

## Лекция 12

Возмущения темной материи и барион-фотонной компоненты на МД-стадии, до рекомбинации. Анизотропия реликтового излучения.

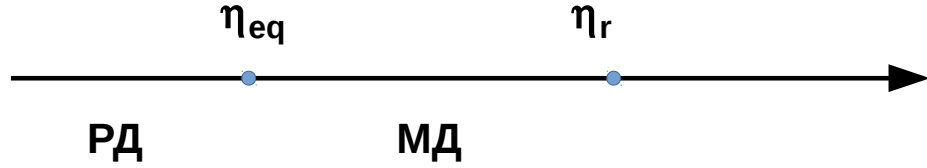
Уже на РД-стадии есть логарифмический рост возмущения плотности  $CDM$

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left[ \ln \left( \frac{k\eta}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \quad (12.1)$$

Потенциал  $CDM$  падает немного медленнее, чем  $1/a(\eta)$ :

$$\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G \frac{a^2(\eta)}{k^2} \rho_{CDM}(\eta) \delta_{CDM} \quad (12.2)$$

Возмущения темной материи на МД-стадии



Так как  $CDM$  является доминирующей компонентой на МД-стадии после  $\eta_{eq}$ , то заранее ясно, что нужно ожидать роста  $\delta_{CDM}$  пропорционально  $a(\eta)$  на фоне постоянных потенциалов  $\Phi_{CDM}(\eta)$ , как это предсказывает упрощенная однокомпонентная модель адиабатических возмущений, см. (10.97) и (10.114).

Наивная оценка:

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \delta_{CDM}(\eta_{eq}) \frac{a(\eta)}{a_{eq}} = \\ &= -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \left[ \ln \left( \frac{k\eta_{eq}}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \approx \\ &\approx -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \ln(0.6k\eta_{eq}) \quad (12.3) \end{aligned}$$

Более точная оценка:

$$\delta_{CDM}(\eta) \approx -\frac{27}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (12.4)$$

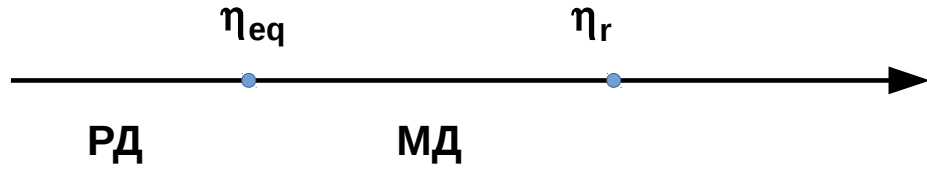
Решения не совсем сшиваются – есть переходная область в районе  $\eta_{eq}$  («ступенька»).

Из (12.2):

$$\begin{aligned} \Phi_{CDM}(\eta) &= \frac{27}{2} \Phi_{(i)} 4\pi G \rho_{CDM} \frac{a^2}{k^2} \frac{a}{a_{eq}} \ln(0.2k\eta_{eq}) = \\ &= \left\langle \rho_{CDM} = \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \rho_{CDM}^0 = \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \Omega_{CDM} \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \right\rangle = \\ &= \frac{81}{4} \Phi_{(i)} \frac{a_0^2}{k^2} \Omega_{CDM} H_0^2 (1 + z_{eq}) \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (12.5) \end{aligned}$$

– не зависит от времени.

Возмущения барион-фотонной компоненты  $B\gamma$  на МД-стадии до рекомбинации



• Продолжаются осцилляции, но на фоне растущего возмущения CDM-компоненты.

• Единство  $B\gamma$  (приближение тесной связи):

$$v_\gamma \approx v_B \equiv v_{B\gamma} \quad (12.6)$$

• Для адиабатической моды:

$$\delta_B = 3 \frac{\delta T}{T}, \quad \delta_\gamma = 4 \frac{\delta T}{T} \Rightarrow \delta_B = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (12.7)$$

• Из-за того, что барионы нерелятивистские, переноса энергии от фотонов к барионам нет, поэтому ковариантное сохранение для барионов и фотонов выполняется отдельно.

•  $B\gamma$  – субдоминантная компонента (CDM - доминантная).

С использованием потенциала (12.5) (или какого-то похожего, более точного), уравнений ковариантного сохранения и Эйнштейна для возмущений, ищется  $\delta_\gamma$ .

Можно считать численно, можно приближенно аналитически (метод типа ВКБ).

Результат (ВКБ):

$$R_B \equiv \frac{3\rho_B(\eta)}{4\rho_\gamma(\eta)} \propto a(\eta) \propto \eta^2 \quad (12.8)$$

$$R_B(\eta_{eq}) \approx 0.2; \quad R_B(\eta_r) \approx 0.6 \quad (12.9)$$

$$u_s^2(\eta) = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\delta \rho_\gamma / 3}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_B} = \frac{1}{3[1 + R_B(\eta)]} \quad (12.10)$$

$u_s \neq 1/\sqrt{3}$ , но меняется не очень сильно.

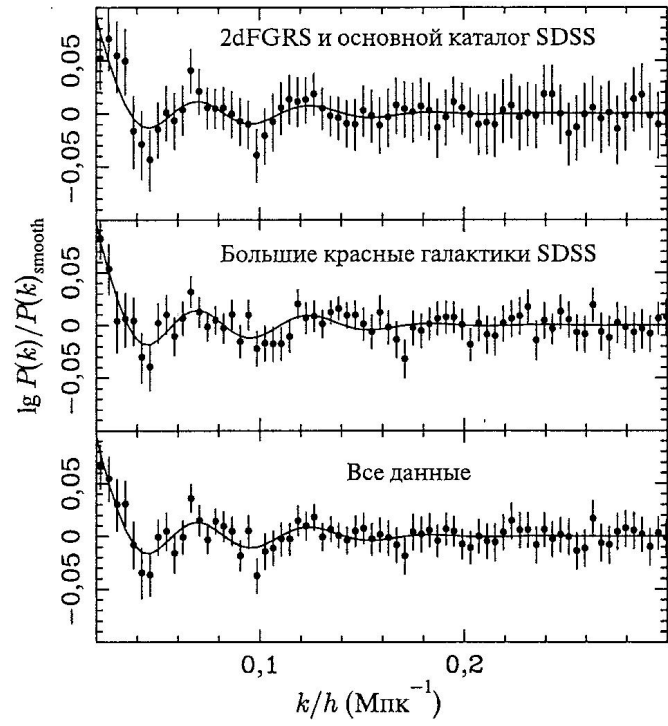
$$\begin{aligned} \delta_\gamma(\eta) = \Phi_i \times \\ \times \left[ -324 \cdot (1 + R_B) I(\Omega_M)^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1 + z_{eq}) \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{6}{(1 + R_B)^{1/4}} \cos \left( k \int_0^\eta u_s(\eta') d\eta' \right) \right] \quad (12.11) \end{aligned}$$

