричность $g_{\mu\nu}$ и симметричность связности:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = 0. \tag{2.22}$$

$$\begin{array}{l} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} \; [\lambda\mu\nu] \mid \times (+1) \\ \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} = \partial_\mu g_{\nu\lambda} \; [\mu\nu\lambda] \mid \times (+1) \\ \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} g_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} \; [\nu\lambda\mu] \mid \times (-1) \end{array} \tag{2.23}$$

$$2\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu} \; | g^{\nu\delta} \bigstar \tag{2.24}$$

$$\boxed{\Gamma^\delta_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\delta\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})} \tag{2.25}$$

Для того, чтобы $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ выражались через $g_{\mu\nu}$, метричность и симметричность связности необходимы!

Можно посчитать, что
метричность+симметричность вместе дают 64 уравнения, однозначно определяющие все 64 компоненты связности ★.

Выражение (2.25) иногда называется символами Кристоффеля и обозначается

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \lambda\mu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\delta\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})} \tag{2.26}$$

Тензор Леви-Чевита

Хотим, чтобы $E^{\mu\nu\rho\sigma}$ был тензором, и в локально лоренцевой (галилеевой) системе (x)

$$E^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \ \varepsilon^{0123} = 1 \tag{2.27}$$

Как будет в произвольной системе (x')?

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{2.28}$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{-g'} \ \Rightarrow \ \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \ \Rightarrow \tag{2.29}$$

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g'}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{2.30}$$

$$\boxed{E^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}} \tag{2.31}$$

Тензор кривизны

Два способа ввести тензор кривизны.

1. Через коммутатор ковариантной производной

$$\nabla_\mu\nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu\nabla_\mu A^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\lambda =? \tag{2.32}$$

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu A^\lambda) = \partial_\mu(\nabla_\nu A^\lambda) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(\nabla_\sigma A^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}(\nabla_\nu A^\sigma) = \ldots \tag{2.33}$$

$$\nabla_\nu(\nabla_\mu A^\lambda) = \ldots \tag{2.34}$$

(посчитать! ★)

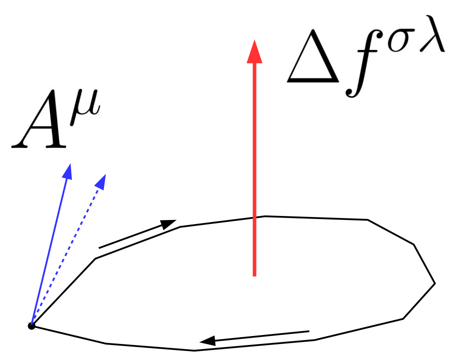
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\lambda = A^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \tag{2.35}$$

$$\boxed{R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}} \tag{2.36}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\lambda = A_\sigma R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} \ \text{(посчитать ★)} \tag{2.37}$$

Отсюда видно, почему тензар кривизны – действительно тензор.

2. Параллельный перенос вдоль замкнутого контура



$$\tilde{A}^\mu(x+dx) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tag{2.38}$$

$$\delta A^\mu(x) = \tilde{A}^\mu(x+dx) - A^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tag{2.39}$$

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu(x) = -\oint \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tag{2.40}$$

Формула Стокса:

$$\oint B_{\dots\lambda}dx^\lambda = \frac{1}{2}\int df^{\sigma\lambda}\left(\partial_\sigma B_{\dots\lambda} - \partial_\lambda B_{\dots\sigma}\right) \tag{2.41}$$

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2}\int df^{\sigma\lambda}[\partial_\sigma(\Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu) - \partial_\lambda(\Gamma^\mu_{\nu\sigma}A^\nu)] \simeq$$
$$\simeq -\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,A^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\partial_\sigma A^\nu - \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\,A^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\partial_\lambda A^\nu) \tag{2.42}$$

Внутри контура A^μ изменяется только за счет параллельного переноса, поэтому

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \;\Rightarrow\; \partial_\lambda A^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu \tag{2.43}$$

$$\Delta A^\mu =$$
$$-\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\rho\sigma}A^\rho - \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\,A^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}A^\rho) =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma\Gamma^\mu_{\lambda\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda})A^\nu =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^\mu{}_{\sigma\lambda\nu}A^\nu \tag{2.44}$$

$$\boxed{\Delta A^\mu = \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^\mu{}_{\sigma\lambda\nu}A^\nu} \tag{2.45}$$

Из вывода видно, что формула верна универсально, независимо от метричности и симметричности связности.

