

Лекция 8

Сечение аннигиляции частиц темной материи. Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов. Эпоха реионизации. Температурная история Вселенной. Фоновая метрика в конформном времени.

Сечение аннигиляции частиц темной материи

Сначала найдем $n_X(t_0)$ и Ω_X , потом выразим из них $\sigma v = \sigma_0 = \text{const}$.

Условие замораживания ТМ против аннигиляции (7.68):

$$\tau(T_f) = \frac{1}{n_X(T_f)} \frac{1}{\langle \sigma_{ann}(T_f) v(T_f) \rangle} = \frac{1}{H(T_f)} \Rightarrow \quad (8.1)$$

$$n_X(T_f) = \frac{H(T_f)}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} \quad (8.2)$$

Настоящее время:

$$n_X(t_0) = \left(\frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right)^3 n_X(T_f) \quad (8.3)$$

$$s a^3 = \text{const} \Rightarrow s \sim \frac{1}{a^3} \Rightarrow \quad (8.4)$$

$$n_X(t_0) = \frac{s_0}{s(t_f)} n_X(T_f) \quad (8.5)$$

$$s_0 = \frac{4\pi}{90} (2T_\gamma^3 + \frac{7}{8} 2 \cdot 3 \cdot T_\nu^3) \approx 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3} \quad (8.6)$$

$$s(t_f) = g_*(t_f) \frac{4\pi^2}{90} T_f^3 \Rightarrow \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} n_X(t_0) &= \frac{s_0}{s(t_f)} \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} = \frac{M_{Pl}}{1.66 \sqrt{g_*(t_f)}} = \\ &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{s_0}{\sqrt{g_*(t_f)} T_f M_{Pl} \left(\frac{4\pi^2}{1.66 \cdot 90} \right)} = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \end{aligned} \quad \star (8.8)$$

$$n_X(t_0) = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \quad (8.9)$$

Найдем Ω_X . Подставляя в (8.9) T_f из (7.80):

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right]} \Rightarrow \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \Omega_X &= 2 \cdot \frac{M_X n_X(t_0)}{\rho_c} = \sqrt{2 - \text{из } X + \bar{X}} = \\ &= \sqrt{s_0 = 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}; M_{Pl} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ};} \\ &\quad \rho_c = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{\Gamma}{\text{см}^2} \sqrt{\quad} = \\ &= \frac{3 \cdot 10^{-10}}{(\sigma_0 / \Gamma \text{эВ}^{-2}) \sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \star \end{aligned} \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) перепишем как уравнение для σ_0 :

$$\sigma_0 = \frac{1}{\Omega_X} \times \frac{3 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \quad (8.12)$$

$\Omega_X = 0.26$ – известно.

$g_* = 10 \div 100$ – в зависимости от T_f

Как же найти численную величину σ_0 , если ни M_X , ни g_* точно не известны?

(8.12) решается методом итераций (4 итерации дают 6 значащих цифр):

$$\begin{aligned} M_X = 1 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.76 \div 2.5) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 100 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.82 \div 2.7) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 10 \text{ ТэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.88 \div 2.9) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\sigma_0 \sim a^2 \sim \frac{1}{M_X^2} \Rightarrow M_X \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sim 10 \text{ ТэВ} \quad (8.14)$$

⇒ Тяжелая частица. Тяжелая частица со слабым взаимодействием – WIMP.

В современную эпоху, для астрофизических n_X :

$$\tau_{ann} = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} \quad (8.15)$$

$$r_{ann} = \frac{1}{\tau_{ann}} \times n_X = n_X^2 \langle \sigma_{ann} v \rangle \quad (8.16)$$

$$\langle \sigma_{ann} v \rangle = \sigma_0 \sim 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (8.17)$$

Это значение используется для вычисления сигнала аннигиляции темной материи в современных условиях.

n_X зависит от того, куда смотрим: внутренние области Галактики, внешние области, каспы и т.д.

