

Лекция 11

Начальные условия за горизонтом для адиабатической моды. Гауссовы случайные поля и начальные условия для адиабатических возмущений. Стандартная космологическая модель. Динамика возмущений CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.

**Адиабатическая мода за горизонтом.
Начальные условия для адиабатической моды
– что это такое?**

За горизонтом возмущения существуют в виде константных мод $\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const}$, $\delta\rho/\rho = \text{const}$ и общая пространственно-временная картина, соответствующая одной *адиабатической* константной моде, на эвристическом уровне соответствует набору независимых однородных вселенных несколько различающихся по времени эволюции и потому имеющих разную температуру, или начавших развиваться в разное время.

Тогда для адиабатической моды для каждой независимой компоненты среды можно записать:

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv \rho'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.1)$$

$$\delta p_\lambda = p'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv p'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.2)$$

Функция $\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$ – одна для всех компонент λ , так как моды адиабатические.

В то же время, при фиксированном составе среды, ρ и p однозначно зависят от температуры \Rightarrow :

$$\delta\rho_\lambda = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.3)$$

$$\delta p_\lambda = \frac{\partial p_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.4)$$

Но:

$$\delta T(\mathbf{x}, \eta) = \frac{\partial T}{\partial \eta} \delta\eta \equiv \frac{\partial T}{\partial \eta} \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.5)$$

$\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$ и $\delta T(\mathbf{x}, \eta)$ однозначно связаны, поэтому определения (11.3,11.4) и (11.1,11.2) эквивалентны.

Формулы (11.3,11.4) можно считать определением адиабатической моды.

Совместимо ли определение (11.3,11.4) или (11.1,11.2) с уравнениями (10.131)–(10.135)?

Покажем, что Φ (а следовательно и все остальное) действительно выражается только через ε – при том, что уравнения записаны для отдельных компонент λ .

Используем (10.134) – сохранение ТЭИ, зависящее от λ :

$$(10.134): \delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)(k^2 v_\lambda + 3\Phi') = 0 \quad (11.6)$$

За горизонтом можно считать $k = 0$, остается:

$$\begin{aligned} & \delta\rho_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)3\Phi' = \\ & = \left\{ \delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \varepsilon; \rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \text{ ков. сохр. (8.90)} \right\} \\ & = -3(\rho_\lambda + p_\lambda) \left[\left(\frac{a'}{a} \varepsilon \right)' + \Phi' \right] = 0 \Rightarrow \quad (11.7) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi' = - \left(\frac{a'}{a} \varepsilon \right)'} \quad (11.8)$$

– Зависимости от λ нет!

Решение (11.8):

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = -\frac{a'}{a} \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (11.9)$$

$\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ важна, т.к., в действительности, и определяет константную моду за горизонтом.

Из ковариантного сохранения (8.90)

$$\rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \Rightarrow \quad (11.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} &= -\frac{1}{3} \frac{\rho'_\lambda}{(\rho_\lambda + p_\lambda)} = \left\langle \rho'_\lambda = \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon(\rho_\lambda + p_\lambda)} \Rightarrow \quad (11.11) \end{aligned}$$

ε в (11.9) сокращается! \Rightarrow

$$\zeta(\mathbf{k}) = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (11.12)$$

– так как мода адиабатическая

$$\boxed{\zeta(\mathbf{k}) = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}}} \quad (11.13)$$

– не зависит от времени, в то время, как слагаемые в п.ч. могут зависеть от времени!

Выразим Φ только через ζ .

Решаем уравнение (10.131)

$$(10.131): k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_\lambda \delta\rho_\lambda \quad (11.14)$$

- Для константной моды $k = 0$
- Подставляем $\delta\rho_\lambda = \rho_\lambda\varepsilon$
- Подставляем Φ из (11.9), Φ' из (11.8)
- Используем $\rho_{tot} = \frac{3}{8\pi G} \frac{a'^2}{a^4}$
- Используем $2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi G p_{tot}$

$$\boxed{2\frac{a'}{a}\varepsilon + \varepsilon' + \zeta = 0 \star} \quad (11.15)$$

Решение вариацией постоянных.

