

## Лекция 8

Сечение аннигиляции частиц темной материи. Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов. Эпоха реионизации. Температурная история Вселенной. Фоновая метрика в конформном времени.

## Сечение аннигиляции частиц темной материи

Сначала найдем  $n_X(t_0)$  и  $\Omega_X$ , потом выразим из них  $\sigma v = \sigma_0 = \text{const}$ .

Условие замораживания ТМ против аннигиляции (7.47):

$$\tau(T_f) = \frac{1}{n_X(T_f)} \frac{1}{\langle \sigma_{ann}(T_f) v(T_f) \rangle} = \frac{1}{H(T_f)} \Rightarrow \quad (8.1)$$

$$n_X(T_f) = \frac{H(T_f)}{\sigma_{ann} v} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} \quad (8.2)$$

Настоящее время:

$$n_X(t_0) = \left( \frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right)^3 n_X(T_f) \quad (8.3)$$

$$s a^3 = \text{const} \Rightarrow s \sim \frac{1}{a^3} \Rightarrow \quad (8.4)$$

$$n_X(t_0) = \frac{s_0}{s(t_f)} n_X(T_f) \quad (8.5)$$

$$s_0 = \frac{4\pi}{90} (2T_\gamma^3 + \frac{7}{8} 2 \cdot 3 \cdot T_\nu^3) \approx 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3} \quad (8.6)$$

$$s(t_f) = g_*(t_f) \frac{4\pi^2}{90} T_f^3 \Rightarrow \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} n_X(t_0) &= \frac{s_0}{s(t_f)} \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} = \frac{M_{Pl}}{1.66 \sqrt{g_*(t_f)}} = \\ &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{s_0}{\sqrt{g_*(t_f)} T_f M_{Pl} \left( \frac{4\pi^2}{1.66 \cdot 90} \right)} = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \end{aligned} \quad \star (8.8)$$

$$n_X(t_0) = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \quad (8.9)$$

Найдем  $\Omega_X$ . Подставляя в (8.9)  $T_f$  из (7.59):

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right]} \Rightarrow \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \Omega_X &= 2 \cdot \frac{M_X n_X(t_0)}{\rho_c} = \sqrt{2 - \text{из } X + \bar{X}} = \\ &= \sqrt{s_0 = 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}; M_{Pl} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ};} \\ &\quad \rho_c = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{\Gamma}{\text{см}^2} \sqrt{\quad} = \\ &= \frac{3 \cdot 10^{-10}}{(\sigma_0 / \Gamma \text{эВ}^{-2}) \sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \star \end{aligned} \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) перепишем как уравнение для  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \frac{1}{\Omega_X} \times \frac{3 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[ \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \quad (8.12)$$

$\Omega_X = 0.26$  – известно.

$g_* = 10 \div 100$  – в зависимости от  $T_f$

Как же найти численную величину  $\sigma_0$ , если ни  $M_X$ , ни  $g_*$  точно не известны?

(8.12) решается методом итераций (4 итерации дают 6 значащих цифр):

$$\begin{aligned} M_X = 1 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.76 \div 2.5) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 100 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.82 \div 2.7) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 10 \text{ ТэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.88 \div 2.9) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Сечение очень слабо зависит от  $M_X$  и сравнимо со слабым сечением при энергиях  $\sim 100$  ГэВ:

$$\sigma_w \sim \alpha_w / M_W^2 \sim 10^{-7} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (8.14)$$

$$\sigma_0 \sim a^2 \sim \frac{1}{M_X^2} \Rightarrow M_X \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sim 10 \text{ ТэВ} \quad (8.15)$$

Тяжелая частица со слабым взаимодействием – WIMP.