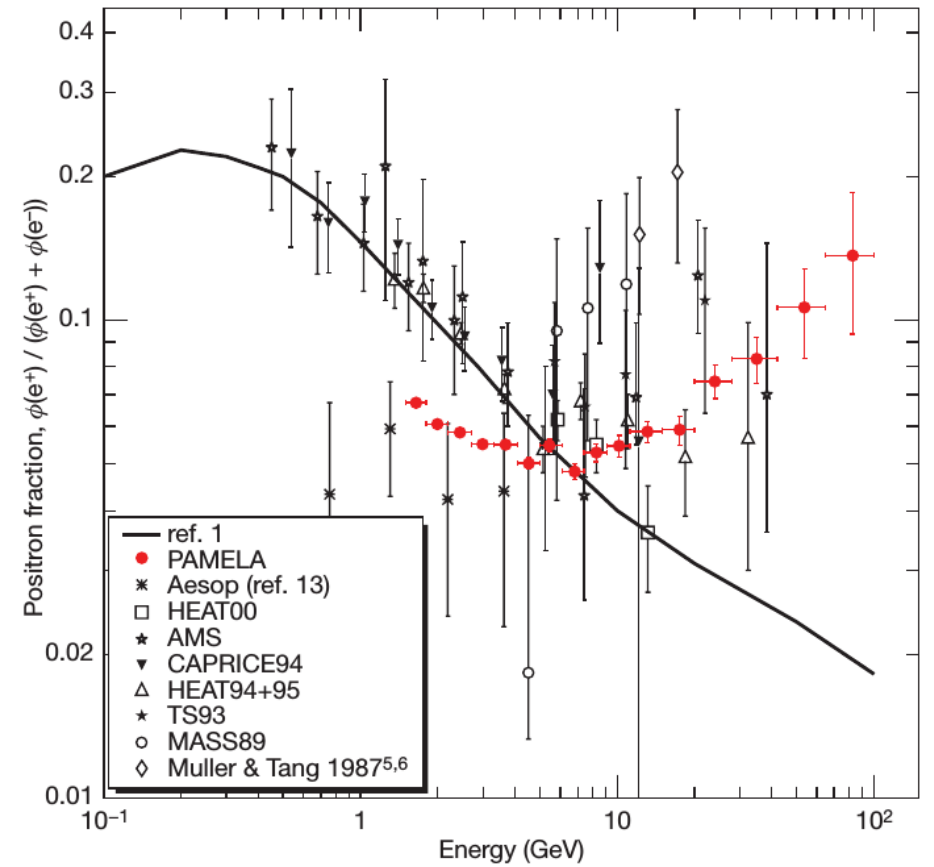


Figure 2 | PAMELA positron fraction with other experimental data and with secondary production model. The positron fraction measured by the PAMELA experiment compared with other recent experimental data (see refs 5–7, 11–13, 30, and references within). The solid line shows a calculation¹ for pure secondary production of positrons during the propagation of cosmic rays in the Galaxy without reacceleration processes. Error bars show 1 s.d.; if not visible, they lie inside the data points.

Nature, V. 458 (2009), P.607-609

Сечения (8.17) на 2-3 порядка не хватает, чтобы объяснить наблюдаемый поток позитронов в космических лучах ⇒ нужен «буст-фактор» $100 \div 1000$.

Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов

Температура рекомбинации

Энергия связи электрона в водороде 13.6 эВ.
Температура рекомбинации масштаба 13 эВ?

- Предполагаем, что все ядра – протоны.
- Предполагаем, что рекомбинация идет равновесно.
- $T \sim 10$ эВ $\Rightarrow p^+$ и e^- – нерелятивистские

$$n_e = g_e \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T}; \quad g_e = 2 \quad (8.18)$$

$$n_p = g_p \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T}; \quad g_p = 2 \quad (8.19)$$

$$n_H = g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T}; \quad g_H = 4 \quad (8.20)$$

1. Температура рекомбинации определяется условием:

$$\boxed{n_p(T) = n_H(T)} \quad (8.21)$$

Это одно уравнение, но неизвестных 4:

T, μ_e, μ_p, μ_H

Нужно еще 3 уравнения.

2. Сохранение n_B :

$$n_p + n_H = n_B = \eta_B n_\gamma(T) \quad (8.22)$$

$$\eta_B \approx 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.23)$$

$$n_\gamma(T) = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \Rightarrow \quad (8.24)$$

$$n_p + n_H = 6.1 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (8.25)$$

3. Химическое равновесие:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H \quad [p + e \leftrightarrow H + \gamma] \quad (8.26)$$

4. Электронейтральность (сохранение заряда)

$$n_p = n_e \quad (8.27)$$

Решение

$$n_p n_e = g_p g_e \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p + \mu_e - m_p - m_e)/T} \quad (8.28)$$

$$m_p + m_e = m_H + \Delta_H, \quad \Delta_H = 13.6 \text{ эВ} \quad (8.29)$$

(8.27), (8.26) \Rightarrow

$$n_p^2 = g_p g_e \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T} e^{-\Delta_H/T} \quad (8.30)$$