Общее решение при $\zeta = 0 \Rightarrow \varepsilon = C a^{-2}$

– падающая мода, должно быть отброшено $\Rightarrow \zeta \neq 0$

Ответ:

$$\varepsilon(\eta) = -\zeta \frac{1}{a^2(\eta)} \int_0^\eta a^2(\eta) d\eta \quad (11.16)$$

Нижний предел выбран исходя из $\varepsilon(\eta \rightarrow 0) = 0$, так как только в этом случае $\Phi = -\frac{a'}{a}\varepsilon - \zeta$ конечен в $\eta = 0$.

Уравнение (10.133) (пространственные компоненты линеаризованного уравнения Эйнштейна для скалярных мод) с (11.16) удовлетворяется автоматически \star .

Из (11.9):

$$\Phi = -\zeta \left(1 - \frac{a'}{a^3} \int_0^\eta a^2(\eta) d\eta \right) \quad (11.17)$$

Из (10.132) ищется потенциал скорости v_λ (и сама скорость). $\delta\rho_\lambda$ определяется из (11.12).

$\Rightarrow \zeta(\mathbf{k})$ полностью определяет адиабатическую моду за горизонтом.

Вместо ζ можно использовать (и часто используется) величину

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a}v_{tot}; \quad v_{tot} \equiv \frac{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda}{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (11.18)$$

Из (10.131), (10.132) и

$$\frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (\text{адиабатичность}) \quad (11.19)$$

следует ★

$$\zeta - \mathcal{R} = -\frac{k^2\Phi}{12\pi G a^2(\rho + p)_{tot}} \rightarrow 0 \quad \text{в пределе } k \rightarrow 0 \quad (11.20)$$

За горизонтом ζ и \mathcal{R} – одно и то же.

В качестве начального условия для адиабатических скалярных мод можно взять $\zeta_{(i)}(\mathbf{k})$ или $\mathcal{R}_{(i)}(\mathbf{k})$

Начальные условия для УР вещества за горизонтом

На РД-стадии, для главных УР мод за горизонтом (10.75) (поскольку УР моды доминируют)

$$\delta_{rad} = -2\Phi \quad (11.21)$$

$p_{tot} = \rho_{tot}/3 \Rightarrow$

$$\zeta = -\Phi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})} = -\Phi + \frac{1}{4}\delta = -\frac{3}{2}\Phi \Rightarrow \quad (11.22)$$

$$\Phi = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R}; \quad \delta_{rad} = \frac{4}{3}\mathcal{R} \quad (11.23)$$

Начальные условия для НР вещества

На РД стадии, не слишком задолго до РД→МД перехода имеется нерелятивистское вещество – В и CDM. Для НР вещества

$$\rho_M \propto 1/a^3 \Rightarrow \rho'_M = -3\rho_M \frac{a'}{a} \quad (11.24)$$

Для УР вещества

$$\rho_{rad} \propto 1/a^4 \Rightarrow \rho'_{rad} = -4\rho_{rad} \frac{a'}{a} \quad (11.25)$$

Отсюда

$$\delta_M = \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} = \frac{\rho'_M \varepsilon}{\rho_M} = -3\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (11.26)$$

$$\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho_{rad}} = \frac{\rho'_{rad} \varepsilon}{\rho_{rad}} = -4\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (11.27)$$

$$\delta_M = \frac{3}{4}\delta_{rad} = -\frac{3}{2}\Phi = \mathcal{R} \quad (11.28)$$

Эти соотношения выполняются для каждой компоненты в отдельности: В, CDM, γ ...

Итог:

$$\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\zeta(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.29)$$

$$\delta_{rad}(\mathbf{k}) = \frac{4}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.30)$$

$$\delta_M(\mathbf{k}) = \mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.31)$$

Начальные условия для мод постоянной кривизны

Для мод постоянной кривизны $\zeta_{tot} = \mathcal{R}_{tot} \equiv 0$ по определению.

Для каждой отдельной компоненты λ :

$$\zeta_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (11.32)$$

не зависит от времени (см. (11.12)).

