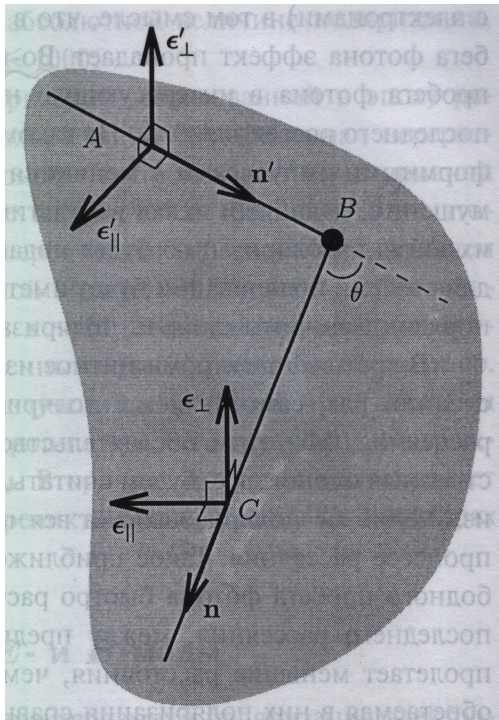


Лекция 13

Поляризация реликтового излучения. Инфляционная космология

Поляризация реликтового излучения



Томсоновское рассеяние:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \cos^2(\epsilon', \epsilon) \quad (13.1)$$

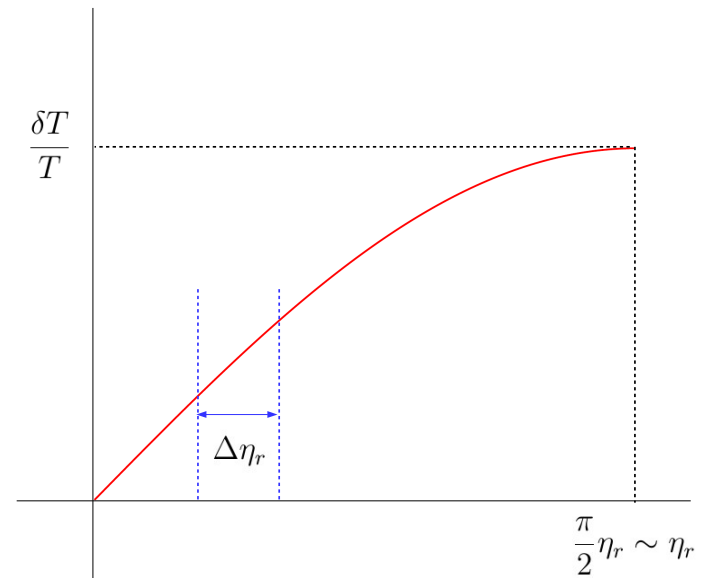
- Если с направления \mathbf{n}' приходит неполяризованное излучение, то в направлении \mathbf{n} излучение будет частично линейно поляризовано перпендикулярно плоскости $(\mathbf{n}', \mathbf{n})$.

⇒

- Если излучение, приходящее в точку B изотропно, то рассеяное излучение в направлении \mathbf{n} будет частично поляризовано.

- Поток фотонов вблизи поверхности последнего рассеяния анизотропен ⇒ последнее рассеянное излучение частично поляризовано.

Масштаб величины поляризации



d – длина пробега фотонов, $\lambda/4$ – масштаб длины неоднородностей

$d \ll \lambda/4 \Rightarrow$ поляризации нет.

$d \gg \lambda \Rightarrow$ поляризации нет (эффект Силка)

Вблизи первого акустического пика, $l \sim 150$

$$k\eta_r \sim 1 \Rightarrow k \sim \frac{1}{\eta_r} \quad (13.2)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \sim 2\pi\eta_r \quad (13.3)$$