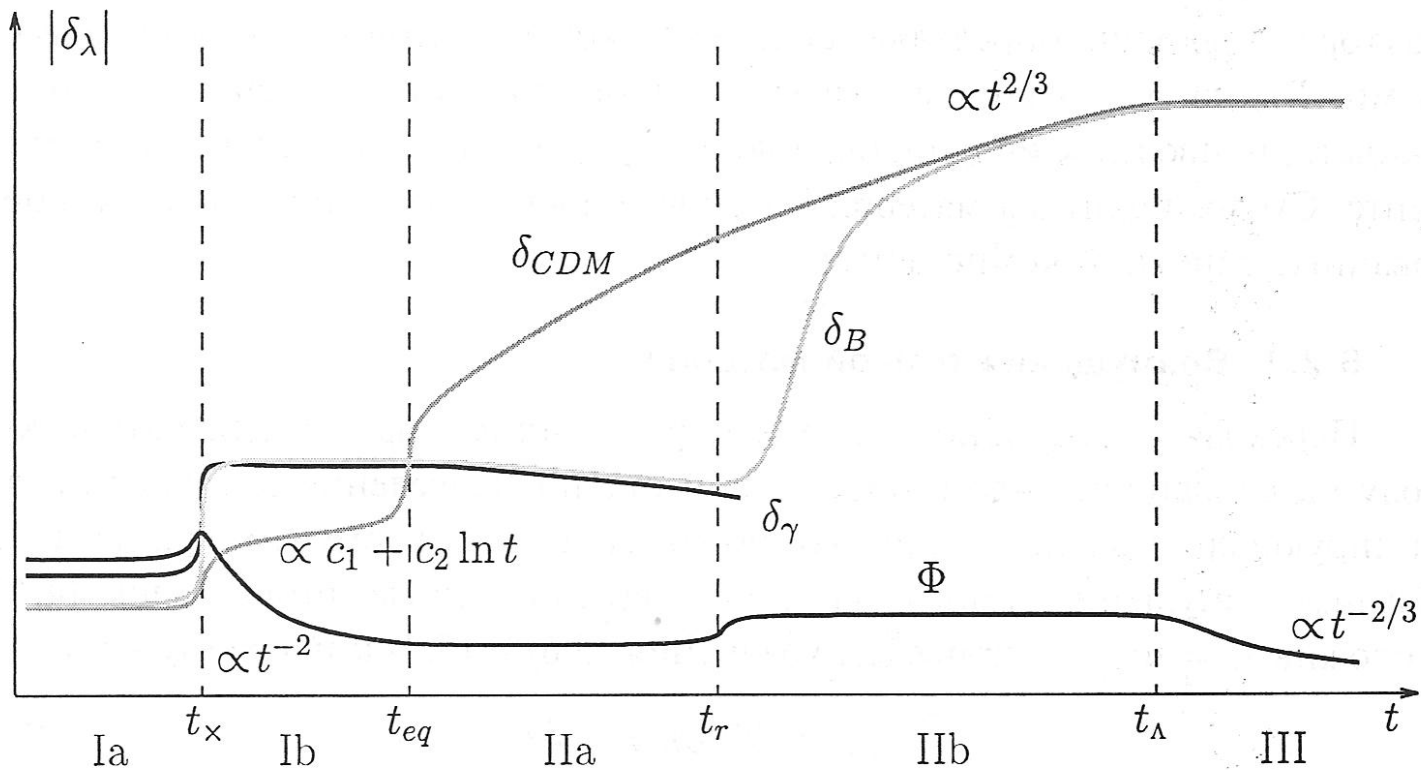
где (см. (8.109))

$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} \approx 0.89 \quad (12.12)$$

Осцилляции  $B\gamma$ -материи до момента рекомбинации влияют на

- анизотропию микроволнового фона
- распределение барионной материи – *барионные осцилляции*





**Рис. 6.1.** Схематическое изображение эволюции линейных скалярных возмущений в адиабатической моде с фиксированным конформным импульсом  $k$ , входящих под горизонт на РД-стадии. Осцилляции не изображены.  $t_x$  — момент входа под горизонт. Поведение вблизи характерных времен ( $t_x, t_{eq}, t_r, t_\Lambda$ ) показано условно. Масштаб по осям не соблюден. I — РД-стадия, доминируют возмущения релятивистской компоненты (раздел 4.2); Ia — до входа под горизонт моды не эволюционируют, их значения удовлетворяют соотношениям (5.22); Ib — вблизи входа под горизонт возмущение релятивистского вещества индуцирует логарифмически растущее возмущение CDM, формула (6.11); II — МД-стадия, доминируют возмущения CDM (раздел 4.3) с начальными данными для этой стадии, соответствующими формуле (6.11); IIa — возмущения барион-фотонной компоненты — звуковые волны — осциллируют согласно (6.36), кроме того, CDM-возмущения индуцируют возмущения барион-фотонной компоненты, формула (6.35); IIb — барионы отщеплены, их возмущения догоняют возмущения CDM, формулы (7.19), (7.18); III — ΛД-стадия, рост возмущений прекращается (раздел 4.4)

## Анизотропия температуры реликтового излучения

Средняя температура реликтового микроволнового фона (СМВ, Cosmic Microwave Background)

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ К}$$

Есть два типа анизотропии:

- Диполь  $\delta T/T \sim 10^{-3}$  – эффект Доплера соответствующий движению со скоростью  $v = 369 \pm 2$  км/сек относительно сопутствующей системы в направлении созвездия Гидры. Часть амплитуды может иметь космологическое происхождение, но много меньше наблюдаемого значения.
- Более высокие мультиполи космологического происхождения  $\delta T/T \sim 5 \times 10^{-5}$  – основа количественной космологии (но не единственно, что важно).

Дипольная компонента  $l = 1$  вычитается.

Анизотропия температуры:

$$\delta T_0(\mathbf{n}) = T(\mathbf{n}) - T_0 \quad (12.13)$$

$$\frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (12.14)$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sin^{|m|} \theta \frac{d^{|m|} P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^{|m|}} e^{im\varphi} \quad (12.15)$$

$$a_{l,m}^* = (-1)^m a_{l,-m} \quad (\text{вещественность}) \quad (12.16)$$

$$a_{lm} = \int d\mathbf{n} \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \quad (12.17)$$

$Y_{lm}$  – неоднородности масштаба  $\pi/l$

- Коэффициенты  $a_{lm}$  линейно определяются через начальные возмущения  $\mathcal{R}$  и др.  $\Rightarrow$
- Если начальные возмущения – гауссовы случайные поля, то и  $a_{lm}$  – набор гауссовых случайных величин.
- Если Вселенная совершенно изотропна и флуктуации случайны, то  $a_{lm}$  не должны коррелировать при различных  $l, m$
- Рассматриваем ансамбль вселенных, таких как наша (!)
- Тогда, усредняя по ансамблю

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (12.18)$$

- Имея одну вселенную измерить  $C_l$  невозможно.
- Но для больших  $l$  есть много гармоник  $m = -l, \dots, +l$ , поэтому можно найти среднее  $C_l$  по набору, и можно даже проверить гауссов характер флуктуаций.

$$\langle C_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \quad (12.19)$$

Несмотря на то, что ансамбль вселенных нам недоступен, каую-то оценку  $C_l$  получить можно.

Коэффициенты  $a_{lm}$  зависят от ориентации системы координат, в которой они вычисляются.

• Корректно ли определение (12.19)?

Величины  $C_l$  – не зависят от системы координат:

$$\Theta_0(\mathbf{n}) \equiv \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} \quad (12.20)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 = \\ &= \sum_{m=-l}^{+l} \int d\mathbf{n}_1 \Theta_0(\mathbf{n}_1) Y_{lm}(\mathbf{n}_1) \int d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_2) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\ &= \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\ &= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle = \\ &= \frac{2l+1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.21) \end{aligned}$$

$$C_l = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.22)$$

Точного значения  $C_l$ , какое дало бы усреднение по ансамблю, не получим!