Начальные условия для мод постоянной кривизны выражаются через ζ_λ :

$$S_{\lambda,\lambda'} = 3(\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda'}) = \frac{\delta_\lambda}{1+w_\lambda} - \frac{\delta_{\lambda'}}{1+w_{\lambda'}} \quad (11.33)$$

Обычно $\lambda' = \gamma$; $S_\lambda \equiv S_{\lambda,\gamma}$

$$S_\lambda = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad \lambda = B, CDM \quad (11.34)$$

Для УР материи (γ)

$$s_\gamma = g_\gamma \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (11.35)$$

$$n_\gamma = g_\gamma \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (11.36)$$

$$\rho_\gamma = g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (11.37)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (11.38)$$

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (11.39)$$

$$\frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = 4 \frac{\delta T}{T} \quad (11.40)$$

$$(11.41)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{3}{4}\delta_\gamma \quad (11.42)$$

Реальный интерес представляют:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(n_\lambda/s_\gamma)}{n_\lambda/s_\gamma} &= \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{3}{4}\delta_\gamma = \\ &= \backslash \lambda - \text{HP} \backslash = \frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda} - \frac{3}{4}\delta_\gamma = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma \Rightarrow \end{aligned} \quad (11.43)$$

$$S_\lambda = \frac{\delta(n_\lambda/s)}{n_\lambda/s} - \text{«Энтропийные моды»} \quad (11.44)$$

Гауссовы случайные поля

Распределение Гаусса

$$F(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(q - q_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (11.45)$$

q_0 – среднее, σ^2 – дисперсия.

$$\tilde{q} = aq + b \quad (11.46)$$

– снова Гаусс, $\tilde{q}_0 = aq_0 + b$, $\tilde{\sigma} = a\sigma$.

Для определения случайной величины нужен ансамбль событий (систем).

Обобщение на многомерный случай

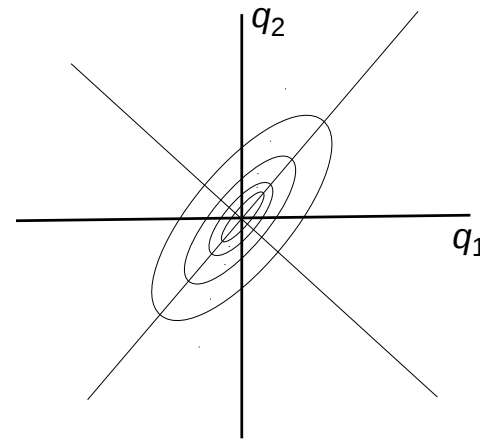
Гауссов набор случайных величин

$$F(q_1, \dots, q_N) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{1}{2} q_m M_{mn} q_n + L_n q_n \right] \quad (11.47)$$

M – положительно определенная симметричная матрица

$$\int F(q) d^n q = 1; \quad \mathcal{N} = (\det M)^{-1/2} (2\pi)^{-N/2} \quad (11.48)$$

$$\langle q_m \rangle = (M^{-1})_{mn} L_n \quad (11.49)$$



Если привести M_{mn} к главным осям, то получится просто произведение одномерных Гауссовых функций

Набор линейных функций от гауссовых случайных величин – тоже набор гауссовых случайных величин.

Рассматриваем случай $L_n = 0 \Rightarrow \langle q_m \rangle = 0$

Теорема Вика

Если q_n – гауссов набор случайных величин, то корреляторы нечетного числа величин равны нулю, а для четного числа величин

$$\langle q_p q_r q_s q_t \rangle = D_{pr} D_{st} + D_{ps} D_{rt} + D_{pt} D_{rs}; \quad \text{и т.д.} \quad (11.50)$$

где $D_{pr} = \langle q_p q_r \rangle$ и т.д. И обратно.

Смысл усреднения – *усреднение по ансамблю*

Случайное поле

Кубическая решетка со стороной L , шаг a .

$\varphi_i = \varphi(\mathbf{x}_i)$ – гауссов набор случайных величин \Rightarrow случайное поле на решетке.

- Гауссово случайное поле: предел $a \rightarrow 0$

Теорема Вика гауссовых для случайных полей

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_3)\varphi(\mathbf{x}_4) \rangle = D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)D(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \quad (11.51)$$

где

$$D(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \varphi(\mathbf{x}_i)\varphi(\mathbf{x}_j) \rangle \quad (11.52)$$

– двухточечные корреляторы – основной объект изучения теории случайных полей.