Свойства тензора кривизны

$$R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \qquad (2.46)$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} &= g_{\tau\lambda}R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = \\ &= g_{\tau\lambda}(\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}) \end{aligned} \qquad (2.47)$$

1.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\tau\sigma\nu\mu} \ \text{ – очевидно} \qquad (2.48)$$

2.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\tau\mu\nu} \qquad (2.49)$$

– не очевидно, использует метричность, не универсально

$$\Gamma_{\xi,\nu\sigma} = g_{\xi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_{\nu}g_{\sigma\xi} + \partial_{\sigma}g_{\xi\nu} - \partial_{\xi}g_{\nu\sigma}) \qquad (2.50)$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} \;=\; &+g_{\tau\lambda}(\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) \\ &-g_{\tau\lambda}(\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}) \end{aligned} \qquad (2.51)$$

$\nu\sigma \equiv ..$

$$\begin{aligned} g_{\tau\lambda}(\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{..} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{..}) &= g_{\tau\lambda}\nabla_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{..} = \nabla_{\mu}(g_{\tau\lambda}\Gamma^{\lambda}_{..}) = \\ &= \nabla_{\mu}(\Gamma_{\tau,..}) = \partial_{\mu}\Gamma_{\tau,..} - \Gamma^{\lambda}_{\tau\mu}\Gamma_{\lambda,..} = \\ &= \partial_{\mu}\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\mu}\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} \end{aligned} \qquad (2.52)$$

$$g_{\tau\lambda}(\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}) = \partial_{\nu}\Gamma_{\tau,\mu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\nu}\Gamma_{\lambda,\mu\sigma} \qquad (2.53)$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} &= \partial_{\mu}\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\tau,\mu\sigma} + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) = \\ &= \partial_{\mu}\partial_{\sigma}g_{\tau\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\tau}g_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}g_{\tau\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\tau}g_{\mu\sigma} + \\ &+ g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) \end{aligned} \qquad (2.54)$$

Отсюда свойство (2.49) уже очевидно.

3.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\tau\sigma} \ \bigstar \qquad (2.55)$$

4.

$$R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} + R^{\sigma}{}_{\nu\rho\mu} = 0 \qquad (2.56)$$

Из тождества Якоби:

$$[\nabla_{\rho},[\nabla_{\mu},\nabla_{\nu}]]\varphi + [\nabla_{\mu},[\nabla_{\nu},\nabla_{\rho}]]\varphi + [\nabla_{\nu},[\nabla_{\rho},\nabla_{\mu}]]\varphi = 0; \qquad (2.57)$$

$$[\nabla_{\rho},[\nabla_{\mu},\nabla_{\nu}]]\varphi = -\partial_{\sigma}\varphi R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} \ \Rightarrow \ (2.56) \qquad (2.58)$$

5. Тождество Бьянки $\bigstar$:

$$\nabla_{\rho}R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_{\mu}R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_{\nu}R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \qquad (2.59)$$

Из тождества Якоби

$$[\nabla_{\rho},[\nabla_{\mu},\nabla_{\nu}]]A^{\lambda} + [\nabla_{\mu},[\nabla_{\nu},\nabla_{\rho}]]A^{\lambda} + [\nabla_{\nu},[\nabla_{\rho},\nabla_{\mu}]]A^{\lambda} = 0; \qquad (2.60)$$

Число независимых компонент $\bigstar$:

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \qquad (2.61)$$

$$\begin{aligned} n &= 4 \to N = 20 && (2.62) \\ n &= 3 \to N = 6 && (2.63) \\ n &= 2 \to N = 1 && (2.64) \end{aligned}$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{2.65}$$

Скаляр кривизны (не гауссова кривизна!):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu} = R^{\lambda\nu}{}_{\lambda\nu} \tag{2.66}$$

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного прицпипа

Сначала одна гравитация – без материи.

Действие должно быть общековариантной величиной.
1. Хотим иметь уравнения второго порядка для $g_{\mu\nu}$.
2. Уравнения должны быть линейными относительно вторых производных.