Из (8.20):

$$e^{(\mu_H - m_H)/T} = \frac{n_H}{g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2}} \Rightarrow \quad (8.31)$$

$$n_p^2 = \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} \quad (8.32)$$

К форме Саха:

$$X_p = \frac{n_p}{n_B}, \quad X_H = \frac{n_H}{n_B}, \quad X_p + X_H = 1 \quad (8.33)$$

Из (8.32)

$$X_p^2 \left(\frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = X_H \frac{1}{n_B} = (1 - X_p) \frac{1}{n_B} \Rightarrow \quad (8.34)$$

$$X_p + n_B X_p^2 \left(\frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.35)$$

$$n_B = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (8.36)$$

$$X_p + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} X_p^2 \eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.37)$$

$X_p = 0.5 \Rightarrow$

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.38)$$

Малый множитель:

$$\eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} \sim 10^{-17} \Rightarrow \quad (8.39)$$

сразу видно, что $T_r \ll \Delta_H$.

Уравнение приводится к виду $x = \ln(Ax^\alpha)$:

$$\frac{\Delta_H}{T} = \ln \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\zeta(3)\eta_B 2\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{\Delta_H} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta_H}{T} \right)^{3/2} \right] \quad (8.40)$$

Учитываем электроны и барионы, уже связанные в гелии:

$$\eta_B = 0.75 \times 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.41)$$

В логарифмическом порядке (первая итерация):

$$T_{rec}^{(1)} = 0.37 \text{ эВ} \quad (8.42)$$

Точное решение (метод итераций)

$$\boxed{T_{rec} = 0.321 \text{ эВ}} \quad (8.43)$$

Когда?

Красное смещение:

$$T(t) = T_0 \frac{a_0}{a(t)} = T_0(z+1) \Rightarrow \quad (8.44)$$

$$z_{rec} = \frac{T}{T_0} - 1 \approx 1370 \quad (8.45)$$

Красное смещение РД-ДМ перехода

$$z \approx 3 \cdot 10^3 \Rightarrow \quad (8.46)$$

Рекомбинация происходит на ДМ- (пылевидной) стадии.

$$t = \frac{2}{3H} \quad (8.47)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho \quad (\text{общее уравнение Фридмана}) \quad (8.48)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{1}{6\pi G \rho_M(t_{rec})}} = \sqrt{\frac{M_{Pl}^2}{6\pi \rho_M(T_{rec})}} \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned}\rho_M(T_{rec}) &= \rho_B + \rho_{CDM} = \frac{\rho_B + \rho_{CDM}}{\rho_c} \frac{\rho_c}{\rho_B} \cdot \rho_B = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} \rho_B = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p n_B(T_{rec}) = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B n_\gamma(T_{rec}) = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \Rightarrow\end{aligned}\quad (8.50)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_{rec}^3}} \approx 350 \text{ тыс. лет} \quad (8.51)$$

Каковы были химические потенциалы μ_p, μ_H, μ_e на момент рекомбинации?

$$\begin{cases} g_p \left(\frac{m_p T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_H \left(\frac{m_H T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_{rec}} \\ g_p \left(\frac{m_p T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_e \left(\frac{m_e T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T_{rec}} \\ \mu_p + \mu_e = \mu_H \end{cases} \quad (8.52)$$

Решение ★:

$$\mu_p = m_p - \Delta_H + T_{rec} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{m_H}\right)^{3/2} \right] \quad (8.53)$$

$$\mu_e = m_e - \Delta_H + T_{rec} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_p}{m_H}\right)^{3/2} \right] \quad (8.54)$$

$$\mu_H = m_H - \Delta_H + T_{rec} \ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^{3/2} \right] \quad (8.55)$$

Во всех случаях

$$\mu_i = m_i - \delta\mu_i; \quad \delta\mu_i \ll m_i \quad (8.56)$$

Каков хим. потенциал атомов водорода сейчас?

