

Лекция 2

Основы ОТО. II. Свойства афинной связности. Тензор кривизны.
Действие для гравитации.

Закон преобразования аффинных связностей

$$\nabla_{\lambda} A^{\mu} = \partial_{\lambda} A^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} A^{\nu} - \text{Должно быть тензором!} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{\lambda} A^{\mu})' &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} (\nabla_{\alpha} A^{\beta}) = \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} (\partial_{\alpha} A^{\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} A^{\gamma}) = \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial A^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} A^{\gamma} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\lambda} A^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} A^{\nu})' &= \frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} A'^{\gamma} = \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} A^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\delta}} A^{\delta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} A^{\gamma} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} A^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\delta}} A^{\delta} \quad (2.4)$$

$$A^{\gamma}, A^{\alpha}, A^{\delta} \rightarrow A^{\varepsilon}$$

$$\Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}} \left| \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \right. \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{\lambda\delta}^{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\beta} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} \equiv 0 \quad \star \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{\lambda\delta}^{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\beta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\delta} \partial x'^{\lambda}} \quad (2.8)$$

Аффинная связность – не тензор!

Кручение

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (2.9)$$

Преобразуется как тензор!

Локально Лоренцевы системы отсчета и отсутствие кручения

1. Метрический тензор имеет вид $g = \{1, -1, -1, -1\}$
2. Все $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$

Если $C_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$ во всех системах отсчета \Rightarrow

Если $C_{\beta\gamma}^{\alpha} \neq 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C_{\beta\gamma}^{\alpha} \neq 0$ в любой системе отсчета, следовательно в любой системе отсчета $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \neq 0$ и гравитацию исключить невозможно.

Чтобы гравитацию можно было локально исключить, в ОТО необходимо $C_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0$, $\Rightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$

$C_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ является достаточным условием, чтобы было возможно занулить аффинную связность.

$$x'^\mu = x^\mu + T_{\sigma\rho}^\mu x^\sigma x^\rho \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|_0 = \delta_\nu^\mu; \quad \left. \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right|_0 = \delta_\mu^\nu \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} \right|_0 = T_{\varepsilon\beta}^\mu + T_{\beta\varepsilon}^\mu \Rightarrow \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\delta}'^\mu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\beta - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} = \\ &= \delta_\lambda^\alpha \delta_\beta^\mu \delta_\delta^\varepsilon \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\beta - \delta_\lambda^\beta \delta_\delta^\varepsilon (T_{\varepsilon\beta}^\mu + T_{\beta\varepsilon}^\mu) = \\ &= \Gamma_{\lambda\delta}^\mu - (T_{\delta\lambda}^\mu + T_{\lambda\delta}^\mu) \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$T_{\delta\lambda}^\mu + T_{\lambda\delta}^\mu = \Gamma_{\lambda\delta}^\mu(0) \Rightarrow \Gamma_{\lambda\delta}'^\mu(0) = 0. \quad (2.14)$$

Чтобы подобрать $T_{\delta\lambda}^\mu$ достаточно, чтобы $\Gamma_{\delta\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\delta}^\mu$.
Например:

$$T_{\delta\lambda}^\mu = \frac{1}{2} \Gamma_{\delta\lambda}^\mu \quad (2.15)$$

С помощью преобразования

$$\hat{g}' = \hat{J} \hat{g} \hat{J}^T, \quad \hat{J} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right), \quad x^\mu = J_\nu^\mu x'^\nu \quad (2.16)$$

симметричная матрица \hat{g} может быть приведена к диа-

гональному виду

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} k^0 & & & 0 \\ & -k^1 & & \\ & & -k^2 & \\ 0 & & & -k^3 \end{pmatrix}, \quad k^\mu > 0 \quad (2.17)$$

С помощью масштабного преобразования:

$$x'^\mu = x^\mu \frac{1}{\sqrt{k^\mu}} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Преобразование (2.10) в силу (2.11) не меняет тензоры в начале координат, поэтому связность можно занулить после того, как как \hat{g} приведен к лоренцову виду.

Метрический тензор можно привести к Лоренцеву виду и связность можно занулить одновременно – это локально Лоренцева система отсчета

Однако производные $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, вообще говоря, не исчезают!

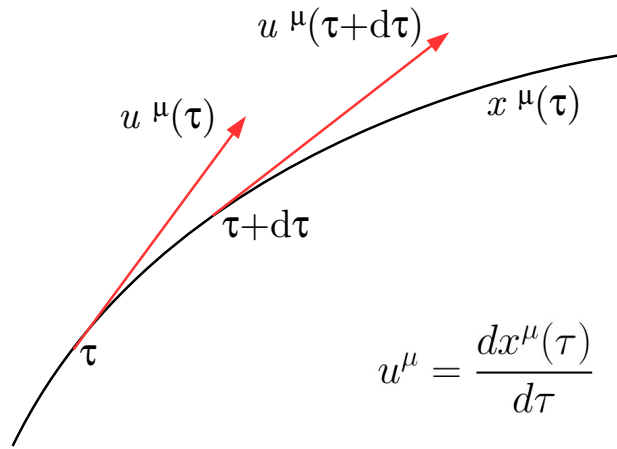
В частности, неустранимы приливные силы.

