

Лекция 6

Термодинамика Вселенной (продолжение). Сохранение энтропии. Барион-фотонное отношение. Частицы стандартной модели и эффективный стат. вес. Фазовые переходы в ранней Вселенной. Бариогенезис.

Ультррелятивистские частицы: давление и плотность числа частиц

Если все УР частицы имеют одинаковую температуру T , то

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (6.1)$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \quad (6.2)$$

g_* – эффективное число степеней свободы (стат.вес).

Давление

Из (5.108):

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \frac{\rho_i}{3} \quad (\text{см. (5.109)}) \quad (6.3)$$

Для УР вещества всегда $p = \rho/3$.

Плотность числа частиц

$$\begin{aligned} n_i &= 4\pi \int \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^2 dE = \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty \frac{z^2}{e^z \pm 1} dz \quad (6.4) \end{aligned}$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (6.5)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} = \Gamma(x) \zeta(x) \quad (6.6)$$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (6.7)$$

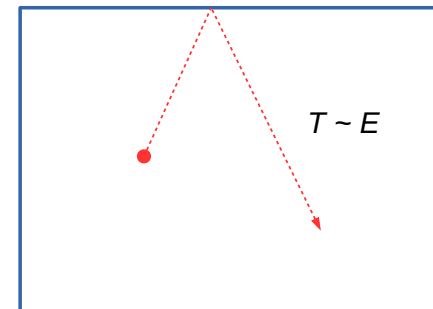
x	$\zeta(x)$
3	1.202
5	1.037
3/2	2.612
5/2	1.341

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$x = 3 \Rightarrow$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & \text{– Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{– Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (6.9)$$

Частица в ящике: частица одна, а температура сколь угодно высокая? Где ошибка?



А есть ли тепловое (химическое) равновесие?

Характерное время расширения:

$$1/t_H \sim H(t) \quad (6.10)$$

Электромагнитное взаимодействие:

$$\sigma \propto \alpha^2 \Rightarrow 1/t_{em} \sim \alpha^2 T \quad (6.11)$$

Из (5.55):

$$H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}; \quad M_{Pl}^* = M_{Pl} \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}} = \frac{1}{1.66\sqrt{g_*}} M_{Pl} \quad (6.12)$$

Нужно:

$$t_{em} \ll t_H \Rightarrow 1/t_{em} \gg H(t) \quad (6.13)$$

$$\alpha^2 T \gg \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T \ll \alpha^2 M_{Pl}^* \sim 10^{14} \text{ ГэВ} \quad (6.14)$$

Тепловое равновесие для ЭМ взаимодействия хорошо работает для $T \lesssim 10^{12} \text{ ГэВ}$

$$f(E) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}$$

$$n_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE$$

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE$$

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE$$

Нерелятивистский газ
(распределение Больцмана)

$$m_i \gg T, \quad m_i - \mu_i \gg T \Rightarrow e^{(E-\mu_i)/T} \gg 1 \quad (6.15)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-[E(p)-\mu_i]/T} \quad (6.16)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} e^{-p^2/(2m_i T)} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_B(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \int_0^\infty f_B(p) 4\pi p^2 dp = \\ &= 4\pi \frac{g_i}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} \int_0^\infty p^2 e^{-p^2/(2m_i T)} dp = \\ &= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4 \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \\ &= g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Больцмановский газ:

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (6.19)$$

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \quad \star \quad (6.20)$$

$$p = \frac{1}{3} n \langle \mathbf{v}\mathbf{p} \rangle \Rightarrow \left\langle E_k = \frac{3}{2} T \right\rangle \Rightarrow p_i = n_i T \ll \rho_i \quad (6.21)$$

Энтропия во Вселенной

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i \quad (6.22)$$

Будем считать dE в расчете на 1 тип частиц.
Для плотностей:

$$\rho = \frac{E}{V}, \quad n = \frac{N}{V}, \quad s = \frac{S}{V} \quad (6.23)$$

$$dE = \rho dV + V d\rho \quad (6.24)$$

$$dN = n dV + V dn \quad (6.25)$$

$$dS = s dV + V ds \quad (6.26)$$

Из (6.22), (6.24)–(6.26):

$$(Ts - p - \rho + \mu n)dV + (Tds - d\rho + \mu dn)V = 0 \quad (6.27)$$

Запишем I начало только с локальными величинами.