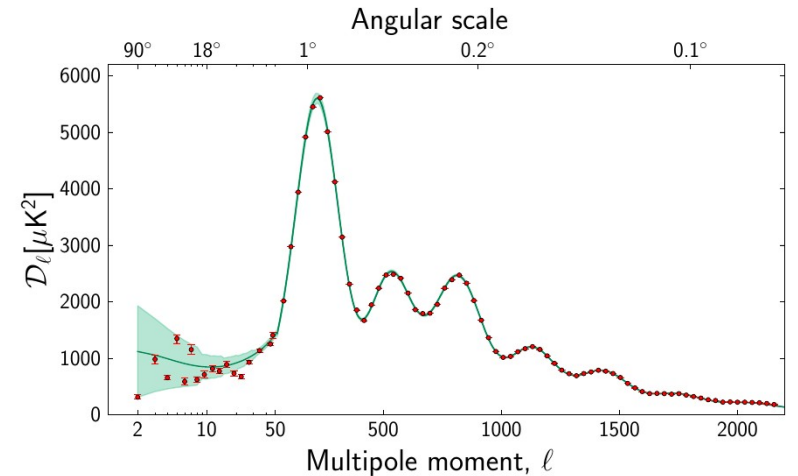
Какова ошибка (стандартное отклонение)  $\delta C_l = ?$

$$\begin{aligned} \sigma^2 C_l &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 \left( \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 (\chi_{2l+1}^2) \langle |a_{lm}| \rangle^2 = \\ &= \frac{1}{(2l+1)^2} 2(2l+1) C_l^2 = \frac{2C_l^2}{2l+1} \Rightarrow \quad (12.23) \end{aligned}$$

$$\delta C_l \equiv \sqrt{\sigma^2 C_l} = \frac{C_l}{\sqrt{l + \frac{1}{2}}} \quad (12.24)$$

$\delta C_l$  – космическая неопределенность, cosmic variance.

- Предсказания величины коэффициентов  $C_l$  не могут быть проверены с точностью, выше  $\delta C_L \Rightarrow$
- Космологические параметры не могут быть определены со сколь угодно высокой точностью



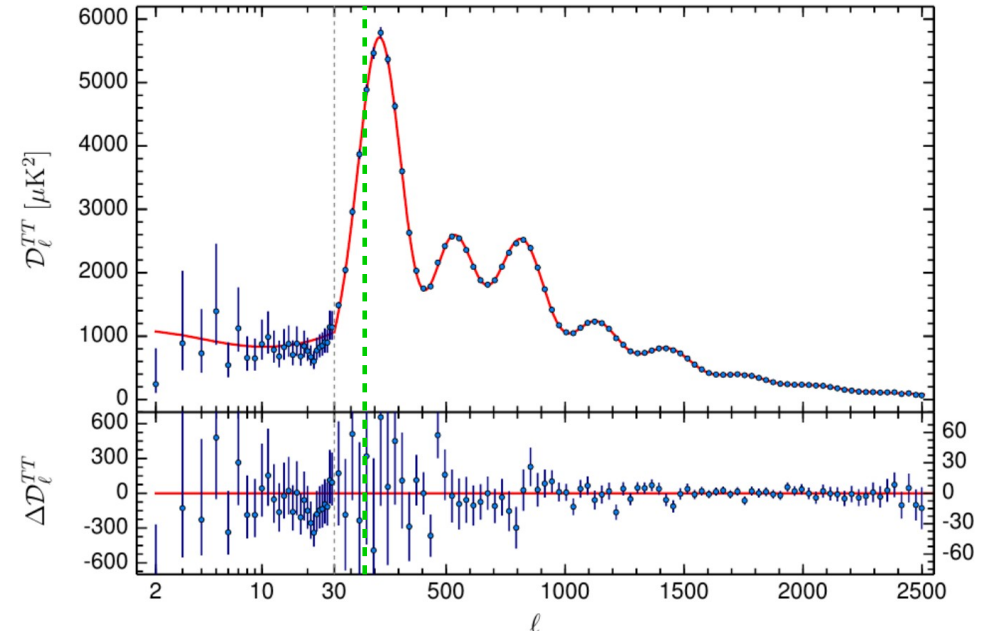
Выразим  $\langle \delta T^2 \rangle$  через коэффициенты  $C_l$ .

Двухточечная корреляционная функция (усреднение по ансамблю вселенных):

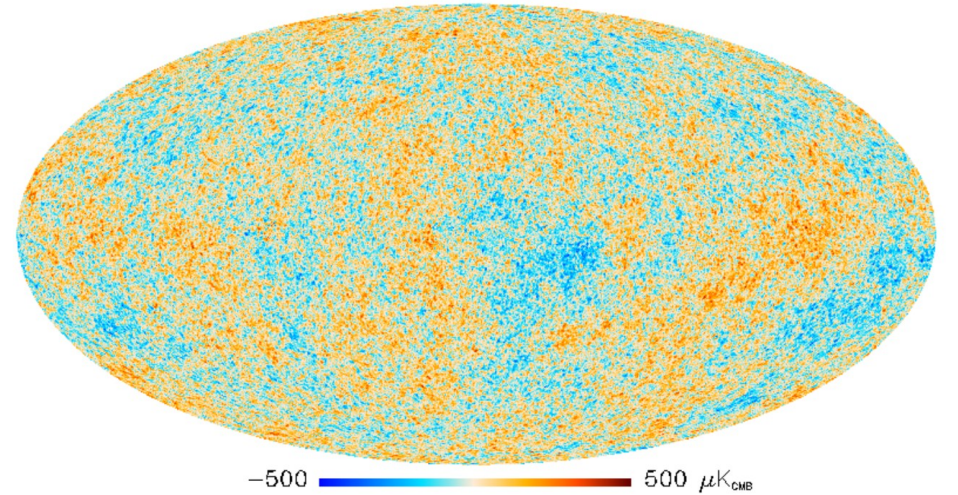
$$\begin{aligned}
 \langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0(\mathbf{n}_2) \rangle &= \langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0^*(\mathbf{n}_2) \rangle = \\
 &= T_0^2 \left\langle \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} a_{l_1 m_1} Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} a_{l_2 m_2}^* Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{n}_2) = \\
 &= \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle = C_l \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \langle a_{l m} a_{l m}^* \rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\
 &= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} C_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \delta T_0^2(\mathbf{n}) \rangle &= \langle P_l(1) = 1 \rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \approx \langle \text{большие } l \rangle \approx \\
 &\approx T_0^2 \int_0^{\infty} \frac{l+1/2}{2\pi} C_l l \frac{1}{l} dl \cong \int_0^{\infty} T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l d(\ln l) \quad (12.26)
 \end{aligned}$$