Однородное и изотропное случайное поле:

$$D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = D(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \quad (11.53)$$

Переходим к Фурье-образу

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}); \quad \varphi^*(-\mathbf{k}) = \varphi(\mathbf{k}) \quad (11.54)$$

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (11.55)$$

Будучи интегралом случайного поля, Фурье-образ случайного поля сам является случайным полем (в пространстве \mathbf{k}).

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{y}} D(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = \\ &= \langle \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{z} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int d^3\mathbf{z} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (11.56)$$

так как $P(\mathbf{k})$ зависит от $|\mathbf{k}|$, четна, действительна.

$$\langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.57)$$

$$P(k) = \int d^3\mathbf{z} e^{i\mathbf{k}\mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) \quad (11.58)$$

$P(k)$ – неотрицательна:

$$\varphi[f] = \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}, \quad f^*(\mathbf{k}) = f(-\mathbf{k}) \quad (11.59)$$

Очевидно: $\langle \varphi^2[f] \rangle \geq 0$ (усреднение по ансамблю ϕ !).

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2[f] \rangle &= \left\langle \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k} \cdot \int f(\mathbf{k}')\varphi(\mathbf{k}')d^3\mathbf{k}' \right\rangle = \\ &= \langle (11.57) \rangle = \int d^3\mathbf{k} |f(\mathbf{k})|^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \geq 0 \Rightarrow P(k) \geq 0. \end{aligned} \quad (11.60)$$

$P(k)$ – спектр мощности случайного поля.

$$\mathcal{P}(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} \quad (11.61)$$

– тоже называется спектром мощности. Смысл:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle &= \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} \langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \\ &= 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}(k) \end{aligned} \quad (11.62)$$

Важно: Согласно (11.57) $P(k)$ определяется усреднением по ансамблю, но согласно (11.58) $P(k)$ может быть приблизительно оценено усреднением по реализации, если гауссово случайное поле однородное и изотропное \Rightarrow байесовская вероятность.

Первичные адиабатические скалярные моды и наблюдения

- Наблюдения говорят о том, что в начальных возмущениях доминируют адиабатические скалярные моды.
- Тензорные моды и скалярные моды постоянной кривизны не обнаружены, есть только ограничения сверху.

Адиабатические скалярные моды самые существенные – *стандартная космологическая модель* (СКМ) включает пока только их.

Начальные данные для адиабатической скалярной моды – константные моды за горизонтом – характеризуются функцией $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ ($\zeta(\mathbf{k})$), через которую вычисляются относительные флуктуации плотности и возмущения гравитационного потенциала, (11.29)–(11.31).

$\mathcal{R}(\mathbf{k})$ – в СКМ однородное и изотропное случайное гауссово поле.

Однозначно описывается двухточечным коррелятором:

$$\langle \mathcal{R}(\mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P_{\mathcal{R}}(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.63)$$

Задача наблюдений – найти одну скалярную функцию $P_{\mathcal{R}}(k)$ – спектр мощности константной моды адиабатических скалярных возмущений.

Смысл усреднения $\langle \mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle$ –
усреднение по ансамблю вселенных.

Оценка $P_{\mathcal{R}}(k)$ через двухточечный коррелятор:

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} D(|\mathbf{x}|) \quad (11.64)$$

Так как мы имеем дело только с конечным фрагментом Вселенной внутри горизонта, то оценка дает лишь конечную точность, в предположении однородности и изотропии.

Остаточная неопределенность –
космическая неопределенность, cosmic variance

Если некоторая теория предсказывает определенную $P_{\mathcal{R}}(k)$, то предсказание это невозможно будет проверить с любой наперед заданной точностью. Точность измерений здесь ни при чем. См. картинку.

Вместо $P_{\mathcal{R}}(k)$ обычно используют

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \Rightarrow \quad (11.65)$$

$$\langle \mathcal{R}^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \quad (11.66)$$

Иногда используется обозначение: $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$

Простейшее предположение - плоский спектр:

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \text{const} \quad (11.67)$$

– *спектр Гаррисона-Зельдовича.*

Как реальный спектр мощности отличается от спектра Гаррисона-Зельдовича?