Применяем (6.27) к области постоянного (единичного) объема внутри системы. $dV = 0 \Rightarrow$

$$d\rho = Tds + \mu dn \quad (6.28)$$

Это соотношение между локальными величинами выполняется всегда (в равновесии).

Подставляем (6.28) в (6.27) и применяем к произвольной системе переменного объема:

$$s = \frac{p + \rho - \mu n}{T} \quad (6.29)$$

УР газ, μ мало

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i}{T} \quad (6.30)$$

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8}g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{БЭ} \end{cases}; \quad p_i = \frac{1}{3}\rho_i \quad (6.31)$$

$$s_i = \frac{4\rho_i}{3T} = \begin{cases} \frac{7}{8}g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{БЭ} \end{cases} \quad (6.32)$$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & - \text{Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & - \text{Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (6.33)$$

$$s_i \sim n_i \quad (6.34)$$

Полная плотность энтропии УР газа

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (6.35)$$

Нерелятивистский газ

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \quad (6.36)$$

$$p_i = n_i T \quad (6.37)$$

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i - \mu_i n_i}{T} \Rightarrow \quad (6.38)$$

$$s_i = \left(\frac{5}{2} + \frac{m_i - \mu_i}{T} \right) n_i \quad (6.39)$$

Из

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (6.40)$$

получаем

$$\frac{m_i - \mu_i}{T} = \ln \left[\frac{g_i}{n_i} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \Rightarrow \quad (6.41)$$

$$s_i = n_i \left(\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{g_i}{n_i} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \right) \quad (6.42)$$

При $T \lesssim 0.5$ МэВ электроны и адроны – нерелятивистские.

Сейчас $n_e \sim n_B \sim 10^{-9} n_\gamma$.

\ln в (6.42) $\approx 60(\star) \Rightarrow s_B \ll s_\gamma$ и

$$s \sim s_\gamma \sim n_\gamma \quad (6.43)$$

Из (6.39) и (6.42) $\Rightarrow \mu_i \sim m_i$.

Сохранение энтропии при сохранении разности числа частиц и античастиц: $d(N - \bar{N}) = 0$

В сопутствующем объеме, с учетом всех типов частиц:

$$\begin{aligned} dE &= TdS - pdV + \sum \mu(dN - d\bar{N}) = \\ &= TdS - pdV + \sum \mu d(N - \bar{N}) = \\ &= TdS - pdV \quad (6.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TdS &= dE + pdV = d(\rho V) + pdV = \\ &= Vd\rho + \rho dV + pdV = (p + \rho)dV + Vd\rho \quad (6.45) \end{aligned}$$

$$T \frac{dS}{dt} = (p + \rho) \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} \quad (6.46)$$

$$\text{Сопутствующий объем: } V = ka^3 \Rightarrow \quad (6.47)$$

$$\frac{dV}{dt} = k3a^2 \dot{a} \Rightarrow \quad (6.48)$$

$$T \frac{dS}{dt} = ka^3 \left[(p + \rho) 3 \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\rho} \right] \quad (6.49)$$

Закон сохранения ЭИ:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho) = 0 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0 \quad (6.50)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} (ka^3 s) \Rightarrow \frac{d}{dt} (a^3 s) = 0 \quad (6.51)$$

Закон сохранения энтропии в локальной форме

$$3\dot{a}s + a\dot{s} = 0 \quad (6.52)$$

Барион-фотонное отношение

При температуре ниже по крайней мере ~ 100 ГэВ барионное число сохраняется:

$$(n_B - n_{\bar{B}})a^3 = \text{const} \quad (6.53)$$

$$sa^3 = \text{const} \Rightarrow \quad (6.54)$$

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = \text{const} \quad (6.55)$$

– хорошая характеристика барионной асимметрии (сейчас $\Delta_B = n_B/s$)

Барион-фотонное отношение:

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (6.56)$$

При температуре $T \lesssim 0.5$ МэВ (электроны и позитроны становятся нерелятивистскими и аннигилируют)

$$\left\langle T_\nu = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T_\gamma \right\rangle$$