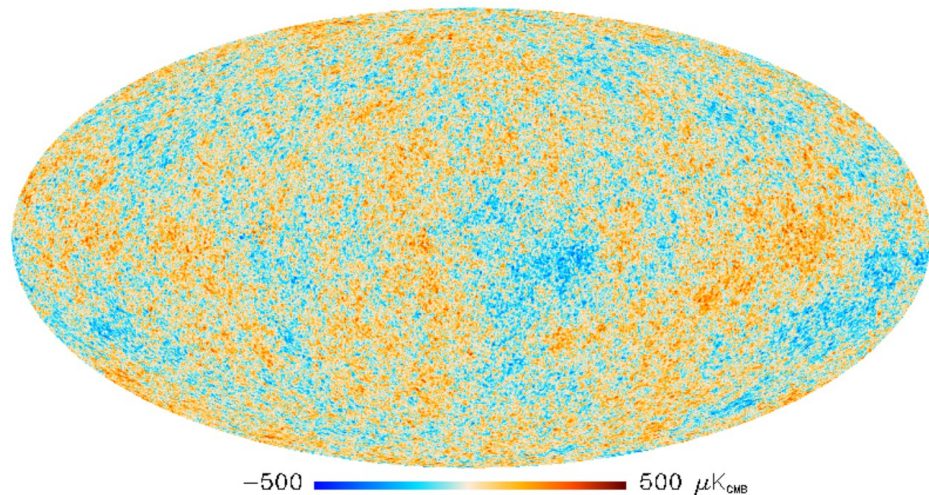
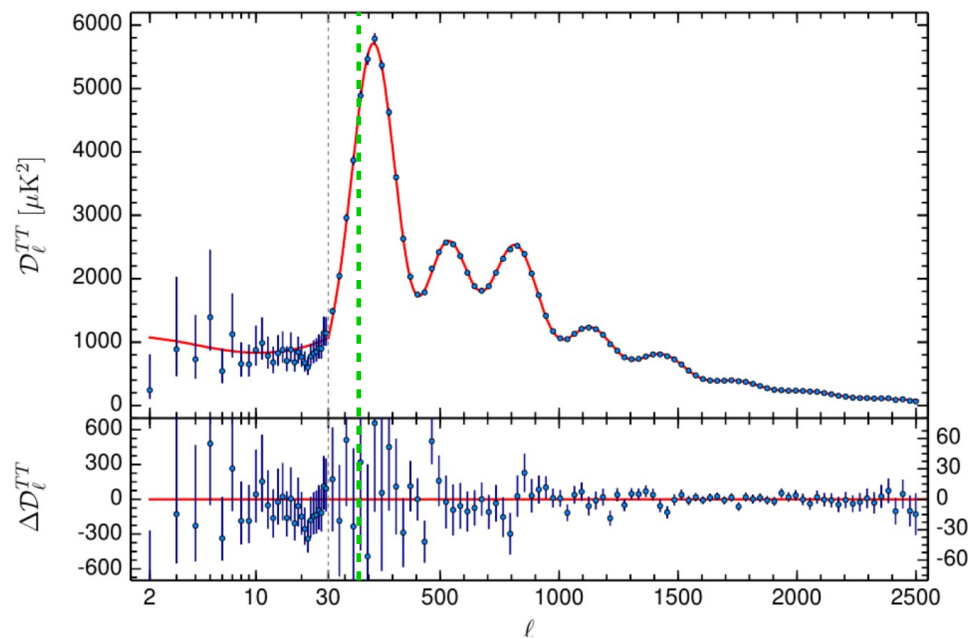
$$\boxed{\mathcal{D}_l \equiv T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l} \quad (12.27)$$



$$\mathcal{D}_l^{TT} \equiv \mathcal{D}_l$$







## Структура углового спектра анизотропии температуры СМВ – качественно

- Адиабатические моды, вошедшие под горизонт после рекомбинации никогда не осциллировали и на момент рекомбинации пребывали в константной моде

⇒

На масштабах больше горизонта событий на момент рекомбинации ожидается спектр флуктуаций, близкий плоскому спектру Гаррисона-Зельдовича.

- Моды, вошедшие под горизонт до рекомбинации, осциллировали с фиксированной начальной фазой, причем частота пропорциональна  $k$

⇒

к поверхности последнего рассеяния придут с разными фазами и будет картина осцилляций в зависимости от  $l$

- Граница между режимами:

Видимый размер горизонта рекомбинации  $1.1^\circ$

⇒

$l \approx 160 \pm$  некоторая переходная область.

- При больших  $k$  имеет место затухание осцилляций

⇒

Должны быть механизмы затухания, и они есть (см. далее).

## Механизмы генерации анизотропии температуры СМВ

Поверхность последнего рассеяния имеет конечную толщину (продолжительность), но считаем ее равной нулю –

приближение мгновенного отщепления фотонов.

• Вопрос: Как влияют возмущения метрики на частоту фотонов при распространении от места излучения до места приема?

• Решим уравнения движения для фотонов и проследим за 0-компонентой импульса, которая связана с частотой.

Плоская метрика с возмущениями

$$ds^2 = a^2 \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (12.28)$$

По причине конформной инвариантности ЭМ поля (см. (3.97) и далее) геодезические фотонов можно вычислять в конформноплоской метрике с возмущениями  $\gamma_{\mu\nu}$ .

Уравнение геодезической в конформной метрике  $\gamma_{\mu\nu}$ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (12.29)$$

$\lambda$  – произвольный параметр.

Касательный вектор («импульс»)

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Rightarrow \quad (12.30)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \quad (12.31)$$

Получим уравнения для  $P^\mu$  как функций конформного времени (избавимся от  $\lambda$ ).

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = \frac{d\eta}{d\lambda} \frac{dP^\mu}{d\eta} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dP^\mu}{d\eta} = P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} \Rightarrow \quad (12.32)$$

$$P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \Rightarrow \quad (12.33)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0 \Rightarrow \quad (12.34)$$

0-компонента:

$$\boxed{\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^0 \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0} \quad (12.35)$$

1. Скалярные возмущения метрики, Ньютонова калибровка

(9.135), (9.140):

$$h_{00} = 2\Phi, \quad h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij} \quad (12.36)$$

Элементарно считаются ★:

$$\gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}h'_{00}, \quad \gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \quad \gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}h'_{ij} \Rightarrow \quad (12.37)$$

$$\gamma_{00}^0 = \Phi', \quad \gamma_{0i}^0 = \partial_i \Phi, \quad \gamma_{ij}^0 = -\Phi'\delta_{ij} \quad (12.38)$$

Из (12.35) ★

$$\frac{dP^0}{d\eta} + 2P^0 \frac{P^i}{P^0} \partial_i \Phi = 0 \quad (12.39)$$

$P^i/P^0 = n^i$  – единичный вектор вдоль направления движения (почему? ★)  $\Rightarrow$

$$\frac{dP^0}{d\eta} = -2P_0 \mathbf{n} \nabla \Phi = 2\Phi' P^0 - 2(\Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi) P^0 \quad (12.40)$$

$$(\Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi) = \frac{d\Phi(\eta, \mathbf{x})}{d\eta} \quad (12.41)$$

$$\frac{dP^0}{d\eta} = 2 \left( \Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) \cdot P^0 \quad (12.42)$$

Общее решение:

$$\ln P^0(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} 2 \left( \Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) d\eta \quad (12.43)$$

$\eta_0$  – некоторая константа (не нужна).

Как изменится от  $\eta'$  до  $\eta''$ :

$$\ln \left( \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} \right) = \int_{\eta'}^{\eta''} 2 \left( \Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) d\eta \quad (12.44)$$

$$\ln \left( \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} \right) \cong \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} - 1 = \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} \Rightarrow \quad (12.45)$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = 2 \int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta - 2[\Phi(\eta'') - \Phi(\eta')] \quad (12.46)$$

Как изменяется  $P^0$  нашли.