Вывод:

Для того, чтобы можно было ввести локально-лоренцевы системы отсчета необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты связности были симметричны \Rightarrow

Первое дополнительное условие ОТО на коэффициенты связности: симметричность

Геодезические



Геодезическая линия – такая кривая, вдоль которой касательный вектор к ней переносится параллельно самому себе.

$$u^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu + \frac{du^\mu(\tau)}{d\tau}d\tau \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u^\mu(\tau + d\tau) &= \tilde{u}^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu(\tau) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu(\tau)dx^\lambda = \\ &= u^\mu(\tau) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu(\tau)u^\lambda(\tau)d\tau \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau}d\tau = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu(\tau)u^\lambda(\tau)d\tau \Rightarrow \quad (2.21)$$

$$\boxed{\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0} \quad (2.22)$$

Меняем местами ν и λ и складываем:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu)u^\nu u^\lambda = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\{\nu\lambda\}}^\mu u^\nu u^\lambda = 0 \quad (2.24)$$

$$\Gamma_{\{\nu\lambda\}}^\mu = \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) \quad (2.25)$$

Геодезические определяются симметризованными коэффициентами связности.

Другая форма уравнения геодезической:

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0} \quad (2.26)$$

Движение частиц в гравитационном поле по геодезическим – постулат, который не имеет доказательства.

Первая проблема ОТО со спином: частицы со спином не движутся по геодезическим (?).

Вторая проблема ОТО со спином: нет рецепта расчета гравитационного поля спина.

Система спинов может создавать макроскопический момент и должна приводить к макроскопическому гравитационному полю, которое ОТО не может считать \Rightarrow .

Попытка учета поля спинов приводит к теориям Эйнштейна-Картана, в которых кручение не равно нулю.

Второе дополнительное условие на коэффициенты связности: метричность

Хотим, чтобы операции поднятия/опускания индексов была универсальной:

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda A_\mu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \text{ т.е.} \quad (2.27)$$

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) \quad (2.28)$$

По правилу Лейбница:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) &= (\nabla_\lambda g_{\mu\nu})A^\nu + g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \\ &= g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0} \quad (2.30)$$

Метрический тензор ковариантно постоянен, если *связность метрична* (*связность совместима с метрикой*).

Метричность связности априори ниоткуда не следует \rightarrow рассматриваются обобщения ОТО, в которых связность не метрична.

Явное выражение коэффициентов связности через метрический тензор

Используется *одновременно* метричность $g_{\mu\nu}$ и симметричность связности:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0. \quad (2.31)$$

40 линейных уравнений с 40 неизвестными $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} \quad [\lambda\mu\nu] \quad | \times (+1) \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\nu\sigma} &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} \quad [\mu\nu\lambda] \quad | \times (+1) \\ \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma g_{\sigma\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma} &= \partial_\nu g_{\lambda\mu} \quad [\nu\lambda\mu] \quad | \times (-1) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$2\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} \quad |g^{\nu\delta} \star \quad (2.33)$$

$$\boxed{\Gamma_{\lambda\mu}^\delta = \frac{1}{2}g^{\delta\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})} \quad (2.34)$$

Для того, чтобы $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ выражались через $g_{\mu\nu}$, метричность и симметричность связности необходимы!

Можно посчитать, что метричность+симметричность вместе дают 64 уравнения, однозначно определяющие все 64 компоненты связности \star .

Если в некоторой точке все $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$, то все $\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$ \star .

Выражение (2.34) иногда называется символами Кристоффеля и обозначается

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \lambda\mu \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\delta\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) \quad (2.35)$$

Уравнение геодезической из принципа максимума длины или из принципа наименьшего действия

$\delta S = 0$ – принцип действия для свободной частицы

$$\begin{aligned} S &= -m \int_a^b ds = -m \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \backslash x = x(\tau) \backslash = \\ &= -m \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau \quad (2.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta S &= -m \int \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \delta(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = \\ &= -\frac{m}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}} \left(\partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= \backslash \sigma \leftrightarrow \nu \text{ в первом слагаемом,} \\ &\quad \text{по частям второе слагаемое} \backslash = \\ &= -\frac{m}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}} \left[\partial_\nu g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\sigma - 2 \frac{d(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu)}{d\tau} \right] \delta x^\nu d\tau = \\ &= 0 \quad (2.37) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu) - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\sigma = 0 \quad (2.38)$$

$$\dot{x}^\mu \frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} + g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\sigma = 0 \quad | g^{\nu\rho} \quad (2.39)$$