Наблюдения показывают, что начальный спектр флуктуаций близок к плоскому.

Степенная параметризация (s – scalar):

$$P_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1} \quad (11.68)$$

$$\frac{k_*}{a_0} = \frac{1}{500 \text{ Мпк}} = 0.002 \text{ Мпк}^{-1} \quad (11.69)$$

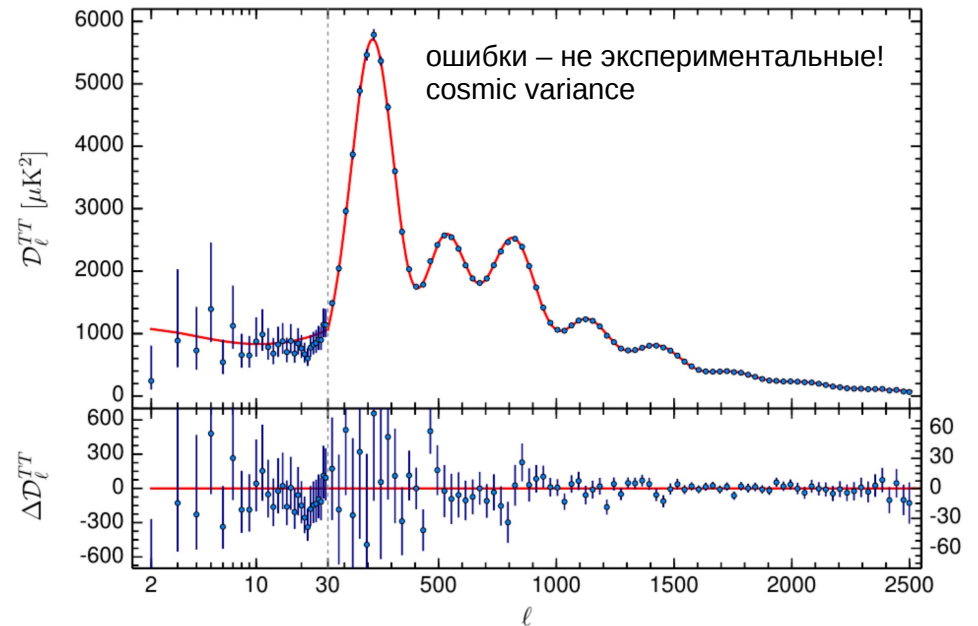
Современные значения:

$$n_s = 0.9667 \pm 0.0040 \quad (11.70)$$

$$A_{\mathcal{R}} = 2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9} \quad (11.71)$$

Относительная амплитуда возмущений

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{A_{\mathcal{R}}} \approx 4.5 \cdot 10^{-5} \quad (11.72)$$



6 параметров СКМ

Физическая плотность барионов	$\Omega_B h^2$	0.02230 ± 0.00014
Физическая плотность темной материи	$\Omega_{CDM} h^2$	0.1188 ± 0.00010
Возраст	t_0	$(13.799 \pm 0.021) \cdot 10^9$ лет
Скалярный спектральный индекс	n_s	0.9667 ± 0.0040
Амплитуда флуктуаций кривизны	$A_{\mathcal{R}}, \Delta_{\mathcal{R}}^2$	$2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9}$
Оптическая толщина реионизации	τ	0.066 ± 0.012
Приведенная постоянная Хаббла*	h	0.6774 ± 0.0046

*Постоянная Хаббла не входит в число 6 параметров!

Первичные моды постоянной кривизны и наблюдения

Аналогично адиабатическим модам:
 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$

Дополнительно, могут быть корреляции с адиабатической модой, которые задаются параметром

$$\beta = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}\mathcal{P}_{\mathcal{S}}}}, \quad \langle \mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{S}(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{RS}}(k) \quad (11.73)$$

Оценки для $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$ зависят от предположений о β :

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.07, \quad \beta = 0 \quad (11.74)$$

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.004, \quad \beta = 1 \quad (11.75)$$

Моды постоянной кривизны малы.

В СКМ $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k) = 0$.