В современную эпоху, для астрофизических  $n_X$ :

$$\tau_{ann} = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} \quad (8.16)$$

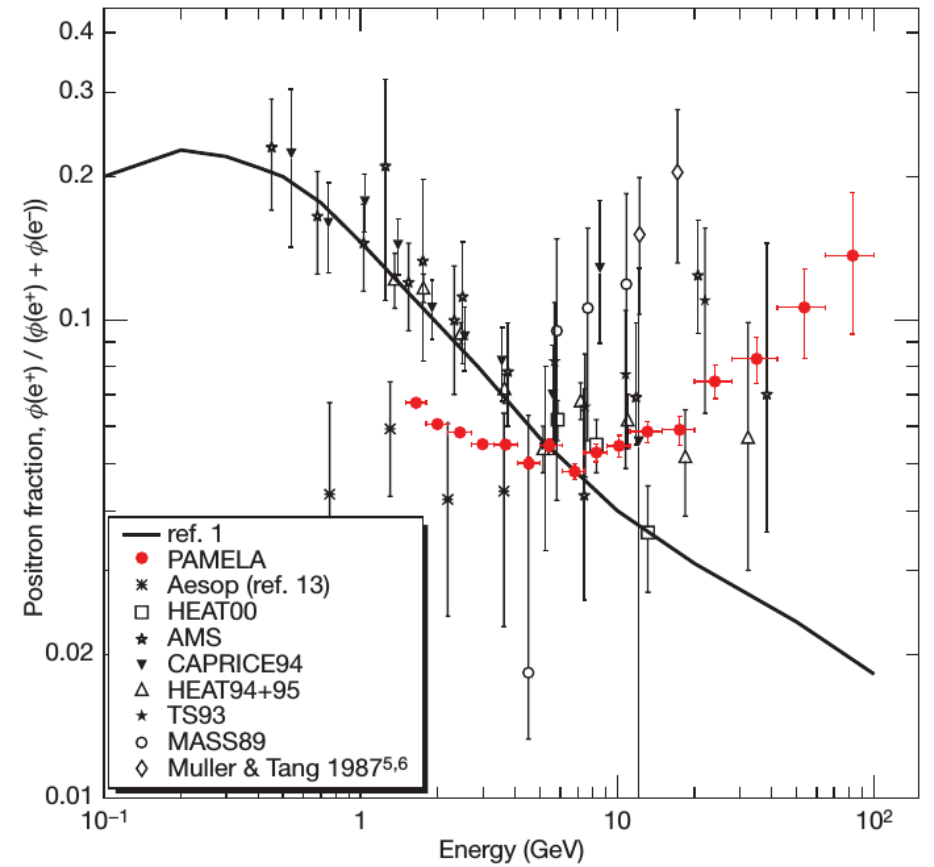
$$\langle \sigma_{ann} v \rangle = \sigma_0 \sim 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (8.17)$$

Это значение используется для вычисления сигнала аннигиляции темной материи в современных условиях.

$n_X$ , естественно, зависит от  $M_X$ .

$n_X$  зависит от того, куда смотрим: внутренние области Галактики, внешние области, каспы и т.д.

Сечения (8.17) на 2-3 порядка не хватает, чтобы объяснить наблюдаемый поток позитронов в космических лучах  $\Rightarrow$  нужен «буст-фактор»  $100 \div 1000$ .



**Figure 2 | PAMELA positron fraction with other experimental data and with secondary production model.** The positron fraction measured by the PAMELA experiment compared with other recent experimental data (see refs 5–7, 11–13, 30, and references within). The solid line shows a calculation<sup>1</sup> for pure secondary production of positrons during the propagation of cosmic rays in the Galaxy without reacceleration processes. Error bars show 1 s.d.; if not visible, they lie inside the data points.

Nature, V. 458 (2009), P.607-609

# Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов

## Температура рекомбинации

Энергия связи электрона в водороде 13.6 эВ.  
Температура рекомбинации масштаба 13 эВ?

- Предполагаем, что все ядра – протоны.
- Предполагаем, что рекомбинация идет равновесно.
- $T \sim 10$  эВ  $\Rightarrow p^+$  и  $e^-$  – нерелятивистские

$$n_e = g_e \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T}; \quad g_e = 2 \quad (8.18)$$

$$n_p = g_p \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T}; \quad g_p = 2 \quad (8.19)$$

$$n_H = g_H \left( \frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T}; \quad g_H = 4 \quad (8.20)$$

1. Температура рекомбинации определяется условием:

$$\boxed{n_p(T) = n_H(T)} \quad (8.21)$$

Это одно уравнение, но неизвестных 4:

$T, \mu_e, \mu_p, \mu_H$

Нужно еще 3 уравнения.