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3 = \left(2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} \right) \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (6.57)$$

$$\Delta_B = \left\langle n_{\bar{B}} \approx 0 \right\rangle = \frac{n_B}{s} = \frac{n_B n_\gamma}{n_\gamma s} = \eta_B \frac{n_\gamma}{s} =$$

$$= \frac{2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3}{\left(2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} \right) \frac{4\pi^2}{90} T^3} \eta_B = 0.14 \eta_B \quad (6.58)$$

$$\boxed{\Delta_B = 0.14 \eta_B} \quad (6.59)$$

$$\eta_B = (6.10 \pm 0.20) \cdot 10^{-10} \quad (6.60)$$

$$\Delta_B = 0.87 \cdot 10^{-10} \quad (6.61)$$

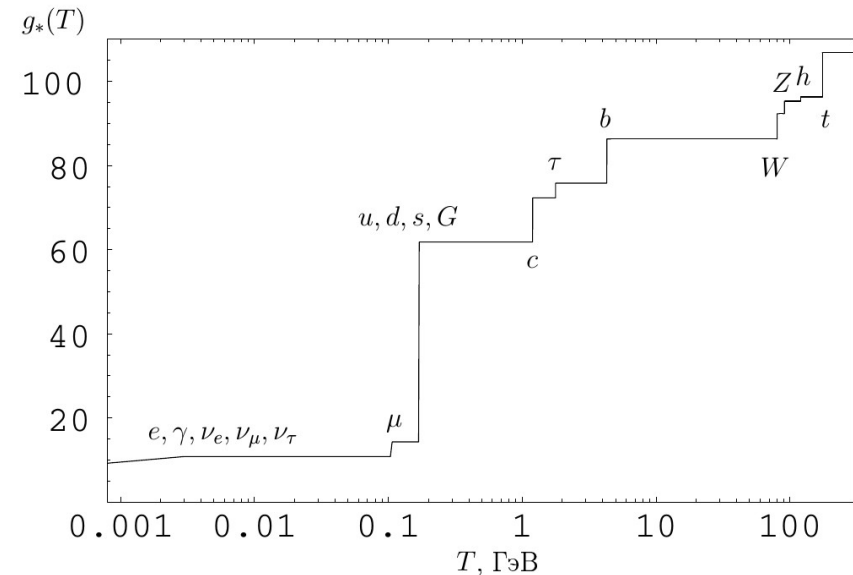
Частицы стандартной модели и $g_*(T)$

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (6.62)$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \quad (6.63)$$

Лептоны		Кварки	
$\nu_e(?)$	$e(0.511 \text{ МэВ})$	$u(1.5\text{--}3.0 \text{ МэВ})$	$d(3.0\text{--}7.0 \text{ МэВ})$
$\nu_\mu(?)$	$\mu(105.7 \text{ МэВ})$	$c(1.15\text{--}1.35 \text{ ГэВ})$	$s(0.07\text{--}0.12 \text{ ГэВ})$
$\nu_\tau(?)$	$\tau(1.78 \text{ ГэВ})$	$t(169.3\text{--}173.5 \text{ ГэВ})$	$b(4.1\text{--}4.3 \text{ ГэВ})$
Калибровочные бозоны			
$\gamma(0)$	$G(0)$	$Z(91.2 \text{ ГэВ})$	$W(80.4 \text{ ГэВ})$
Бозон Хиггса $h(125.26 \pm 0.21 \text{ ГэВ})$			

$$X \text{ — бозон: } m_X \sim 10^{15} \div 10^{16} \text{ ГэВ (?) } \quad (6.64)$$



Фазовые переходы в ранней Вселенной

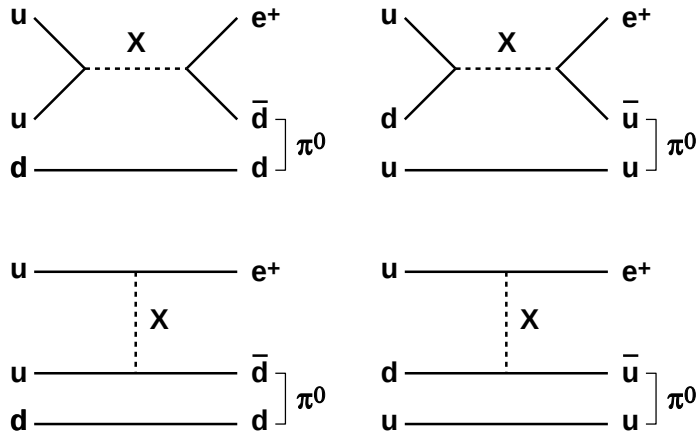
Очень высокие температуры, РД-стадия (см. (5.55))

$$H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}; \quad M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}}; \quad t = \frac{1}{2H} \quad (6.65)$$

1. Фазовый переход GUT

ТВО приводят к нестабильности протона

$$p \rightarrow e^+ + \pi^0 \quad (6.66)$$



Какова масса X ?