## Связь частоты с $P^0$

Фотон испущен элементом среды с (конформной) скоростью  $U^\mu$ , конформной частотой  $\Omega$  в системе покоя среды.

Работаем в конформно-Ньютоновой системе координат,  $\gamma_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$

Для скалярных возмущений в линейном порядке

$$U^0 = 1 - \Phi, \quad U^i = v^i \quad (12.47)$$

$$U_0 = 1 + \Phi, \quad U_i = -v^i \quad (12.48)$$

[ср. (9.57), (9.58) для возмущения скоростей.]

Можно локально выбрать координаты так, что будет  $\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , а в качестве  $\lambda$  взять время в этой с.к.

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \tilde{P}^0 \\ \tilde{U}_\mu &= (1, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega = \tilde{U}_0 \tilde{P}^0 \Rightarrow \quad (12.49)$$

Общековариантное выражение для частоты (скаляр: частота в той системе, где среда, испустившая фотон, неподвижна):

$$\Omega = U_\mu P^\mu \quad (12.50)$$

Подставляем (12.48) в (12.50)

$$\begin{aligned} \Omega &= (1 + \Phi)P^0 - v_i P^i = \left\langle n^i = \frac{P^i}{P^0} \Rightarrow P^i = n^i P^0 \right\rangle = \\ &= (1 + \Phi)P^0 - v_i n^i P^0 = (1 + \Phi - \mathbf{v}\mathbf{n})P^0 \quad (12.51) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega(\eta') = [1 + \Phi(\eta') - \mathbf{nv}(\eta')]P^0(\eta')} \quad (12.52)$$

Совершенно аналогичным образом, для приема фотона в момент  $\eta''$  наблюдателем со скоростью  $\mathbf{v}(\eta'')$

$$\Omega(\eta'') = [1 + \Phi(\eta'') - \mathbf{nv}(\eta'')]P^0(\eta'') \quad (12.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\mathbf{n}, \eta'') - \Omega(\mathbf{n}, \eta')}{\Omega(\mathbf{n}, \eta')} &\cong \text{\textbackslash до первого порядка \textbackslash} \cong \\ &\cong \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} + \Phi(\eta'') - \Phi(\eta') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') = \\ &= \text{\textbackslash (12.46) \textbackslash} = \\ &= 2 \int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta + \Phi(\eta') - \Phi(\eta'') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') \end{aligned} \quad (12.54)$$

- Сдвиг конформной частоты пропорционален самой частоте  $\Rightarrow$
- Форма спектра не меняется  $\Rightarrow$
- Наблюдается планковский спектр, с температурой, зависящей от направления

В момент рекомбинации были флуктуации температуры, обусловленные флуктуацией плотности  $B\gamma$ -среды:

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \Rightarrow \quad (12.55)$$

$$\delta_\gamma = \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \frac{4\delta T}{T} = \frac{4\delta\omega}{\omega} \Rightarrow \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{4}\delta_\gamma \quad (12.56)$$

К этой величине величине добавится (12.54).

Окончательно:

$$\frac{\delta T}{T}(\eta_0) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + [\Phi(\eta_r) - \Phi(\eta_0)] + \quad (12.57)$$

$$+ 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + \quad (12.58)$$

$$+ \mathbf{nv}(\eta_r) - \mathbf{nv}(\eta_0) \quad (12.59)$$

- (12.57) – эффект Сакса-Вольфа (флуктуация температуры + флуктуация гравитационного потенциала)
- (12.58) – интегральный эффект Сакса-Вольфа (фотон падает в один потенциал, а выбирается из другого) – следствие нелинейной эволюции возмущений, есть корреляции с крупными структурами – скоплениями галактик
- (12.59) – эффект Доплера

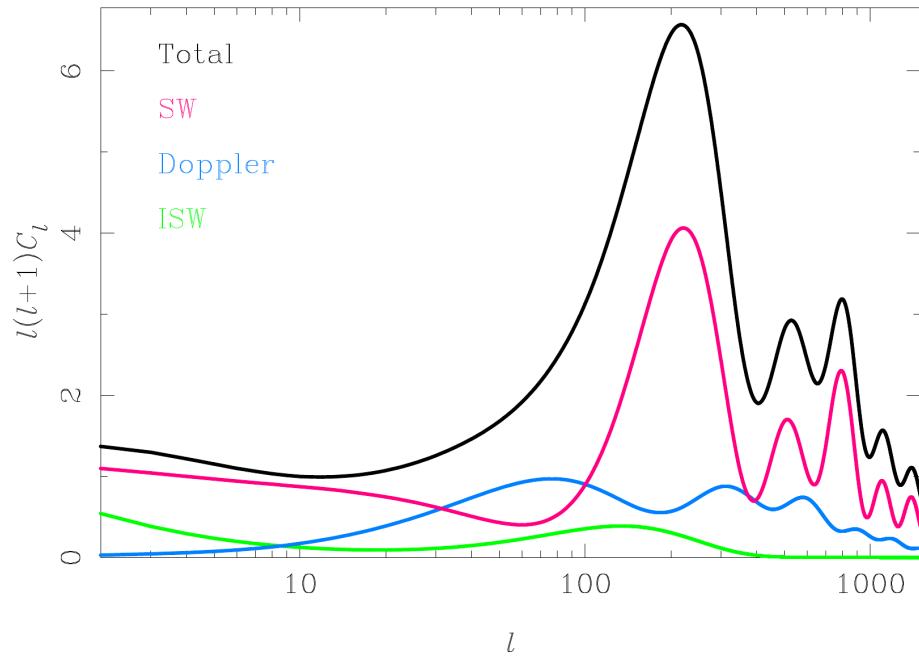
Вклад  $\mathbf{nv}(\eta_0)$  (диполь) вычитается, вклад  $\Phi(\eta_0)$  одинаков для всех направлений (монополь):

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) + \quad (12.60)$$

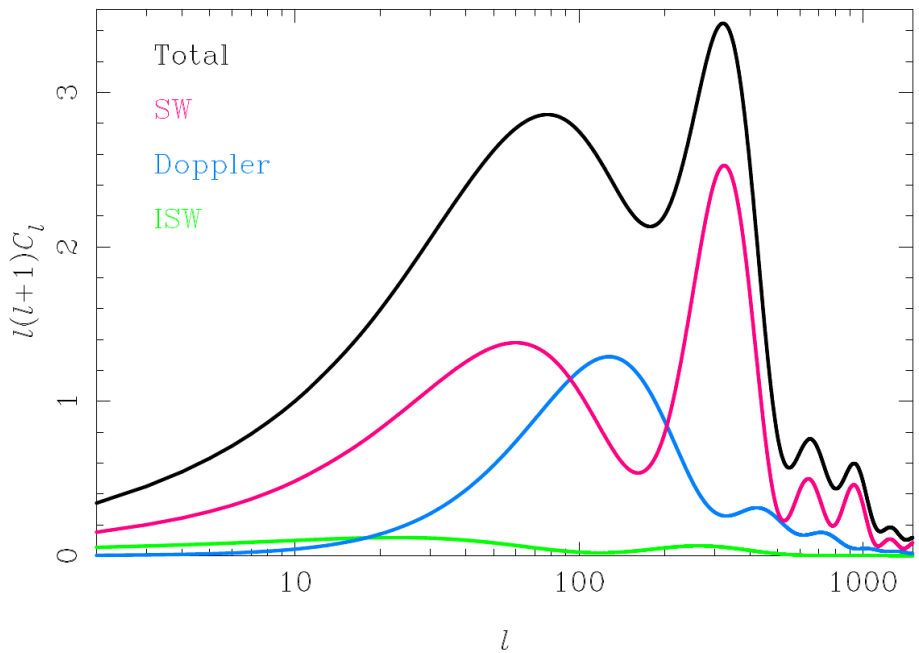
$$+ 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + \quad (12.61)$$

$$+ \mathbf{nv}(\eta_r) \quad (12.62)$$

Адиабатические моды:

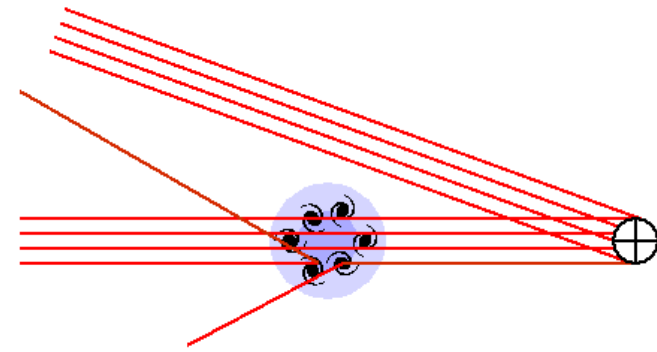


Моды постоянной кривизны:



Затухание, демпфирование и другие более тонкие эффекты:

- Конечная толщина последней поверхности рассеяния  $\Rightarrow$  размывание анизотропии на малых масштабах.
- Рассеяние в эпоху реионизации  $\Rightarrow$  понижение контраста при всех масштабах.
- Эффект Силка (затухание Силка) – немонолитность среды  $B\gamma$  вблизи поверхности рассеяния, транспортировка фотонов без изменения энергии  $\Rightarrow$  затухание осцилляций на малых масштабах.
- Линзирование – смазывает картинку на малых масштабах.
- Эффект Сюняева-Зельдовича (подогрев излучения быстрыми электронами).



## 2. Тензорные возмущения метрики

Легко считается:

$$\gamma_{ij}^0 = -h'_{ij}/2 \Rightarrow \quad (12.63)$$

$$\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^0 \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = \frac{dP^0}{d\eta} - \frac{h'_{ij}}{2} n^i n^j P^0 = 0 \Rightarrow \quad (12.64)$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = \frac{1}{2} \int_{\eta'}^{\eta''} n^i h'_{ij} n^j \quad (12.65)$$

С тензорными модами не связаны вариации скорости среды, т.е. надо считать  $U^0 = 1, U^i = 0 \Rightarrow$

Измеряемая частота

$$\Omega(\eta'') = P^0(\eta'') \Rightarrow \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta P^0}{P^0} \Rightarrow \quad (12.66)$$

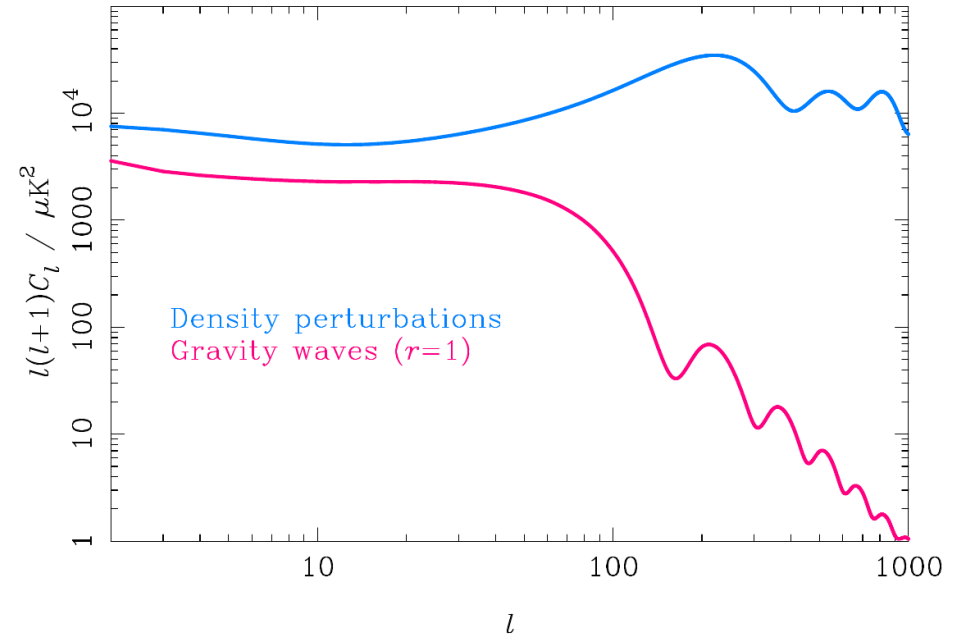
$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{2} \int_{\eta'}^{\eta''} n^i h'_{ij} n^j \quad (12.67)$$

– тензорный вариант интегрального эффекта Сакса-Вольфа.