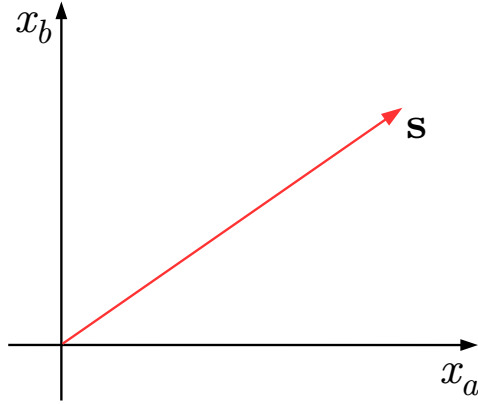
$$\frac{\lambda}{4} \sim \frac{\pi}{2}\eta_r \sim \eta_r \quad (13.4)$$

Пробег фотонов вблизи рекомбинации масштаба толщины поверхности последнего рассеяния $\Delta\eta_r \sim 0.1\eta_r \Rightarrow$

$$\mathcal{P} \sim \frac{\Delta\eta_r}{\eta_r} \frac{\delta T}{T} \sim 0.1 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \sim 5 \cdot 10^{-6} \sim 10^{-5} \quad (13.5)$$

Тензор поляризации.

1. Поляризация узкого пучка



- Поляризация – не вектор:
 - Проекция вектора на ось меняется от нуля до максимального значения
 - Интенсивность света, проходящего через поляризатор, не обращается в нуль.
 - Поляризация не имеет направления

- Поляризация – 2-тензор

$$I(\mathbf{s}) = \langle |\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}|^2 \rangle = \langle (E_a s_a)(E_b s_b)^* \rangle = s_a \langle E_a E_b^* \rangle s_b \quad (13.6)$$

$$I_{ab} = \langle E_a E_b^* \rangle \quad (13.7)$$

$$I = \langle |E_a|^2 \rangle + \langle |E_b|^2 \rangle \quad (13.8)$$

Тензор поляризации:

$$P_{ab} = \frac{I_{ab}}{I} \quad (13.9)$$

- Для линейно поляризованного света \mathbf{E} – действительный вектор \Rightarrow P действительный, симметричный, со следом 1 \Rightarrow всего 2 независимых параметра
- Неполяризованное излучение

$$P_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{2} \Rightarrow \det P = \frac{1}{4} \quad (13.10)$$

- Полностью поляризованное излучение

$$P_{ab} = \frac{E_a E_b}{E^2} \Rightarrow \det P = 0 \quad (\mathbf{E} - \text{фикс. вектор}) \quad (13.11)$$

$$P = |\mathbf{E}\rangle \otimes \langle \mathbf{E}| \equiv |\mathbf{E}\rangle \langle \mathbf{E}| \quad (13.12)$$

$$|\mathbf{E}\rangle = \begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix}, \langle \mathbf{E}| = (E_a^*, E_b^*) \equiv (E_a, E_b) \quad (13.13)$$

- Степень поляризации

$$\mathcal{P} = \sqrt{1 - 4 \det P}; \quad 0 \leq \mathcal{P} \leq 1 \quad (13.14)$$

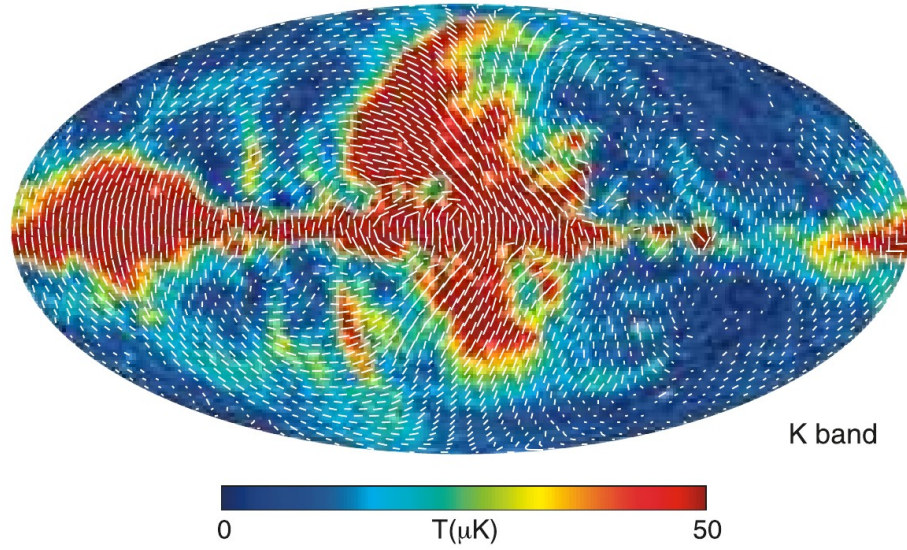
Пусть $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}$ – нормированные собственные векторы P_{ab} . Тогда