2. Сохранение  $n_B$ :

$$n_p + n_H = n_B = \eta_B n_\gamma(T) \quad (8.22)$$

$$\eta_B \approx 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.23)$$

$$n_\gamma(T) = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \Rightarrow \quad (8.24)$$

$$n_p + n_H = 6.1 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (8.25)$$

3. Химическое равновесие:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H \quad [p + e \leftrightarrow H + \gamma] \quad (8.26)$$

4. Электронейтральность (сохранение заряда)

$$n_p = n_e \quad (8.27)$$

Решение

$$n_p n_e = g_p g_e \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p + \mu_e - m_p - m_e)/T} \quad (8.28)$$

$$m_p + m_e = m_H + \Delta_H, \quad \Delta_H = 13.6 \text{ эВ} \quad (8.29)$$

(8.27), (8.26)  $\Rightarrow$

$$n_p^2 = g_p g_e \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T} e^{-\Delta_H/T} \quad (8.30)$$

Из (8.20):

$$e^{(\mu_H - m_H)/T} = \frac{n_H}{g_H \left( \frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2}} \Rightarrow \quad (8.31)$$

$$n_p^2 = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} \quad (8.32)$$

К форме Саха:

$$X_p = \frac{n_p}{n_B}, \quad X_H = \frac{n_H}{n_B}, \quad X_p + X_H = 1 \quad (8.33)$$

Из (8.32)

$$X_p^2 \left( \frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = X_H \frac{1}{n_B} = (1 - X_p) \frac{1}{n_B} \Rightarrow \quad (8.34)$$

$$X_p + n_B X_p^2 \left( \frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.35)$$

$$n_B = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (8.36)$$

$$X_p + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} X_p^2 \eta_B \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.37)$$

Малый множитель:

$$\eta_B \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} \sim 10^{-17} \Rightarrow \quad (8.38)$$

сразу видно, что  $T_r \ll \Delta_H$ .

$X_p = 0.5 \Rightarrow$

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.39)$$

Уравнение привести к виду  $x = \ln(Ax^\alpha)$ :

$$\frac{\Delta_H}{T} = \ln \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\zeta(3)\eta_B 2\sqrt{2}} \left( \frac{m_e}{\Delta_H} \right)^{3/2} \left( \frac{\Delta_H}{T} \right)^{3/2} \right] \quad (8.40)$$

В логарифмическом порядке (первая итерация):

$$T_{rec}^{(1)} = 0.37 \text{ эВ} \quad (8.41)$$

Точное решение (метод итераций)

$$\boxed{T_{rec} = 0.321 \text{ эВ}} \quad (8.42)$$

Учтены электроны и барионы, уже связанные в гелии:

$$\eta_B = 0.75 \times 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.43)$$

Когда?

Красное смещение:

$$T(t) = T_0 \frac{a_0}{a(t)} = T_0(z+1) \Rightarrow \quad (8.44)$$

$$z_{rec} = \frac{T}{T_0} - 1 \approx 1370 \quad (8.45)$$

Красное смещение РД-ДМ перехода

$$z \approx 3 \cdot 10^3 \Rightarrow \quad (8.46)$$

Рекомбинация происходит на ДМ- (пылевидной) стадии.

$$t = \frac{2}{3H} \quad (8.47)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho \quad (\text{общее уравнение Фридмана}) \quad (8.48)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{1}{6\pi G \rho_M(t_{rec})}} = \sqrt{\frac{M_{Pl}^2}{6\pi \rho_M(T_{rec})}} \quad (8.49)$$

т.к. материя доминирует.

$$\begin{aligned}\rho_M &= \rho_B + \rho_{CDM} = \frac{\rho_B + \rho_{CDM}}{\rho_c} \frac{\rho_c}{\rho_B} \cdot \rho_B = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} \rho_B = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p n_B(T_{rec}) = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B n_\gamma(T_{rec}) = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \Rightarrow\end{aligned}\quad (8.50)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_{rec}^3}} \approx 350 \text{ тыс. лет} \quad (8.51)$$