Ширина распада протона:

$$\tau_p > 10^{32} \text{ лет}; \quad \Gamma_p = \frac{1}{\tau_p} \sim \frac{\alpha_X^2}{M_X^4} m_p^5, \quad \alpha_X = \frac{g_X^2}{4\pi} \quad (6.67)$$

g_X – константа связи, в амплитуде в каждой вершине

$\alpha_X \sim 1$

$1/M_X^2$ – в амплитуде пропагатора X

m_p^5 – по размерности

$$M_X \sim (\alpha_X^2 m_p^5 \tau_p)^{1/4} \Rightarrow M_X \gtrsim 10^{16} \text{ ГэВ} \star \quad (6.68)$$

Масса M_X возникает от спонтанного нарушения симметрии при $T_{GUT} \sim 10^{16}$ ГэВ.

$g_* \sim 200$ при $T > T_{GUT} \Rightarrow t_{GUT} \sim 10^{-39}$ сек \star

$$S(GUT) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1) \quad (6.69)$$

GUT-перехода могло и не быть, т.к. инфляция могла закончиться при более низкой температуре.

2. Электрослабый фазовый переход

$$M_W \approx 80 \text{ ГэВ}, \quad M_Z \approx 91 \text{ ГэВ} \Rightarrow T_W \approx 100 \text{ ГэВ} \quad (6.70)$$

$$T > T_W \Rightarrow g_* \sim 100 \Rightarrow t_W = 10^{-11} \div 10^{-10} \text{ сек} \quad (6.71)$$

$$SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1) \rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{em} \quad (6.72)$$

3. Конфайнмент кварков и образование кваркового конденсата. Адронизация

$$T_{QCD} \approx 170 \text{ МэВ} \quad (6.73)$$

$$g_* \approx 60 \Rightarrow t_{QCD} \sim 10^{-5} \text{ сек} \quad (6.74)$$

Два события:

1. Конфайнмент кварков, «адронизация»
2. Нарушение киральной симметрии кварков – кварки u, d, s обретают массы (кварковый конденсат)

Порядок следования неизвестен.

Типы и механизмы фазовых переходов

Механизм Хиггса

- Фазовый переход является результатом возникновения ненулевого среднего чего-то, например – поля $\langle \varphi \rangle_T$ при снижении температуры до некоторого критического значения.
- Равновесное значение поля минимизирует большой ТД потенциал

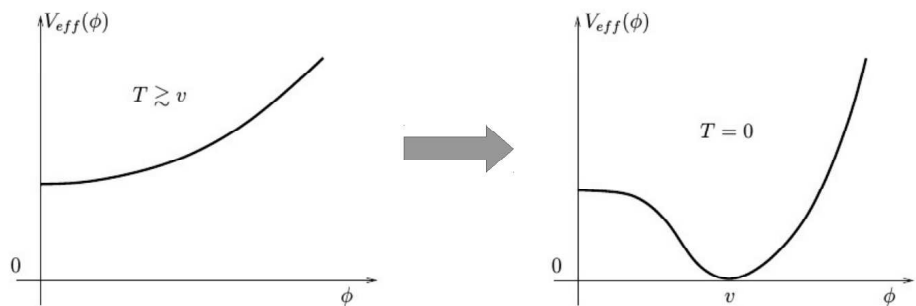
$$\Phi_G = U - TS - \mu N \quad (6.75)$$