$$\begin{aligned} P &= \lambda_p |\mathbf{s}^{(1)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(1)}| + (1 - \lambda_p) |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| = \\ &= \text{\textbackslash пусть } \lambda_p < 1/2 \text{\textbackslash} = \\ &= \lambda_p |\mathbf{s}^{(1)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(1)}| + \lambda_p |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| - \\ &\quad - \lambda_p |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| + (1 - \lambda_p) |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| = \\ &= \lambda_p \hat{1} + (1 - 2\lambda_p) |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| \Rightarrow \quad (13.15) \end{aligned}$$

$$P_{ab} = \lambda_p \delta_{ab} + (1 - 2\lambda_p) s_a^{(2)} s_b^{(2)} = \frac{I_{ab}}{I} \Rightarrow \quad (13.16)$$

$$I_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{ab} I^{(n)} + E_a^{(p)} E_b^{(p)} \quad (13.17)$$

Можно нарисовать поле вектора \mathbf{E}



$$\mathcal{P}_{ab} = P_{ab} - \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (13.18)$$

Легко показать ★:

$$\det \mathcal{P}_{ab} = \det P_{ab} - \frac{1}{4} \Rightarrow \mathcal{P} = \sqrt{-4 \det P_{ab}} \quad (13.19)$$

Тензор \mathcal{P}_{ab} симметричный, бесследовый \Rightarrow два параметра.

Для неполяризованного излучения $\mathcal{P}_{ab} = 0$

2. Поле поляризации на единичной сфере

Обобщение (13.18):

$$\mathcal{P}_{ab} = P_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab} \quad (13.20)$$

где g_{ab} метрический 2-тензор на единичной сфере (координаты любые, можно (θ, φ)).

Заданный на сфере симметричный бесследовый тензор можно представить через скалярный и псевдоскалярный «потенциалы»:

$$\mathcal{P}_{ab} = \{\nabla_a \nabla_b\} \mathcal{P}_E - \{E_a^c \nabla_b \nabla_c\} \mathcal{P}_B \quad (13.21)$$

где ∇_a и E_{ab} – ковариантная производная и антисимметричный тензор на сфере:

$$E_{ab} = \sqrt{-g} \varepsilon_{ab} \quad (13.22)$$

$\{\dots\}$ означает выделение симметричной и бесследовой части:

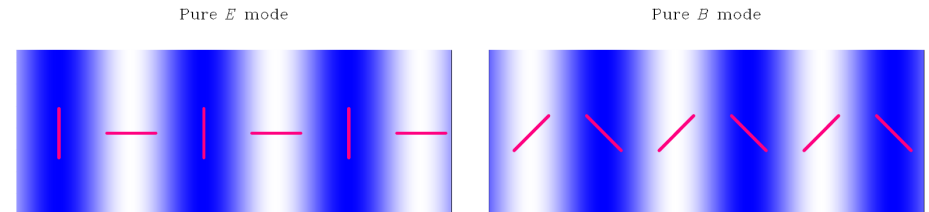
$$\{\nabla_a \nabla_b\} = \frac{1}{2}(\nabla_a \nabla_b + \nabla_b \nabla_a - g_{ab} \Delta) \quad (13.23)$$

$$\{E_a^c \nabla_b \nabla_c\} = \frac{1}{2}(E_a^c \nabla_b \nabla_c + E_b^c \nabla_a \nabla_c) \quad (13.24)$$

Обратное преобразование:

$$-\Delta(\Delta + 2)\mathcal{P}_E = 2\{\nabla^a \nabla^b\} \mathcal{P}_{ab} \quad (13.25)$$

$$-\Delta(\Delta + 2)\mathcal{P}_B = 2\{E_c^a \nabla^c \nabla^b\} \mathcal{P}_{ab} \quad (13.26)$$



$\nabla^a \mathcal{P}_{ab}$ – чистый градиент (как \mathbf{E}), если $\mathcal{P}_B = 0$,
 $\nabla^a \mathcal{P}_{ab}$ – чисто вихревой (как \mathbf{B}), если $\mathcal{P}_E = 0$.