Тензорные моды после входа под горизонт падают как  $1/a \Rightarrow$

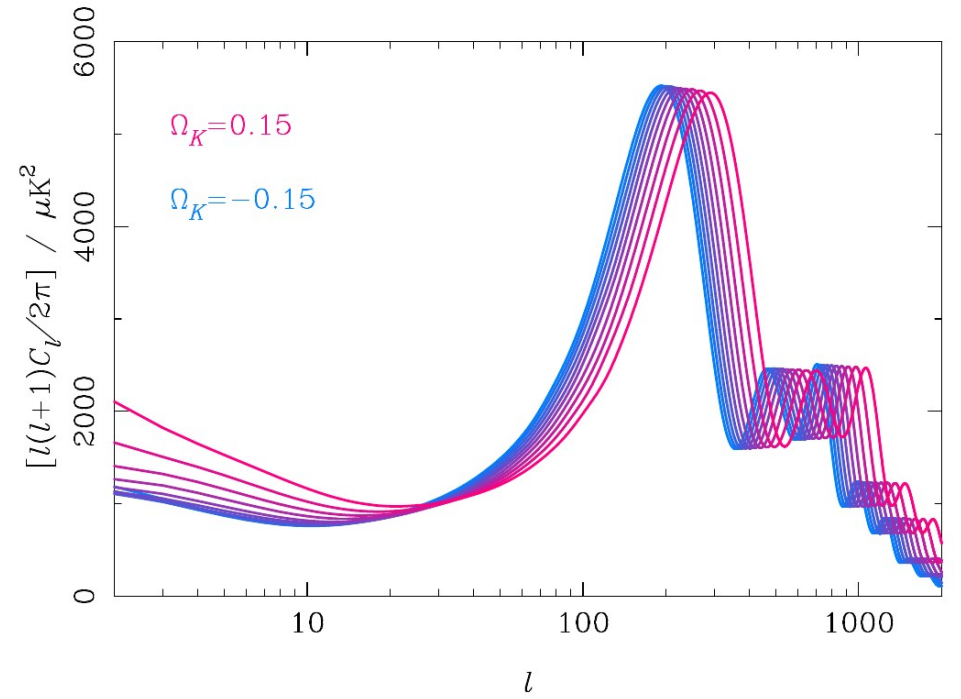
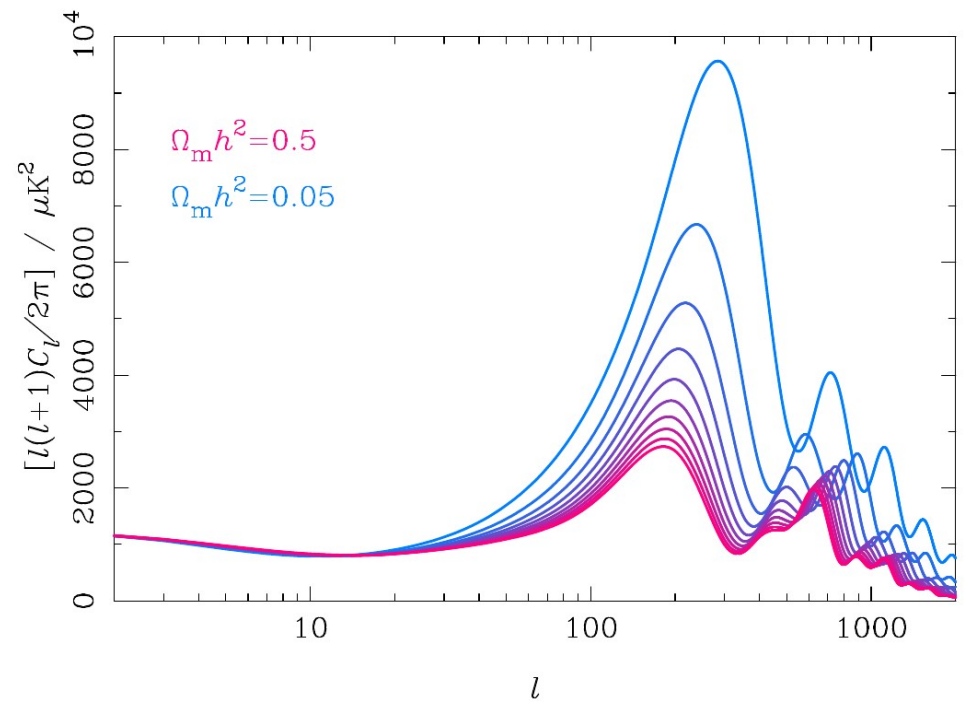
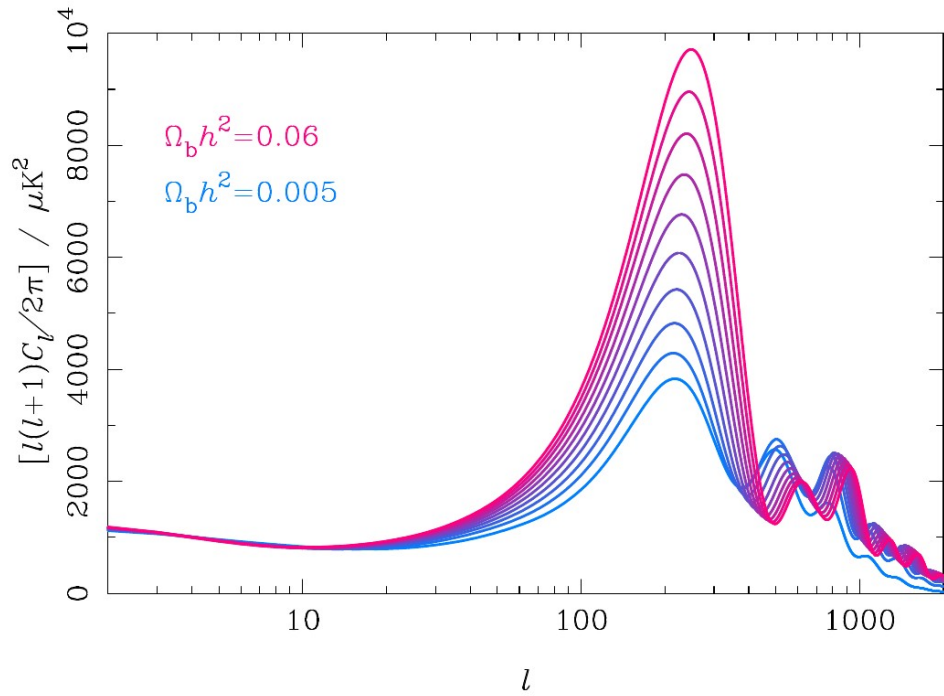
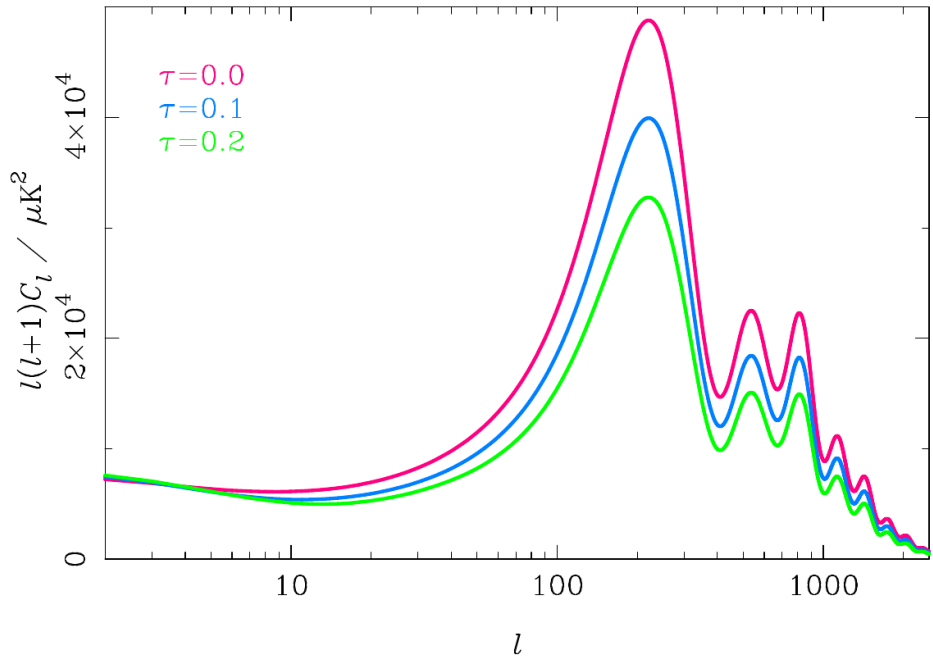
Ожидается вклад только мод, поздно вошедших под горизонт  $\Rightarrow$