1. Простейшее действие

$$S_\Lambda = -\Lambda \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \tag{2.67}$$

$$\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) = \Lambda \int d^4x \frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \tag{2.68}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g = ? \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned} \det(\hat{g} + \delta\hat{g}) &= \det[\hat{g}(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\ &= \det\hat{g} \cdot \det(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g}) = g(1 + \mathrm{Tr}\,(\hat{g}^{-1}\delta\hat{g})) = \\ &= g(1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = g + g\cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\delta g = g \cdot g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{2.71}$$

$$\boxed{\delta S_\Lambda = -\frac{\Lambda}{2}\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.72}$$

2. Вклад $\sim \int d^4x \sqrt{-g}\, f(R)$

Проблема: R зависит от вторых производных g по x. Получим ли уравнения выше второго порядка?

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \varphi', \varphi'') \tag{2.73}$$

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} + \partial^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi''} \right)\delta\varphi = 0 \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} + \partial^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi''} = 0 \tag{2.75}$$

– начиная с второго члена входят производные высших порядков.

Но если φ'' входят в $\mathcal{L}$ в комбинации $\varphi\varphi''$, то:

$$\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi} = \varphi''; \; \partial\left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi'}\right) = 0; \; \partial^2\left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi''}\right) = \varphi'' \tag{2.76}$$

производных выше 2-го порядка не получается.
R зависит от $g''_{\mu\nu}$ именно так.

Можно показать, что $f(R)$-гравитация сводится к R-гравитации плюс некоторое скалярное поле. Поэтому достаточно взять $f(R) = R$.

$$S_R = -K\int d^4x\sqrt{-g}R = -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{2.77}$$

$$\delta S_R = \begin{array}{l} -K\int d^4x\delta(\sqrt{-g})R \\ -K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \end{array} \left| \begin{array}{l} = \delta S_1 \\ = \delta S_2 \\ = \delta S_3 \end{array} \right. \tag{2.78}$$

$$\boxed{\delta S_1 = -\frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, R\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.79}$$

$$\delta S_2 = -K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.80}$$

$\delta g^{\mu\nu} =?$

$$\delta(g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}) = 0 \;\Rightarrow\; g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu} \;|g^{\rho\lambda} \tag{2.81}$$

$$\delta^\rho_\nu \delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} \Rightarrow \tag{2.82}$$

$$\delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\lambda}\delta g_{\nu\lambda}g^{\mu\nu} \;|\; \rho \rightleftarrows \nu \tag{2.83}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\lambda}g^{\lambda\nu} \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned}\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\lambda\nu}\delta g_{\rho\lambda} =& \\ = +K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\rho\lambda}\delta g_{\rho\lambda}&\end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\boxed{\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}\, R^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.86}$$

$$\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{2.87}$$

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned}\delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \\ + \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\end{aligned} \tag{2.89}$$

$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – тензор, в отличие от $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$! (Почему? ★)

$$\begin{aligned}&\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) - \nabla_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) = \\ &= \partial_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \\ &- \partial_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \\ &= \delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \Rightarrow\end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}\delta S_3 &= -K\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ &= -K\int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ &= -K\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = \\ &= \Big\backslash\; \nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}A^\lambda) \;\bigstar \;\Big\backslash = \\ &= -K\int_\Omega d^4x\, \partial_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = 0\end{aligned} \tag{2.92}$$

– так как под интегралом полная дивергенция.

$$\boxed{\delta S_3 = 0} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}\delta S = \delta S_\Lambda + \delta S_R = \\ &= -\frac{\Lambda}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\ &- \frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}R\delta g_{\mu\nu} \\ &+ K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \\ = \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu} = 0\end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g^{\mu\nu}} \tag{2.95}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g_{\mu\nu}} \tag{2.96}$$

K пока неизвестна!

Тензор Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.97}$$

Поля материи, тензор энергии-импульса

$$S = S_\Lambda(g) + S_R(g) + S_m(u,g) \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}\delta S = \delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \\ + \delta S_m(u,g)|_{\delta g} + \delta S_m(u,g)|_{\delta u} = 0\end{aligned} \tag{2.99}$$

Вариации $\delta g_{\mu\nu}$ и δu независимы! $\Rightarrow$

Уравнения гравитационного поля:

$$\delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \delta S_m(u,g)|_{\delta g} = 0 \tag{2.100}$$

Уравнения полей материи:

$$\delta S_m(u,g)|_{\delta u} = 0 \tag{2.101}$$

Из вариации полного действия получаются и уравнения гравитационного поля, и уравнения полей материи!

$$S_m(u,g) = \int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m(u,g) \tag{2.102}$$

$$\delta S_m(u,g)|_{\delta g} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.103}$$

$T_{\mu\nu}$ – метрический тензор энергии-импульса полей материи (*симметричен!*).