Оригинальные статьи:

[astro-ph/9609132](#)

[astro-ph/9609169](#)

[astro-ph/9611125](#)

Разложение \mathcal{P}_E и \mathcal{P}_B :

$$\mathcal{P}_A = \sqrt{2} \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^E Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (13.27)$$

$$\mathcal{P}_B = \sqrt{2} \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^B Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (13.28)$$

$$(13.29)$$

(нормировка из соображений удобства).

Коэффициенты a_{lm}^E и a_{lm}^B вычисляются по результатам наблюдений:

$$a_{lm}^E = - \int d\mathbf{n} \left[Y_{lm}^{(E)ab}(\mathbf{n}) \right]^* \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) \quad (13.30)$$

$$a_{lm}^B = - \int d\mathbf{n} \left[Y_{lm}^{(B)ab}(\mathbf{n}) \right]^* \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) \quad (13.31)$$

где

$$Y_{lm,ab}^{(E)} = \sqrt{\frac{2(l-2)!}{(l+2)!}} \left(\nabla_a \nabla_b Y_{lm} - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \nabla_c Y_{lm} \right) \quad (13.32)$$

$$Y_{lm,ab}^{(B)} = \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} \left(\nabla_a \nabla_c Y_{lm} E_b^c + \nabla_c \nabla_b Y_{lm} E_a^c \right) \quad (13.33)$$

Разные компоненты анизотропии (E, B) могут коррелировать между собой и все они могут коррелировать с температурой.

Поэтому определяется набор корреляторов

$$C_l^{XY} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{lm}^X a_{lm}^{Y*} \rangle, \quad (13.34)$$

где $X, Y = T, E, B$.

В силу симметрии по четности $C^{TB} \equiv 0, C^{EB} \equiv 0$.

Остаются нетривиальные корреляторы:

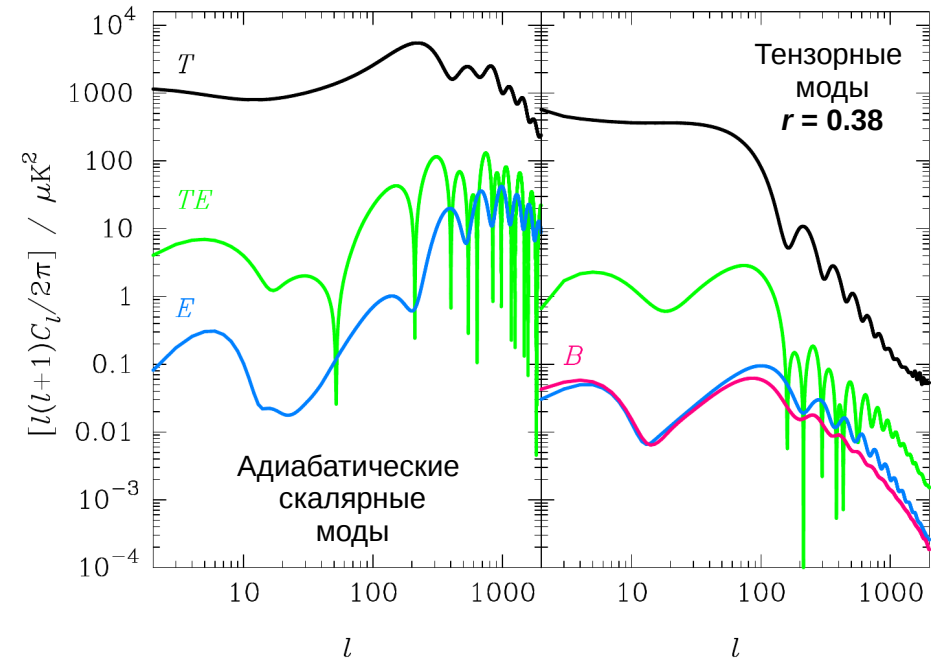
$$C_l^{TT} \equiv C_l, C_l^{TE}, C_l^{EE}, C^{BB}.$$

- Космологические скалярные моды дают вклад только в E -моду поляризации.