**Каковы были химические потенциалы  $\mu_p, \mu_H, \mu_e$  на момент рекомбинации?**

$$\begin{cases} g_p \left( \frac{m_p T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_H \left( \frac{m_H T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_{rec}} \\ g_p \left( \frac{m_p T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_e \left( \frac{m_e T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T_{rec}} \\ \mu_p + \mu_e = \mu_H \end{cases} \quad (8.52)$$

Решение ★:

$$\mu_p = m_p - \Delta_H + T \ln \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{m_e}{m_H} \right)^{3/2} \right] \quad (8.53)$$

$$\mu_e = m_e - \Delta_H + T \ln \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{m_p}{m_H} \right)^{3/2} \right] \quad (8.54)$$

$$\mu_H = m_H - \Delta_H + T \ln \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{m_e}{m_p} \right)^{3/2} \right] \quad (8.55)$$

Во всех случаях

$$\mu_i = m_i - \delta\mu_i; \quad \delta\mu_i \ll m_i \quad (8.56)$$

**Каков хим. потенциал атомов водорода сейчас?**

$$\begin{aligned}n_H &\approx \eta_B n_\gamma = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_0^3 = \\ &= g_H \left( \frac{m_H T_0}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_0} \quad (8.57)\end{aligned}$$

$$e^{(\mu_H - m_H)/T_0} = \frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T_0}{m_H} \right)^{3/2} \Rightarrow \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned}\mu_H &= m_H + T_0 \ln \left[ \frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T_0}{m_H} \right)^{3/2} \right] = \\ &= m_H - \delta\mu_H^0; \quad \delta\mu_H^0 = 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ ГэВ} \quad (8.59)\end{aligned}$$

## Длительность рекомбинации

Диапазон температур, когда  $\exp(\Delta_H/T)$  отличается от  $\exp(\Delta_H/T_{rec})$  в  $e$  раз:

$$\left| \frac{\Delta_H}{T \pm \Delta T} - \frac{\Delta_H}{T_r} \right| = 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_{rec}} \approx \frac{T_{rec}}{\Delta_H} = \frac{0.32}{13.6} \approx 0.02 \quad (8.60)$$

$$T = \frac{\text{const}}{a} \Rightarrow \frac{\Delta a}{a_{rec}} = \frac{\Delta T}{T_{rec}} = 0.02 \ll 1 \quad (8.61)$$

Время рекомбинации много меньше хаббловского времени.

## Последнее рассеяние фотонов (закалка фотонов)

Не то же самое, что рекомбинация – позже!

Томсоновское сечение рассеяния фотонов:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m_e^2} \approx 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \quad (8.62)$$

Время свободного пробега фотона по отношению к томсоновскому рассеянию:

$$\tau_\gamma = \frac{1}{\sigma_T n_e(T)} \quad (8.63)$$

Из (8.32):

$$\begin{aligned} n_e^2(T) &= n_p^2(T) = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} = \\ &= \sqrt{n_H} \cong \eta_B \cdot n_\gamma \text{ т.к. рекомбинация} \\ &\quad \text{практически завершена} \backslash = \\ &= \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 e^{-\Delta_H/T} \quad (8.64) \end{aligned}$$

Время последнего рассеяния определяется

$$\tau_\gamma(T_f) \simeq H^{-1}(T_f) \simeq t_f \quad (8.65)$$

$t_f$  мало отличается от  $t_{rec} = 350$  тыс. лет, поэтому для оценки  $T_f$  можно в правой части уравнения использовать  $t_{rec}$  вместо  $t_f$ :

$$\frac{1}{\sigma_T} \frac{1}{\left[ \left( \frac{m_e T_f}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 e^{-\Delta_H/T_f} \right]^{1/2}} = t_{rec} \quad (8.66)$$

$$e^{\Delta_H/T_f} = \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left( \frac{m_e T_f}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \quad (8.67)$$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} = \ln \left[ \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left( \frac{m_e T_f}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \right] \quad (8.68)$$