На РД-стадии $\mu \sim 0$. Остается свободная энергия:

$$F = U - TS = \Omega V_{eff}(T, \varphi) \quad (6.76)$$

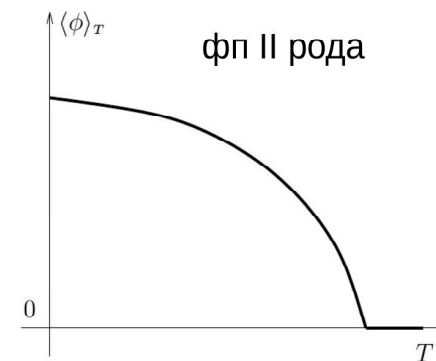
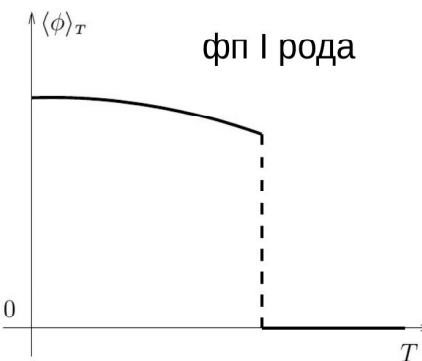
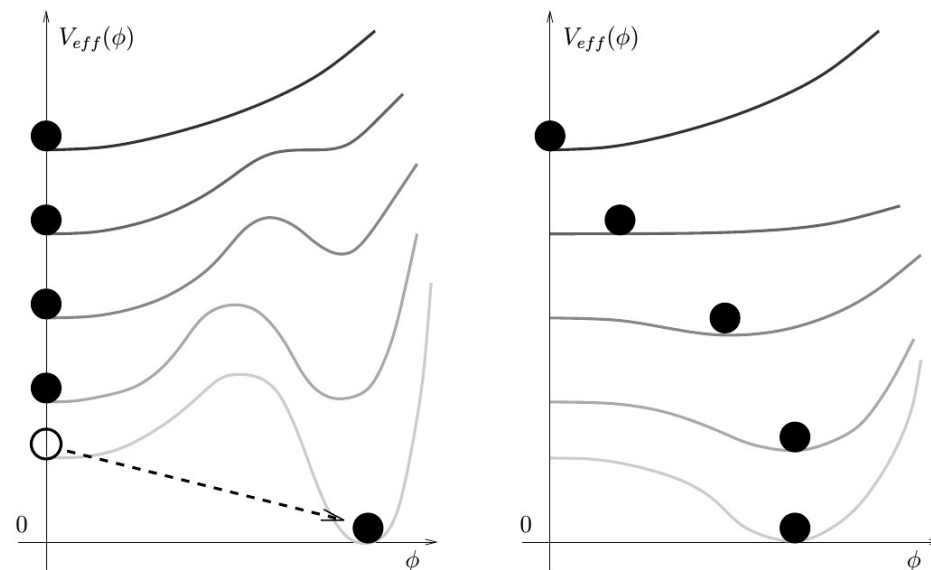
Ω – объем, $V_{eff}(T, \varphi)$ – эффективный потенциал поля при температуре T .

Симметрия, существующая при больших температурах ($T > v$), может быть нарушена при $T = 0$:



Вопрос: как именно происходит трансформация $\langle \varphi \rangle_T = 0 \rightarrow \langle \varphi \rangle_T \neq 0$?

Фазовые переходы I и II рода



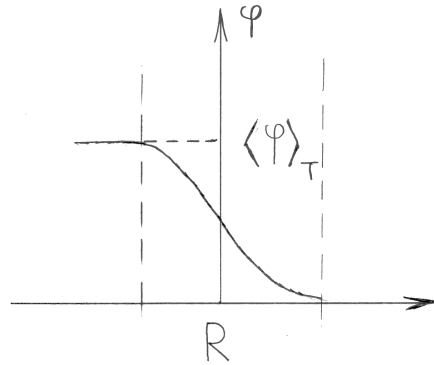
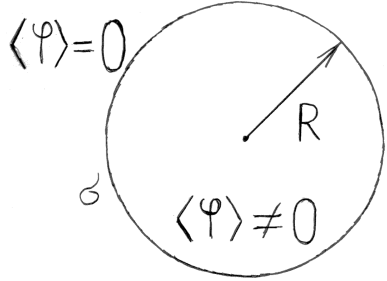
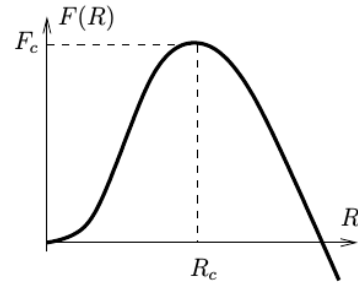
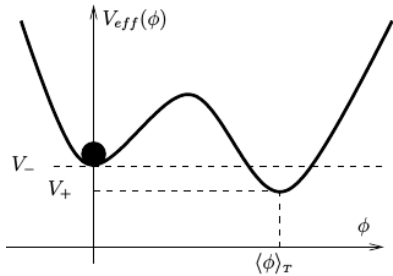
Кроссовер – похоже на I рода, но нет резкого скачка