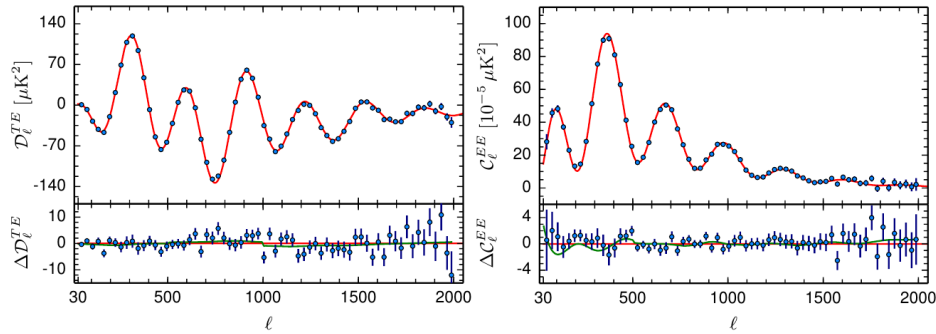
- Тензорные моды дают вклад и в E -моду, и в B -моду

⇒

- Обнаружение B -моды поляризации (вблизи $l \sim 100$) есть способ обнаружения тензорных мод и измерения тензорно-скалярного отношения r



Экспериментальные TE- и EE-спектры мощности поляризации (PLANCK-2015)



Проблема фонов:

- Рассеяние на свободных электронах реионизации
- Слабое гравитационное линзирование (дает B -моду)
- Фарадеевское вращение (плазма + магнитное поле)
- Рассеяние на пыли (дает B -моду)

Последние результаты для B -моды:
Planck + WMAP + Keck Array:
arXiv:1511.05146: $r < 0.061$ 95%

Инфляционная космология

Проблемы, неразрешимые в космологии горячего Большого взрыва

1. Наличие сингулярности метрики.

Начало эволюции с квантовой флуктуации?

2. Проблема горизонта.

Видимая вселенная содержит $\sim 10^3$ областей, которые были причинно связаны на момент рекомбинации (но не связаны друг с другом).

Почему температуры одинаковы с точностью лучше 10^{-4} ?

Еще хуже обстоит дело с горизонтами в планковское время:

$$\rho_\gamma = 2 \frac{\pi^2}{30} T^4; \quad \rho_\gamma \propto \frac{1}{a^4} \Rightarrow T \propto \frac{1}{a} \quad (13.35)$$

Наш горизонт в планковскую эпоху:

$$\begin{aligned} l_H^0(t_{Pl}) &= l_H(t_0) \times \frac{a_{Pl}}{a_0} = l_H(t_0) \times \frac{T_0}{T_{Pl}} = \\ &= 46 \text{ млрд. св. лет} \times 2 \cdot 10^{-32} \sim 3 \times 10^{30} l_{Pl} \quad (13.36) \end{aligned}$$

В видимой вселенной (вероятно) $\sim 10^{90}$ причинно связанных областей на момент квантового рождения.

Но Вселенная однородна. Почему?

3. Проблема плоскостности

$\Omega_K(t)$ – относительная плотность кривизны, зависящая от времени:

$$\Omega_K(t) = \frac{\Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2}{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \quad (13.37)$$

$$\frac{\Omega_K(t_1)}{\Omega_K(t_2)} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \times \frac{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2}{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2} \quad (13.38)$$

$$t_1 = t_{Pl}, \quad t_2 = t_0 \Rightarrow$$

$$\frac{\Omega_K(t_{Pl})}{\Omega_K^0} \cong \left(\frac{a_{Pl}}{a_0}\right)^2 \frac{1}{\Omega_{rad}^0} = \left(\frac{T_{Pl}}{T_0}\right)^2 \frac{1}{\Omega_{rad}^0} \sim 10^{-60} \quad (13.39)$$

$$\Omega_K(t_{Pl}) \sim 10^{-60} \Omega_K^0 \Rightarrow \quad (13.40)$$

$$\Rightarrow \Omega_K(t_{Pl}) \lesssim 10^{-63} \quad (13.41)$$

(ожидается $\Omega_K^0 \lesssim 0.001$)

В момент Большого взрыва Вселенная нереально плоская. Почему?