В п.ч.  $T_f \rightarrow T_{rec} \Rightarrow$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} \cong \ln \left[ \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left( \frac{m_e T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \right] \quad (8.69)$$

$$T_{rec} = 0.32 \text{ эВ} \quad (8.70)$$

$$\eta_B = 0.75 \cdot 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.71)$$

$$t_{rec} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ лет} \Rightarrow \quad (8.72)$$

$$\boxed{T_f = 0.27 \text{ эВ}} \quad (8.73)$$

Аналогично (8.51)

$$t_f = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_f^3}} \approx 460 \text{ тыс. лет} \quad (8.74)$$

$$z_f = \frac{0.27 \text{ эВ}}{2.73 \times 8.6 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}} = 1140 \approx 1100 \quad (8.75)$$

**Горизонт на момент последнего рассеяния**  
( $z \approx 1100$ )

Момент последнего рассеяния обычно отождествляют с рекомбинацией:  $f \rightarrow r$

Можно (довольно грубо) найти, считая, что Вселенная всегда была пылевидной:

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_r(t_r)} \quad (8.76)$$

Из уравнения Фридмана:

$$H_r^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M(t_r) \quad (8.77)$$

$$\rho_M(t_r) = \rho_{M,0} \left( \frac{a_0}{a_r} \right)^3 = \rho_{M,0} (1 + z_r)^3 \quad (8.78)$$

$$\rho_{M,0} = \rho_c \Omega_M \quad (8.79)$$

$$\begin{aligned} l_{H,r} &= \frac{2}{\sqrt{\frac{8\pi}{3} G \rho_c \Omega_M (1 + z_r)^3}} = \sqrt{\rho_c} = \frac{H_0^2}{\frac{8\pi}{3} G} = \\ &= \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}} \end{aligned} \quad (8.80)$$

$$\boxed{l_{H,r} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}}} \quad (8.81)$$

Сейчас этот размер растянут в  $a_0/a_r = 1 + z_r$  раз:

$$l_{H,r}(t_0) = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1 + z_r}} \quad (8.82)$$



Современный горизонт:

$$l_{H,0} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} =$$

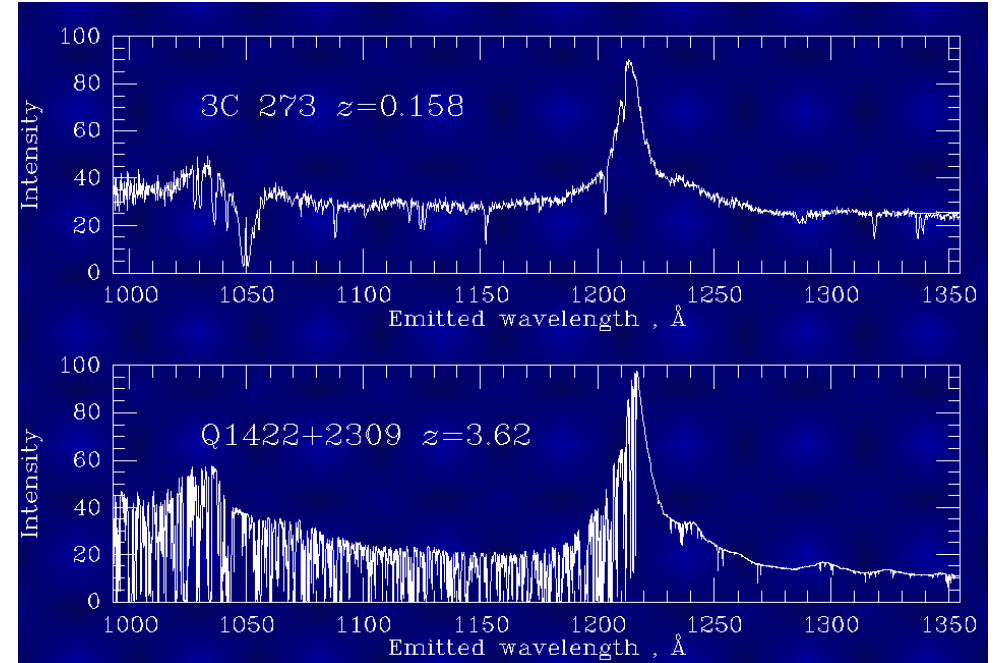
$$= a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a_0 \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \left[\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda H_0 t}\right)\right]^{2/3}} = \frac{2}{H_0} \times 1.8 \quad (8.83)$$

Это в  $\sim 30$  раз больше, чем  $l_{H,r}(t_0)$  – видимая часть Вселенной содержит  $\sim 3 \cdot 10^3$  причинно не связанных областей на момент рекомбинации.