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{x}^\sigma \quad (2.40)$$

$$\ddot{x}^\rho + g^{\rho\nu} \left(\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} \right) \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0 \quad (2.41)$$

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = \frac{1}{2} (\partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu + \partial_\mu g_{\sigma\nu} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu) \quad (2.42)$$

$$\ddot{x}^\rho + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}) \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}) = \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \quad (2.44)$$

$$\boxed{\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0} \quad (2.45)$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0} \quad (2.46)$$

Тензор Леви-Чевита

Хотим, чтобы $E^{\mu\nu\rho\sigma}$ был тензором, и в локально лоренцевой (галилеевой) системе (x)

$$E^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon^{0123} = 1 \quad (2.47)$$

Как будет в произвольной системе (x')?

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.48)$$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{-g'} \Rightarrow \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.50)$$

$$\boxed{E^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}} \quad (2.51)$$

Аналогично можно найти ★:

$$\boxed{E_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}} \quad (2.52)$$

Тензор кривизны

Два способа ввести тензор кривизны.

1. Через коммутатор ковариантной производной $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi = \partial_\mu \partial_\nu \varphi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \varphi \quad (2.53)$$

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \varphi = \partial_\nu \partial_\mu \varphi - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \varphi \Rightarrow \quad (2.54)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \varphi = -(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) \partial_\lambda \varphi = -C_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \varphi = 0 \quad (2.55)$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = ? \quad (2.56)$$

$$\nabla_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) = \partial_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma (\nabla_\sigma A^\lambda) + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda (\nabla_\nu A^\sigma) = \dots \quad (2.57)$$

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu A^\lambda) = \dots \quad (2.58)$$

(посчитать! ★)

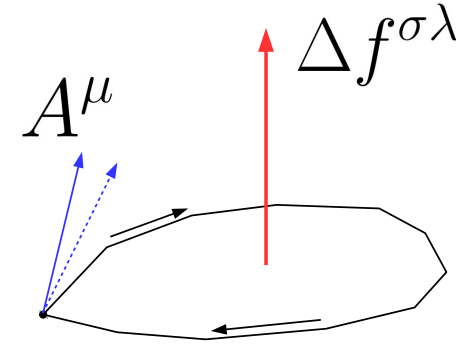
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = A^\sigma R_{\sigma\mu\nu}^\lambda \quad (2.59)$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (2.60)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\lambda = A_\sigma R_{\mu\nu\lambda}^\sigma \quad (\text{посчитать } \star) \quad (2.61)$$

Отсюда видно, почему тензор кривизны – действительно тензор.

2. Параллельный перенос вдоль замкнутого контура



$$\tilde{A}^\mu(x + dx) = A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.62)$$

$$\delta A^\mu(x) = \tilde{A}^\mu(x + dx) - A^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.63)$$

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu(x) = -\oint \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.64)$$

Формула Стокса:

$$\oint B_{\dots\lambda} dx^\lambda = \frac{1}{2} \int df^{\sigma\lambda} (\partial_\sigma B_{\dots\lambda} - \partial_\lambda B_{\dots\sigma}) \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \Delta A^\mu &= -\frac{1}{2} \int df^{\sigma\lambda} [\partial_\sigma (\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu) - \partial_\lambda (\Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu)] \simeq \\ &\simeq -\frac{1}{2} \Delta f^{\sigma\lambda} (\partial_\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \partial_\sigma A^\nu - \partial_\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \partial_\lambda A^\nu) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Внутри контура A^μ изменяется только за счет параллельного переноса, поэтому

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \Rightarrow \partial_\lambda A^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned}
\Delta A^\mu &= \\
-\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu\Gamma_{\rho\sigma}^\nu A^\rho - \partial_\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu\Gamma_{\rho\lambda}^\nu A^\rho) &= \\
= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\lambda\Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma\Gamma_{\lambda\nu}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu\Gamma_{\nu\lambda}^\rho)A^\nu &= \\
= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^\mu_{\sigma\lambda\nu}A^\nu & \quad (2.68)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta A^\mu = \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^\mu_{\sigma\lambda\nu}A^\nu} \quad (2.69)$$

Из вывода видно, что формула верна универсально, независимо от метричности и симметричности связности.