Первичные тензорные моды и наблюдения

Тензорные моды до сих пор (ноябрь 2018) не обнаружены, поэтому можно только предполагать, что они образуют гауссовы случайные поля, причем одинаковые, но независимые для разных компонент поляризации:

$$\langle h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k}) h_{(i)}^{(B)}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{1}{2} \delta_{AB} \frac{P_T(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.76)$$

Предполагается спектр, близкий к плоскому:

$$\mathcal{P}_T = A_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T-1}, \quad n_T \approx 1 \quad (11.77)$$

$$\sum_A \langle [h_i^{(A)}(\mathbf{x})]^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(\mathbf{k}) \quad (11.78)$$

Отношение тензорных и скалярных мод (PLANCK-2015)

$$r = \frac{A_T}{A_{\mathcal{R}}} < 0.067, \quad 95\% \quad (11.79)$$

Очень важная величина, так как позволяет различать разные модели инфляции.

В СКМ $r = 0$.

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.

Важна в двух отношениях:

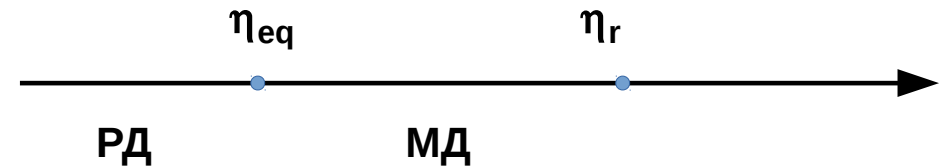
- Определяет структуру анизотропии реликтового микроволнового фона
- Формирует начальные условия для последующего формирования структур – галактик и т.д.

Вплоть до рекомбинации барион-фотонная компонента среды $B\gamma$ остается релятивистской, в том смысле, что

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_r) \cong 0.85 \quad (11.80)$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_{eq}) \cong 0.30 \quad (11.81)$$

$B\gamma$ рассматривается как единая среда.



Длинноволновые адиабатические моды CDM

Входят под горизонт между η_{eq} и η_r

Современная длина волн больше $2\pi a_0 \eta_{eq} = 750$ Мпк (см. (8.120)).

Нерелятивистская CDM доминирует, осцилляций в компоненте CDM нет, возмущения CDM растут как масштабный фактор, но никогда не входят в нелинейный режим ($\delta < 0.03$,

см. (10.119))

Однако в среде $B\gamma$ осцилляции продолжают вплоть до рекомбинации

Адиабатические моды, входящие под горизонт на РД-стадии

Уже известно: Релятивистская компонента на РД-стадии осциллирует с фиксированной фазой (10.81)

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[\cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] \quad (11.82)$$

$$\Phi_{(i)} = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \quad (11.83)$$

Осцилляции $B\gamma$ продолжают до рекомбинации.

- Существенно новое явление: Потенциал главной УР осциллирующей компоненты $\Phi(\eta)$ индуцирует возмущения темной материи, которые уже на РД-стадии логарифмически растут во времени.

- Релятивистская $B\gamma$ -материя осциллирует до самой рекомбинации, и остаточных возмущений $\sqrt{R} \sim 5 \cdot 10^{-5}$ не хватило бы для перехода в нелинейный режим и формирования структур.

- После рекомбинации барионная материя сваливается в потенциальные ямы, сформированные CDM еще до рекомбинации, и только благодаря этому возникают структуры.

- Изучаем возмущения CDM, индуцированные потенциалом (10.81) (или (11.82))

Возмущения темной материи на РД-стадии

Потенциалы считаем заданными уравнениями (10.81) (или (11.82)).

Покомпонентные уравнения ковариантного сохранения ЭИ (10.139), (10.140):

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1 + w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1 + w_\lambda)\Phi' \quad (11.84)$$

$$[(1 + w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1 - 3w_\lambda)(1 + w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2 \delta_\lambda = -(1 + w_\lambda)\Phi \quad (11.85)$$

$$\lambda = CDM \Rightarrow w_\lambda = u_{s,\lambda}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 3\Phi' \quad (11.86)$$

$$v'_{CDM} + \frac{1}{\eta} v_{CDM} = -\Phi \quad (11.87)$$

Из (11.87), методом вариации постоянных:

$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} \eta \Phi(\eta) d\eta \quad (11.88)$$

η_0 – неопределенная постоянная.