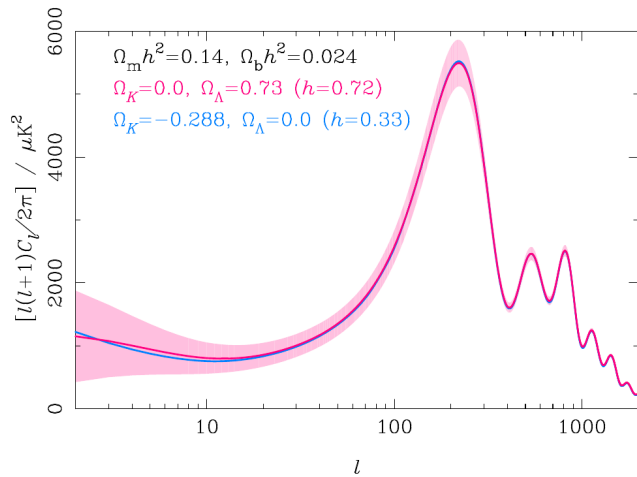
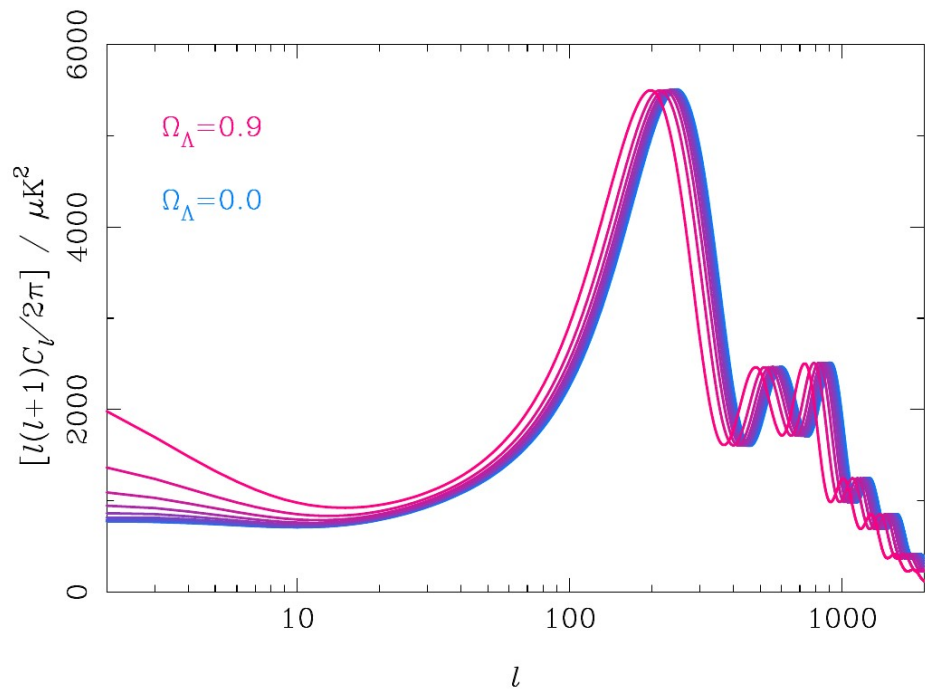
Большие масштабы неоднородностей



Тензорные моды проще обнаружить по вкладу в поляризацию СМВ (см. далее)

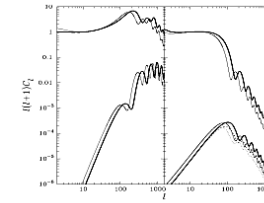
# Зависимость анизотропии от космологических параметров





**Fig. 11.** The geometric degeneracy. A scale-invariant adiabatic  $\Lambda$ CDM model with  $\Omega_b h^2 = 0.024$ ,  $\Omega_m h^2 = 0.14$  and  $\Omega_\Lambda = 0.73$  and  $\Omega_K = 0$  (close to the WMAP best-fit values [12]) produces an almost identical spectrum to a closed model  $\Omega_K = -0.288$  with vanishing cosmological constant. However, the Hubble constants are very different –  $h = 0.72$  in the flat model and  $0.33$  in the closed model – and so the latter is easily ruled out by external constraints. The shaded region shows the  $1\sigma$  cosmic variance errors  $\Delta C_l/C_l = \sqrt{2/(2l+1)}$  on the power spectrum.

## Открытый код **CAMB** для вычисления спектра мощности анизотропии СМБ: [camb.info](http://camb.info)



### Code for Anisotropies in the Microwave Background

by [Antony Lewis](#) and [Anthony Challinor](#)

Get help:   [Google Custom Search](#)

#### Features:


- Support for closed, open and flat models
- Scalar, vector and tensor modes including polarization
- Output  $C_l$ , matter transfer functions, matter power spectrum and  $\sigma_8$
- Fast computation to  $\sim 0.3\text{-}0.1\%$  accuracy, with controllable accuracy level
- Relatively structured and easily extendable Fortran 90 code
- Efficient support for massive neutrinos
- Absolute computations from correctly normalized initial power spectra
- Computation of lensed CMB power spectra and lensing potential power spectrum
- Internally parallelized for fast execution on multi-processor machines
- Use CAMB with [CosmoMC](#) for Monte-Carlo parameter estimation
- Constant equation of state [quintessence](#) (or variable [PPE](#))
- Support for general correlated adiabatic/isocurvature initial conditions
- Accurate full-sky calculation of lensed power spectra ([astro-ph/0502425](#))
- Integrated interface to [HALOFIT](#) for non-linear fitting
- support for arbitrary neutrino mass splittings
- For 21cm, lensing and number count power spectra see this [extension](#)
- For perturbed recombination and effect on small-scale baryons see this [extension](#)
- Calculation of local primordial and CMB lensing bispectra
- **NEW:** Easy-to-use [Python wrapper](#)

Download the [Fortran 90 source code and python wrapper](#).

See the [ReadMe](#) file for documentation, [CosmoCoffee](#) for support, and the [Bibtex](#) file for references.



[https://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb\\_camb\\_form.cfm](https://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_camb_form.cfm)



National Aeronautics and Space Administration  
Goddard Space Flight Center  
Sciences and Exploration

Follow @NASA\_LAMBDA  
ABOUT LAMBDA

Home
Data
Tools
Papers
Education
Links
News

LAMBDA - Tools

Tools
Footprint
CAMB
WMAPViewer
Conversions
Calculators

### CAMB Web Interface

Most of the [configuration documentation](#) is provided in the sample parameter file provided with the application.

Supports the April 2014 Release

This form uses JavaScript to enable certain layout features, and it uses Cascading Style Sheets to control the layout of all the form components. If either of these features are not supported or enabled by your browser, this form will NOT display correctly.

Descriptive information for the CAMB parameters can be found at: <http://cosmologist.info/notes/CAMB.pdf>

Actions to Perform

Scalar C<sub>l</sub>'s  
 Vector C<sub>l</sub>'s  
 Tensor C<sub>l</sub>'s

Do Lensing  
 Transfer Functions

Linear  
 Non-linear Matter Power (HALOFIT)  
 Non-linear CMB Lensing (HALOFIT)  
 Non-linear Matter Power and CMB Lensing (HALOFIT)

Sky Map Output

- Vector C<sub>l</sub>'s are incompatible with Scalar and Tensor C<sub>l</sub>'s. The Transfer functions require Scalar and/or Tensor C<sub>l</sub>'s.
- The HEALpix synfast program is used to generate maps from the resultant spectra. The random number seed governs the phase of the a<sub>lm</sub>'s generated by synfast. The default of zero causes synfast to generate a new see from the system time with each run. Specifying a fixed nonzero value will return fixed phases with successive runs.

Maximum Multipoles and k\*eta

**Scalar**

 l<sub>max</sub>

**Tensor**

 l<sub>max</sub>

## Files

Log/Output [camb\\_84296825.log](#)  
 Scalar Output [camb\\_84296825\\_scalcls.dat](#)  
 Lensed Output [camb\\_84296825\\_lensedcls.dat](#)  
 FITS Output [camb\\_84296825\\_scalcls.fits](#)

## Scalar Modes Plots

$C_l^{TT}$  vs.  $l$