Свойства тензора кривизны

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= g_{\tau\lambda}R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \\
&= g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) \quad (2.71)
\end{aligned}$$

1.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\tau\sigma\nu\mu} \quad \text{— очевидно} \quad (2.72)$$

2.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\tau\mu\nu} \quad (2.73)$$

— не очевидно, использует метричность, не универсально

$$\Gamma_{\xi,\nu\sigma} = g_{\xi\lambda}\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\sigma\xi} + \partial_\sigma g_{\xi\nu} - \partial_\xi g_{\nu\sigma}) \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= +g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) \quad (2.75) \\
&\quad -g_{\tau\lambda}(\partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho)
\end{aligned}$$

$\nu\sigma \equiv ..$

$$\begin{aligned}
g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) &= g_{\tau\lambda}\nabla_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \nabla_\mu(g_{\tau\lambda}\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) = \\
&= \nabla_\mu(\Gamma_{\tau,\nu\sigma}) = \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \Gamma_{\tau\mu}^\lambda\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} = \\
&= \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\mu}\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} \quad (2.76)
\end{aligned}$$

$$g_{\tau\lambda}(\partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) = \partial_\nu\Gamma_{\tau,\mu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\nu}\Gamma_{\lambda,\mu\sigma} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma_{\tau,\mu\sigma} + g^{\lambda\xi} (\Gamma_{\xi,\mu\sigma} \Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma} \Gamma_{\lambda,\mu\tau}) = \\
&= \partial_\mu \partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu \partial_\tau g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu \partial_\tau g_{\mu\sigma} + \\
&\quad + g^{\lambda\xi} (\Gamma_{\xi,\mu\sigma} \Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma} \Gamma_{\lambda,\mu\tau}) \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Отсюда свойство (2.73) уже очевидно.

3.
$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\tau\sigma} \quad \star \quad (2.79)$$

4.
$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} + R^\sigma_{\mu\nu\rho} + R^\sigma_{\nu\rho\mu} = 0 \quad (2.80)$$

Из тождества Якоби:

$$\begin{aligned}
[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\varphi + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]\varphi &= 0; \quad (2.81) \\
[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi &= -\partial_\sigma \varphi R^\sigma_{\mu\nu\rho} \Rightarrow (2.80) \quad (2.82)
\end{aligned}$$

5. Тождество Бьянки \star :

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} = 0 \quad (2.83)$$

Из тождества Якоби

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]A^\lambda + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]A^\lambda + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]A^\lambda = 0; \quad (2.84)$$

Число независимых компонент \star :

$$N = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12} \quad (2.85)$$

$$n = 4 \rightarrow N = 20 \quad (2.86)$$

$$n = 3 \rightarrow N = 6 \quad (2.87)$$

$$n = 2 \rightarrow N = 1 \quad (2.88)$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (2.89)$$

Скаляр кривизны (не гауссова кривизна!):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu} = R^{\lambda\nu}_{\lambda\nu} \quad (2.90)$$

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного принципа

Сначала одна гравитация – без материи.

Действие должно быть общековариантной величиной.

1. Хотим иметь уравнения второго порядка для $g_{\mu\nu}$.
2. Уравнения должны быть линейными относительно вторых производных.

1. Простейшее действие

$$S_\Lambda = -\Lambda \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \quad (2.91)$$

$$\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) = \Lambda \int d^4x \frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \quad (2.92)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g = ? \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
\det(\hat{g} + \delta\hat{g}) &= \det[\hat{g}(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\
&= \det \hat{g} \cdot \det(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g}) = g(1 + \text{Tr}(\hat{g}^{-1}\delta\hat{g})) = \\
&= g(1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = g + g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow (2.94)
\end{aligned}$$

$$\delta g = g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (2.95)$$

$$\delta S_\Lambda = -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.96)$$

2. Вклад $\sim \int d^4x \sqrt{-g} f(R)$

Проблема: R зависит от вторых производных g по x .
Получим ли уравнения выше второго порядка?

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \varphi', \varphi'') \quad (2.97)$$

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} + \partial^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi''} \right) \delta \varphi = 0 \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} + \partial^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi''} = 0 \quad (2.99)$$

– начиная с второго члена входят производные высших порядков.

Но если φ'' входят в \mathcal{L} в комбинации $\varphi\varphi''$, то:

$$\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial \varphi} = \varphi''; \quad \partial \left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial \varphi'} \right) = 0; \quad \partial^2 \left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial \varphi''} \right) = \varphi'' \quad (2.100)$$

производных выше 2-го порядка не получается.

R зависит от $g''_{\mu\nu}$ именно так.

Можно показать, что $f(R)$ -гравитация сводится к R -гравитации плюс некоторое скалярное поле. Поэтому достаточно взять $f(R) = R$.

$$S_R = -K \int d^4x \sqrt{-g} R = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.101)$$

$$\delta S_R = \begin{array}{l} -K \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \end{array} \left| \begin{array}{l} = \delta S_1 \\ = \delta S_2 \\ = \delta S_3 \end{array} \right. \quad (2.102)$$