Решение расходится в нуле при всех $\eta_0 \neq 0 \Rightarrow \eta_0 = 0$. Следовательно конечное решение есть

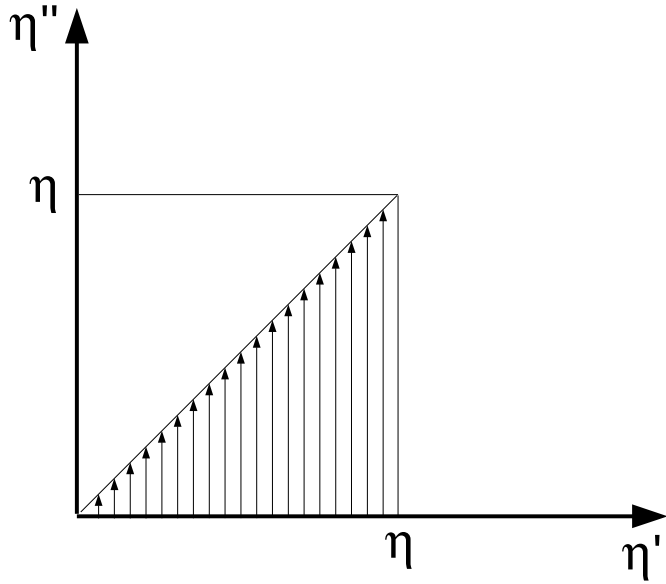
$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \eta \Phi(\eta) d\eta \quad (11.89)$$

Из (11.86) сразу получается:

$$\delta_{CDM}(\eta) = 3\Phi(\eta) + C - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta'' \Phi(\eta'') d\eta'' \quad (11.90)$$

$$\eta = 0 \Rightarrow C = -3\Phi_{(i)} + \delta_{CDM(i)} \Rightarrow \quad (11.91)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^\eta \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta'' \Phi(\eta'') d\eta'' \end{aligned} \quad (11.92)$$



$$\begin{aligned} \int_0^\eta d\eta' \int_0^{\eta'} d\eta'' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') &= \int_0^\eta d\eta'' \int_{\eta''}^\eta d\eta' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') = \\ \int_0^\eta d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \int_{\eta''}^\eta \frac{d\eta'}{\eta'} &= \int_0^\eta d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left(\frac{\eta}{\eta''} \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (11.93)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^\eta d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left(\frac{\eta}{\eta''} \right) \end{aligned} \quad (11.94)$$

Интеграл сходится и считается, для мод глубоко под акустическим горизонтом ($u_s k \eta \gg 1$) получается ★:

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM(i)} - 9\Phi_{(i)} \left[\ln(u_s k \eta) + \mathbf{C} - \frac{2}{3} \right] \quad (11.95)$$

$\mathbf{C} = 0.577 \dots$ – постоянная Эйлера.

Из (11.29), (11.31) следует $\delta_{CDM(i)} = -\frac{3}{2}\Phi_{(i)} \Rightarrow$

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left[\ln \left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \quad (11.96)$$

Есть логарифмический рост возмущения плотности CDM , скорость которого определяется амплитудами потенциалов $9\Phi_{(i)}$

Важны потенциалы CDM , в которые потом сваливаются обычное вещество:

Из (10.131)

$$k^2 \Phi + 3 \frac{a'}{a} \Phi' + 3 \frac{a'^2}{a^2} \Phi = -4\pi G a^2 \delta \rho_{CDM} \quad (11.97)$$

В пределе $u_s k \eta \gg 1$ остается только член $k^2 \Phi \Rightarrow$

$$\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G \frac{a^2(\eta)}{k^2} \rho_{CDM}(\eta) \delta_{CDM} \quad (11.98)$$

– падает немного медленнее, чем $1/a(\eta)$.

На РД-стадии $\Phi_{CDM}(\eta)$ мал по сравнению с релятивистским $\Phi(\eta)$ из-за малости ρ_{CDM} по сравнению с ρ_{tot} .

Но вклад CDM становится главным при переходе на МД-стадию.