- Пример первого рода – жидкость \rightarrow пар
- Примеры II рода – точка Кюри, киральный переход QCD
- Пример кроссовера – вода \rightarrow пар при высоких давлениях

Ф.п. II рода происходит плавно во всем пространстве.

Ф.п. I рода во всем пространстве произойти не может, т.к. должен быть преодолен потенциальный барьер свободной энергии.

Ф.п. I рода: Вероятность образования растущего пузыря новой фазы



Баланс объемной и поверхностной энергии:

$$\Delta V = V_- - V_+ > 0 \quad (6.77)$$

$$F(R) = 4\pi R^2 \sigma - \frac{4\pi}{3} R^3 \Delta V \quad (6.78)$$

Если $R < R_c$ пузырек схлопывается
 Если $R > R_c$ пузырек растет $\Rightarrow R_c$ – критический пузырек

$$\frac{\partial F}{\partial R} = 0 \rightarrow R_c; \quad R_c = \frac{2\sigma(T)}{\Delta V(T)} \quad (6.79)$$

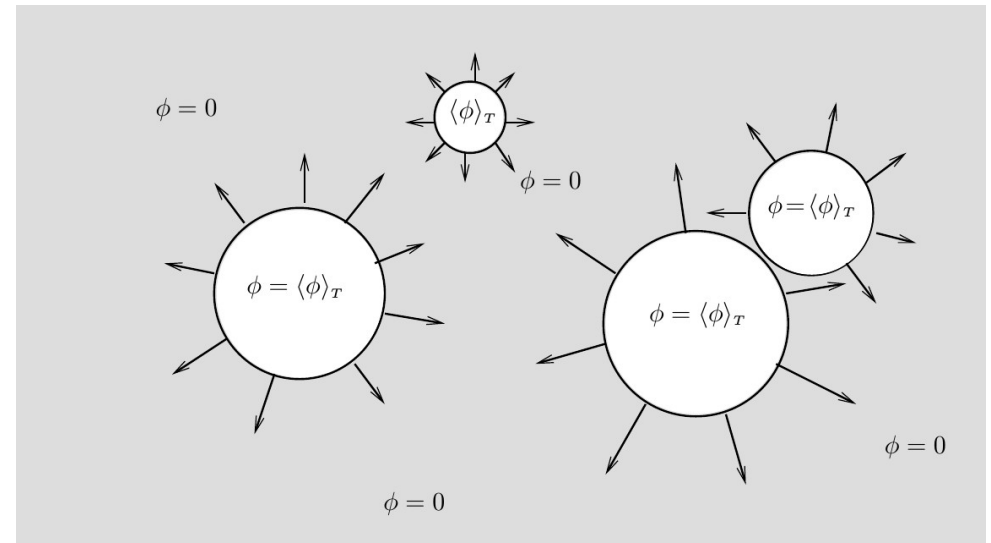
$$F_c(T) = 4\pi \left(\frac{2\sigma}{\Delta V} \right)^2 \sigma - \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\sigma}{\Delta V} \right)^3 \Delta V = \frac{16\pi}{3} \frac{\sigma^3}{\Delta V^2} \quad (6.80)$$

Вероятность флуктуации в единицу времени в единице объема до F_c : больцмановский множитель + размерность:

$$\Gamma \sim AT^4 e^{-F_c/T} \quad (6.81)$$

A слабо зависит от T , справедливо при $F_c \gg T$ (Формула Аррениуса)

Из (6.80), (6.81) видно, что для перехода необходимо существенное переохлаждение ($\phi = 0, \Delta V > 0$).