Отчего же микроволновой фон однороден с точностью  $\sim 10^{-4}$ ? – «проблема горизонта».

## Эпоха реионизации

### Лайман-альфа-лес (Lyman-alpha forest) в спектрах квазаров



Основной пик –  $\text{Ly}_\alpha$

Линии поглощения - тоже  $\text{Ly}_\alpha$



- Ly $\alpha$ -линия поглощения сдвинутая разным красным смещением облаков водорода.

- Чем дальше квазар, тем гуще лес.

- При  $z > 6$  густота леса перестает расти. Почему?

Реионизация водорода (но не гелия),  
 $6 < z < 20$ ,  $150 \cdot 10^6 - 1000 \cdot 10^6$  лет.

Остаточная оптическая толщина  $\tau \simeq 0.09 \pm 0.03$

## Краткая история Вселенной (13.8 млрд. лет)

Событие	$T$	$z$	$t$
Горячий Большой взрыв	—	—	0
GUT-переход (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Бариогенезис (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Электрослабый переход	100 ГэВ	$10^{15}$	$10^{-11}$ сек
Закалка темной материи(?)	$0.05 \div 300$ ГэВ	$10^{11} \div 10^{15}$	$2 \cdot 10^{-12} \div 10^{-4}$ сек
Адронизация: конфайнмент кварков	170 МэВ	$7 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{-12} \div 10^{-5}$ сек
Закалка нейтрино	1.2 МэВ	$5 \cdot 10^9$	0.85 сек
Закалка нейтронов	0.8 МэВ	$3 \cdot 10^9$	2.5 сек
Нуклеосинтез	65 кэВ	$3 \cdot 10^9$	4.5 мин

Событие	$T$	$z$	$t$
РД $\rightarrow$ МД переход	1 эВ	3000	85 тыс. лет
Рекомбинация электронов	0.32 эВ	1370	350 тыс. лет
Последнее рассеяние фотонов	0.27 эВ	1140	460 тыс. лет
Реоинизация	$50 \div 15$ К°	$20 \div 6$	$150 \div 1000$ млн.лет
Начало эры ДеСиттера	$4.5$ К°	0.65	7.6 млрд.лет
Сейчас	$2.73$ К°	0.0	13.8 млрд.лет

## Фоновая метрика, конформное время.

$$d\eta = dt/a; \quad dt = ad\eta; \quad dt/d\eta = a \quad (8.84)$$

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - dx^i dx^i] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (8.85)$$

Перепишем уравнения в производных по конформному времени:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta} \frac{d}{dt} = a \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \quad (8.86)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} \quad (8.87)$$

Уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (8.88)$$

$(i, j)$ -компонента уравнений Эйнштейна ★

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi Gp \Rightarrow 2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp \quad (8.89)$$

Ковариантный закон сохранения энергии

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0 \quad (8.90)$$

Космологические решения  $a(\eta)$  ★:

$$\text{РД-стадия: } a(\eta) = \text{const} \cdot \eta; \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/2} \quad (8.91)$$

$$\text{ДМ-стадия: } a(\eta) = \text{const} \cdot \eta^2; \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/3} \quad (8.92)$$

$$\Lambda\text{-стадия: } a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}; \quad \eta = -\text{const} \cdot e^{-H_{dS}t}, \quad \eta < 0 \quad (8.93)$$

$$H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (8.94)$$

Коэффициенты в (8.91) и (8.92) – через  $a_0$  и измеримые величины

*РД-стадия* ( $T \lesssim 100 \text{ ГэВ}$ )