4. Проблема энтропии

В момент квантового рождения ожидается энтропия ~ 0 .

Энтропия видимой вселенной $\sim 10^{88}$ (число фотонов).

Расширяется адиабатически – откуда столько энтропии?

5. Проблема первичных возмущений

Откуда первичные возмущения и почему масштаб $\delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-5}$?

6. Проблема монополей

Если во Вселенной были температуры больше 10^{16} ГэВ, должны были интенсивно рождаться GUT-магнитные монополи. Где они?

Эти вопросы решаются в инфляционной космологии.

Идея инфляции (качественно)

После Горячего Большого взрыва

$$\ddot{a} < 0 \quad (13.42)$$

Инфляция, по определению – расширение вселенной с

$$\ddot{a} > 0 \quad (13.43)$$

Вводится новая шкала времени, в которой инфляция начинается в момент t_{Pl} , а до того было неизвестно что (эпоха квантовой гравитации). Предполагается:

- Имеет место от $t \sim t_{Pl}$ до t_e (e значит end)
- В момент t_e инфляция сменяется горячей стадией
- (Приблизительно) предполагается, что горячая стадия наступает мгновенно после окончания инфляции и наследует $H(t_e)$
- В начале горячей (РД!) стадии

$$H = \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T_{reh} = \sqrt{M_{Pl}^* H(t_e)} \quad (13.44)$$

Важная величина:

$$aH = a \frac{\dot{a}}{a} = \dot{a} \quad (13.45)$$

$$\ddot{a} < 0 \Rightarrow aH \text{ убывает, горячая стадия} \quad (13.46)$$

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow aH \text{ возрастает, инфляция} \quad (13.47)$$

Решение проблемы плоскостности

Уравнение Фридмана с кривизной:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (13.48)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \left[\rho + \Lambda - \frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \right] = H^2 \quad (13.49)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_c(t) = H^2(t) \Rightarrow \rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G} H^2(t) \quad (13.50)$$

$$\rho_K(t) = -\frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \quad (13.51)$$

$$\Omega_K(t) \equiv \frac{\rho_K(t)}{\rho_c(t)} = \frac{1}{a^2(t)H^2(t)} \quad (13.52)$$

Хотим, чтобы начальная кривизна была не очень мала:

$$\Omega_K(t_{Pl}) \gtrsim \Omega_K(t_0) \Leftrightarrow \frac{\Omega_K(t_0)}{\Omega_K(t_{Pl})} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (13.53)$$

$$\frac{[a(t_{Pl})H(t_{Pl})]^2}{(a_0H_0)^2} \lesssim 1 \Leftrightarrow \frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a_0H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (13.54)$$

$$\frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a(t_e)H(t_e)} \frac{a(t_e)H(t_e)}{a_0H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (13.55)$$

$$\frac{a(t_e)H(t_e)}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_e)H(t_e)}{a_0H_0} \quad (13.56)$$

Этого всегда можно добиться, если $a(t)H(t) = \dot{a}(t)$ растет достаточно быстро от t_{Pl} до t_e

Решение проблемы горизонта

Оценим размер области, которая была причинно связана на момент t_e , в настоящее время.

Горизонт t_e :

$$l_{H,e} = a(t_e) \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} \quad (13.57)$$

$$\begin{aligned} l_{H,e}(t_0) &= \frac{a_0}{a(t_e)} l_{H,e} = \frac{a_0}{a(t_e)} a(t_e) \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a} = a_0 \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a} = \\ &= \int da = \dot{a} dt \Rightarrow dt = \frac{da}{\dot{a}} = \\ &= a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a\dot{a}} = a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2 H} \quad (13.58) \end{aligned}$$

$a^2 H$ – быстро растет, так как aH растет;

Будем предполагать, что H меняется относительно медленно (т.е. рост a близок экспоненциальному);

Интеграл набирается на нижнем пределе:

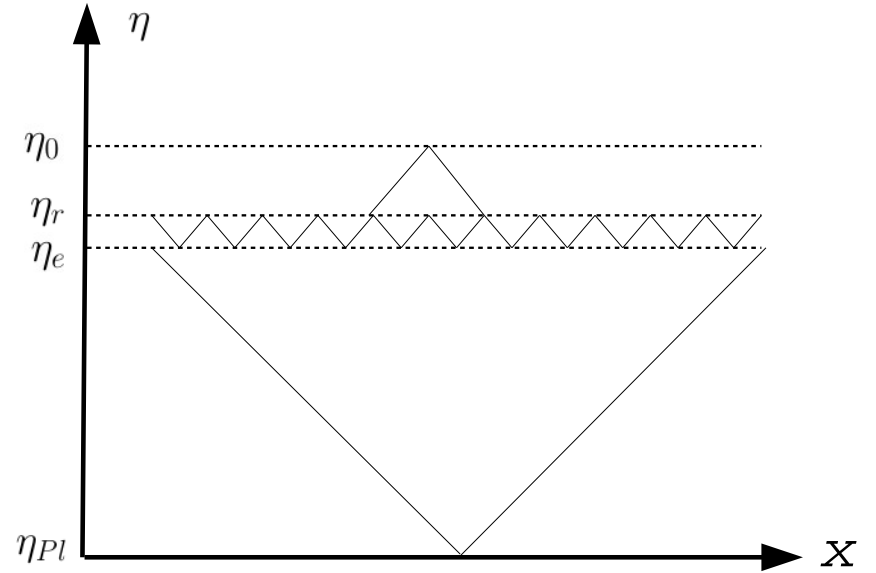
$$a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2 H} \sim \frac{a_0}{H(t_{Pl})} \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2} \sim \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \quad (13.59)$$

Сравним с горизонтом сейчас, если считать его от момента Большого взрыва = разогрева:

$$\frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} \simeq \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \times H_0 = \frac{a_0 H_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \quad (13.60)$$

$$\frac{a_0 H_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} > 1 \Rightarrow \frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} > 1 \quad (13.61)$$

То же самое, что условие на кривизну (13.54) \Rightarrow проблема плоскостности и проблема горизонта решаются одновременно!



Оценка необходимой длительности инфляции

Из (13.56):

$$\frac{a(t_e)}{a(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_e)}{a_0} \frac{H(t_e)}{H_0} \frac{H(t_{Pl})}{H(t_e)} = \frac{T_0}{T_{reh}} \frac{H(t_{Pl})}{H_0} \quad (13.62)$$

Число e -фолдингов:

$$N_e^{(tot)} \equiv \ln \frac{a(t_e)}{a(t_{Pl})} \quad (13.63)$$

$$N_e^{(tot)} > \ln \frac{T_0}{H_0} + \ln \frac{H(t_{Pl})}{T_{reh}} \simeq \ln \frac{T_0}{H_0} + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (13.64)$$

$$\frac{T_0}{H_0} \sim 10^{29}; \ln 10^{29} \approx 67 \Rightarrow \quad (13.65)$$

$$N_e^{(tot)} > 67 + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (13.66)$$

Для $T_{reh} = M_{Pl} \div 1 \text{ TeV}$

$$N_e^{(min)} \simeq 70 \div 100 \quad (13.67)$$

Каково время инфляции, в секундах?

Если инфляция приблизительно экспоненциальна, то

$$N_e^{tot} \sim H_{infl} \Delta t_{infl} \quad (13.68)$$

$$H_{infl} \sim H(t_e) = \frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}^*} \text{ [см. (13.44)]} \quad (13.69)$$

$$\frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}^*} \Delta t_{infl}^{min} = 70 \div 100 \Rightarrow \quad (13.70)$$

$$t_{infl}^{min} = M_{Pl}^* \frac{70 \div 100}{(M_{Pl} \div 1 \text{ TeV})^2} = 10^{-42} \div 10^{-9} \text{ сек} \quad (13.71)$$

Общие замечания

1. Эта оценка $N_e^{(min)}$ немного завышена из-за предположения о мгновенности разогрева. Принятое значение $N_e^{(min)} \simeq 60$.
2. Скорее всего $N_e^{(tot)} \gg N_e^{(min)} \Rightarrow \Omega_K \ll 0.001$.
3. Проблема энтропии решается разогревом в момент t_e

4. Проблема начальных возмущений решается за счет квантовых флуктуаций поля инфлатона (см. ниже).