- Условие перехода: вероятность образования 1 пузыря в хаббловском объеме за хаббловское время ~ 1 :

$$AT^4 e^{-F_c/T} \sim H^4(T) = \left(\frac{T^2}{M_{Pl}^*}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{F_c(T)} \ln \left[A \left(\frac{M_{Pl}^*}{T}\right)^4 \right] \quad (6.82)$$

Как считать температуру перехода

- Используя какую-то технику (аналитику, расчеты на решетке) считать $V_{eff}(T, \varphi)$
- Через $V_{eff}(T, \varphi)$ считать $\Delta V(T)$
- Считать $\sigma(T)$ (вариационная задача: профиль $\varphi(r)$ вблизи $r = R$ должен минимизировать свободную энергию)
- Через $\Delta V(T)$ и $\sigma(T)$ найти $F_c(T)$ (формула (6.80))
- Решать относительно T уравнение (6.82) $\rightarrow T_c$

Пример: электрослабый переход (на что это может быть похоже)

$$T \sim 100 \text{ ГэВ} \quad (6.83)$$

$$H^{-1} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim 1 \text{ см} \quad (6.84)$$

$$R_c \sim \frac{1}{T} \sim 10^{-15} \div 10^{-16} \text{ см} \quad (6.85)$$

1 пузырек размером 10^{-15} см в 1 см^3 .

Пузырьки сливаются и заполняют все пространство.

Для $m_H = 125 \text{ ГэВ}$ может иметь место не ф.п. I рода, а гладкий кроссовер.

Бариогенезис – генерация барионной асимметрии

Два основных варианта:

1. На фазе постинфляционного разогрева.
2. На этапе горячего Большого взрыва.

Рассматриваем только вариант 2.

Предполагается динамическая генерация избытка барионов

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} \approx 0.86 \cdot 10^{-10} \quad (6.86)$$

из первоначально симметричного состояния.

Условия Сахарова:

1. Несохранение барионного числа
2. Нарушение ТД-равновесия
3. Нарушение CP -инвариантности

1. – очевидно.

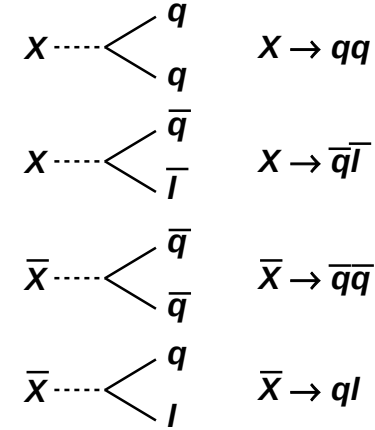
2. – следует из 1. Если барионное число не сохраняется, то в состоянии равновесия число барионов было бы равно числу антибарионов, так как в состоянии равновесия концентрации вообще всех ультрарелятивистских частиц одинаковы, если ничто не мешает им превращаться друг в друга.

3. – нетривиально.

Существуют 2-3 десятка моделей бариогенезиса. Рассматриваем только одну:

GUT бариогенезис

Те же частицы X , $M_X \sim 10^{16}$ ГэВ, которые могут приводить к распаду протона, сами могут распадаться на кварки и лептоны:



Из-за CP -нарушения парциальные вероятности каналов могут не совпадать:

$$P(X \rightarrow qq) = r \quad (6.87)$$

$$P(X \rightarrow \bar{q}l) = 1 - r \quad (6.88)$$

$$P(\bar{X} \rightarrow \bar{q}\bar{q}) = \bar{r} \quad (6.89)$$

$$P(\bar{X} \rightarrow ql) = 1 - \bar{r} \quad (6.90)$$

Если было $n_X = n_{\bar{X}}$, то после распада X -частиц образуется избыток барионного заряда:

$$\begin{aligned} n_B &= n_X r \cdot \frac{2}{3} + n_X (1 - r) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \\ &+ n_X \bar{r} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + n_X (1 - \bar{r}) \cdot \frac{1}{3} = \\ &= n_X (r - \bar{r}) \quad (6.91) \end{aligned}$$

X и \bar{X} распадаться должны чаще, чем рождаться!
(химическое неравновесие)

Температура GUT-бариогенезиса $10^{15} \div 10^{16}$ ГэВ (как и фазовый переход GUT)

Интересная возможность: если CP-нарушение зависит от пространства (например, является результатом спонтанного нарушения симметрии), то могут образоваться домены вещества и антивещества.

Электрослабый бариогенезис:

T от 10^{12} ГэВ до 100 ГэВ.

Если работает электрослабый бариогенезис, то энтропия заведомо сохраняется только при $T < 100$ ГэВ.