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}G\frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \quad (8.95)$$

Сохранение энтропии:

$$g_*a^3T^3 = g_*^0a_0^3T_0^3 \quad (8.96)$$

$$T^3 = \frac{g_*^0}{g_*} \frac{a_0^3}{a^3} T_0^3 \Rightarrow T = \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \frac{a_0}{a} T_0 \quad (8.97)$$

$$\rho_c \Omega_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*^0T_0^4 \Rightarrow T_0^4 = \frac{\Omega_{rad}\rho_c}{\frac{\pi^2}{30}g_*^0} \quad (8.98)$$

Подставляем (8.98) в (8.97), (8.97) в (8.95):

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{8\pi}{3}G\rho_c\right) \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right) \Omega_{rad} = \\ &= H_0^2 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right) \Omega_{rad} \quad (8.99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 \dot{a}} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \sqrt{\Omega_{rad}}} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0^2} \frac{a}{\sqrt{\Omega_{rad}}}
\end{aligned} \tag{8.100}$$

$$\eta = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \frac{a}{a_0} \tag{8.101}$$

ДМ-стадия (но не  $\Lambda$ )

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c \tag{8.102}$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M = \frac{8\pi}{3} G \rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \tag{8.103}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_M^0}{\rho_c} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow H^2 = H_0^2 \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{8.104}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \sqrt{\Omega_M} (a_0/a)^{3/2}} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \sqrt{\frac{a}{a_0}}
\end{aligned} \tag{8.105}$$

$$\eta^2 = \frac{a}{a_0} \frac{4}{a_0^2 H_0^2 \Omega_M} \tag{8.106}$$

**Конформные времена  $\eta_0, \eta_r, \eta_{eq}$  – через  $a_0$  и измеримые величины**

Уравнение Фридмана:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4} \tag{8.107}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \int_\infty^z -\frac{a_0}{(z+1)^2} dz = \int_\infty^z -\frac{dz}{a_0 H(z)} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4}}
\end{aligned} \tag{8.108}$$

Конформное время современной эпохи:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times \\ &\times \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + (1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times I(\Omega_M) \quad (8.109) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_M = 0.31, \quad \Omega_\Lambda = 0.69, \quad \Omega_{rad} = 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \\ I(\Omega_M) \approx 0.89 \quad (8.110) \end{aligned}$$

Конформное время последнего рассеяния (рекомбинации):

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{2} \int_{z_r}^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \mathcal{F} \left( \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) \quad (8.111) \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  считается:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left( \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} = \\ \left\langle \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} = 1 + z_{eq} \star \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \\ \mathcal{F} &= 0.017 \quad (8.112) \end{aligned}$$

Легко считается угол видимости горизонта рекомбинации:

$$\Delta\theta_r = \eta_r / \eta_0 = 0.019; \quad \Delta\theta_r = 1.1^\circ \quad (8.113)$$

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+z_{eq}}}; \quad \mathcal{F} = 0.0076 \quad (8.114)$$

$$\frac{\eta_r}{\eta_{eq}} = 2.3; \quad \frac{\eta_0}{\eta_{eq}} = 1.2 \cdot 10^2 \quad (8.115)$$

$\eta_r$  и  $\eta_{eq}$  близки, но не совпадают.

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}} (\sqrt{2}-1) \quad (8.116)$$

$$a_0 \eta_r = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \left( \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \right) \quad (8.117)$$

$$a_0 \eta_0 = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M); \quad I(\Omega_M) = 0.89 \quad (8.118)$$

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} (a_{eq} \eta_{eq}) = \frac{a_0}{a_{eq}} l_H^{eq} \quad (8.119)$$

– до каких размеров сейчас растянулся горизонт на момент перехода РД→ДМ. И т.д.

$$a_0 \eta_{eq} = 120 \text{ Мпк} \quad (8.120)$$

$$a_0 \eta_r = 510 \text{ Мпк} \quad (8.121)$$

$$a_0 \eta_0 = 14.1 \text{ Гпк} = 46.0 \text{ Млрд. св. лет} \quad (8.122)$$