5. Проблема монополей.

- Если $T_{reh} < M_{GUT}$, то монополи в горячей фазе никогда не рождались.
- Если монополи рождались до инфляции, то инфляция сделала их плотность пренебрежимо малой.

Модели инфляции

Де-Ситтеровская вакуумная инфляция

- Какая материя нужна, чтобы получить инфляцию?
- Простейший вариант уже известен: плотность вакуума, Λ -член:

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow \rho = \Lambda, \quad p = -\Lambda = -\rho \quad (13.72)$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{H_{vact} t} \quad (13.73)$$

$$H_{vac} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{\Lambda}{M_{Pl}^2}} \quad (13.74)$$

- Проблема: Инфляция не кончается (Роджер Пенроуз не согласен).
- Надо придумать что-то похожее на Λ -член, но не Λ -член, и чтобы инфляция естественным образом кончалась.

Скалярное поле

• В некоторых случаях ведет себя очень похоже на Λ -член, но инфляция кончается естественным способом и может закончиться разогревом – инфлатон.

• Рассматривается теория вещественного скалярного поля φ с действием (для минимальной связи):

$$S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] \quad (13.75)$$

Полное действие (без Λ -члена):

$$S = S_g + S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g, \varphi) \quad (13.76)$$

$\delta S = 0$ – общий принцип действия.

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_g + \delta S_\varphi = \\ &= \int d^4x \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \left(\frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} \delta \varphi \right) = \\ &= \int d^4x \left(\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} \delta \varphi \quad (13.77) \end{aligned}$$

$\delta g_{\mu\nu}$ и $\delta \varphi$ варьируются независимо, поэтому

$$\begin{cases} \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \rightarrow \text{Уравнения Эйнштейна} \\ \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} = 0 \rightarrow \text{Уравнения поля} \end{cases} \quad (13.78)$$

Требуется найти явный вид $\frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi}$.

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi|_\varphi &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) - \delta(V(\varphi)) \right] = \\ &= \backslash \text{все считается просто } \star \backslash = \\ &= - \int d^4x \left[\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] \delta \varphi \Rightarrow \quad (13.79) \end{aligned}$$

$$\frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} = - \left[\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] \quad (13.80)$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = - \frac{\partial V}{\partial \varphi}} \quad (13.81)$$

Однородная и изотропная космология

Работаем в плоской метрике

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2 \quad (13.82)$$

Рассматриваем только однородные поля φ

$$\partial_i \varphi = 0; \quad i \geq 1 \quad (13.83)$$

Тогда

$$g = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -a^2 & & \\ & & -a^2 & \\ & & & -a^2 \end{vmatrix} = -a^6 \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3 \quad (13.84)$$

В уравнении остается только 0-компонента:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^3 g^{00} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \Rightarrow \quad (13.85)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0} \quad (13.86)$$

Скалярное поле как идеальная жидкость

ТЭИ однородного скалярного поля:

$$\delta S_\varphi|_g = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (13.87)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(g, \varphi) \quad (13.88)$$

(см. (2.111))

В локально-лоренцевой системе отсчета, где $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (13.89)$$

$$T_{ij} = \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right] \delta_{ij} \quad (13.90)$$

Это похоже на идеальную жидкость с плотностью и давлением:

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (13.91)$$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (13.92)$$

Если $\dot{\varphi}$ мало, то жидкость очень похожа на вакуум $\rho \approx -p!$

Размерности

$$\begin{aligned} [V] = \text{GeV}^4 &\Rightarrow [\dot{\varphi}]^2 = \text{GeV}^4 \Rightarrow [\dot{\varphi}] = \text{GeV}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\varphi] = \text{GeV}; \quad V \sim g\varphi^n \Rightarrow [g] = \text{GeV}^{4-n} \end{aligned} \quad (13.93)$$