Если формально написать:

$$\delta S_m(u,g)|_{\delta g} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \;\Rightarrow \tag{2.104}$$

$$\frac{1}{2}T^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} \ \Rightarrow \ T^{\mu\nu} = 2\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.105}$$

Откуда берется такое определение?

$$\delta S_m(u,g)|_{\delta g} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.106}$$

Пример. Скалярное поле

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2}\partial^\nu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) \tag{2.107}$$

$$S_{sc}(g,\phi) = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right) \tag{2.108}$$

$$\delta S_{sc}|_{\delta g} = \int d^4x\left[\delta\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\,\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right] =$$
$$= \int d^4x\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - V(\varphi)\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\sigma}g^{\sigma\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\times$$
$$\left[g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\,g^{\sigma\rho}\partial_\sigma\varphi\partial_\rho\varphi - V(\varphi)\right) - g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi\right]\delta g_{\mu\nu} \tag{2.109}$$

(2.103), (2.106) $\Rightarrow$

$$T^{\mu\nu} = g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{sc}(\varphi) \mid g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} \tag{2.110}$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - g_{\alpha\beta}\mathcal{L}(\varphi) \tag{2.111}$$

– обычное выражение тензора энергии-импульса скалярного поля, следующее из теоремы Нетер ★.

Уравнения гравитационного поля с учетом материи

$$\delta S|_{\delta g} = \delta S_\Lambda|_{\delta g} + \delta S_R|_{\delta g} + \delta S_m|_{\delta g} =$$
$$= \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} = 0 \tag{2.112}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{2.113}$$

Найдем константу $\frac{1}{2K}$ из нерелятивистского предела

Общее уравнение геодезической:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0 \tag{2.114}$$

$$\tau = s,\ u^\mu(s) = \frac{dx^\mu(s)}{ds} \tag{2.115}$$

Статический нерелятивистский предел движения частицы:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{2.116}$$

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1, \ \frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds} \ \Rightarrow \ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{00} = 0 \tag{2.117}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{2.118}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(\partial_0\gamma_{0\sigma} + \partial_0\gamma_{\sigma 0} - \partial_\sigma\gamma_{00}) = +\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} \tag{2.119}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} = -\partial_i\varphi \tag{2.120}$$

φ - грав. потенциал $\Rightarrow$

$$\gamma_{00} = 2\varphi \tag{2.121}$$

$$g_{00} = 1 + \gamma_{00} = 1 + 2\varphi \tag{2.122}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \tag{2.123}$$

Уравнение Пуассона для грав. потенциала:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{2.124}$$

Из (2.123):

$$\Delta g_{00} = 8\pi G\rho \tag{2.125}$$

Уравнение Эйнштейна без Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}T_{\mu\nu} \mid g^{\mu\nu} \tag{2.126}$$

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{1}{2K}T, \quad T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \ \Rightarrow \tag{2.127}$$

$$R = -\frac{1}{2K}T \ \Rightarrow \tag{2.128}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2K}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)} \tag{2.129}$$

Статический нерелятивистский предел:

$$R_{00} = \frac{1}{2K}\left(\rho - \frac{1}{2}\rho\right) = \frac{1}{4K}\rho \tag{2.130}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{2.131}$$

$$R_{00} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0} = \backslash\text{статика}\backslash = \partial_i\Gamma^i_{00} \tag{2.132}$$

$$R_{00} = \partial_i\left(\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00}\right) = \frac{1}{2}\partial_i\partial_i g_{00} = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \tag{2.133}$$

Подставляем в (2.130):

$$\Delta g_{00} = \frac{1}{2K}\rho \tag{2.134}$$

Сравнивая с (2.125):

$$\boxed{\frac{1}{2K} = 8\pi G} \tag{2.135}$$

Уравнение Эйнштейна с Λ-членом:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{2.136}$$