$$\begin{aligned}n_H &\approx \eta_B n_\gamma = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_0^3 = \\ &= g_H \left(\frac{m_H T_0}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_0}\end{aligned}\quad (8.57)$$

$$e^{(\mu_H - m_H)/T_0} = \sqrt{g_H = 4} = \frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T_0}{m_H}\right)^{3/2} \Rightarrow \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned}\mu_H &= m_H + T_0 \ln \left[\frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T_0}{m_H}\right)^{3/2} \right] = \\ &= m_H - \delta\mu_H^0; \quad \delta\mu_H^0 = 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ ГэВ}\end{aligned}\quad (8.59)$$

Длительность рекомбинации

Диапазон температур, когда $\exp(\Delta_H/T)$ отличается от $\exp(\Delta_H/T_{rec})$ в e раз:

$$\left| \frac{\Delta_H}{T \pm \Delta T} - \frac{\Delta_H}{T_{rec}} \right| = 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_{rec}} \approx \frac{T_{rec}}{\Delta_H} = \frac{0.32}{13.6} \approx 0.02 \quad (8.60)$$

$$T = \frac{\text{const}}{a} \Rightarrow \frac{\Delta a}{a_{rec}} = \frac{\Delta T}{T_{rec}} = 0.02 \ll 1 \quad (8.61)$$

Время рекомбинации много меньше хаббловского времени.

Последнее рассеяние фотонов (закалка фотонов)

Не то же самое, что рекомбинация – позже!

Томсоновское сечение рассеяния фотонов:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m_e^2} \approx 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \quad (8.62)$$

Время свободного пробега фотона по отношению к томсоновскому рассеянию:

$$\tau_\gamma = \frac{1}{\sigma_T n_e(T)} \quad (8.63)$$

Из (8.32):

$$\begin{aligned} n_e^2(T) &= n_p^2(T) = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} = \\ &= \setminus n_H \cong \eta_B \cdot n_\gamma \text{ т.к. рекомбинация} \\ &\quad \text{практически завершена} \setminus = \\ &= \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 e^{-\Delta_H/T} \quad (8.64) \end{aligned}$$

Время последнего рассеяния определяется

$$\tau_\gamma(T_f) \simeq H^{-1}(T_f) \simeq t_f \quad (8.65)$$

t_f мало отличается от $t_{rec} = 350$ тыс. лет, поэтому для оценки T_f можно в правой части уравнения использовать t_{rec} вместо t_f :

$$\frac{1}{\sigma_T} \frac{1}{\left[\left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 e^{-\Delta_H/T_f}\right]^{1/2}} = t_{rec} \quad (8.66)$$

$$e^{\Delta_H/T_f} = \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \quad (8.67)$$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} = \ln \left[\sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \right] \quad (8.68)$$

В п.ч. $T_f \rightarrow T_{rec} \Rightarrow$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} \cong \ln \left[\sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \right] \quad (8.69)$$

$$T_{rec} = 0.32 \text{ эВ} \quad (8.70)$$

$$\eta_B = 0.75 \cdot 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.71)$$

$$t_{rec} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ лет} \Rightarrow \quad (8.72)$$

$$\boxed{T_f = 0.27 \text{ эВ}} \quad (8.73)$$

Аналогично (8.51)

$$t_f = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_f^3}} \approx 460 \text{ тыс. лет} \quad (8.74)$$

$$z_f = \frac{0.27 \text{ эВ}}{2.73 \times 8.6 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}} = 1140 \approx 1100 \quad (8.75)$$

Горизонт на момент последнего рассеяния ($z \approx 1100$)

Момент последнего рассеяния обычно отождествляют с рекомбинацией: $f \rightarrow r$

Можно (довольно грубо) найти, считая, что Вселенная всегда была пылевидной:

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_r(t_r)} \quad (8.76)$$

Из уравнения Фридмана:

$$H_r^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M(t_r) \quad (8.77)$$

$$\rho_M(t_r) = \rho_{M,0} \left(\frac{a_0}{a_r} \right)^3 = \rho_{M,0} (1 + z_r)^3 \quad (8.78)$$

$$\rho_{M,0} = \rho_c \Omega_M \quad (8.79)$$

$$l_{H,r} = \frac{2}{\sqrt{\frac{8\pi}{3} G \rho_c \Omega_M (1 + z_r)^3}} = \sqrt{\rho_c = \frac{H_0^2}{\frac{8\pi}{3} G}} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}} \quad (8.80)$$

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}} \quad (8.81)$$

Сейчас этот размер растянут в $a_0/a_r = 1 + z_r$ раз:

$$l_{H,r}(t_0) = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1 + z_r}} \quad (8.82)$$

Современный горизонт:

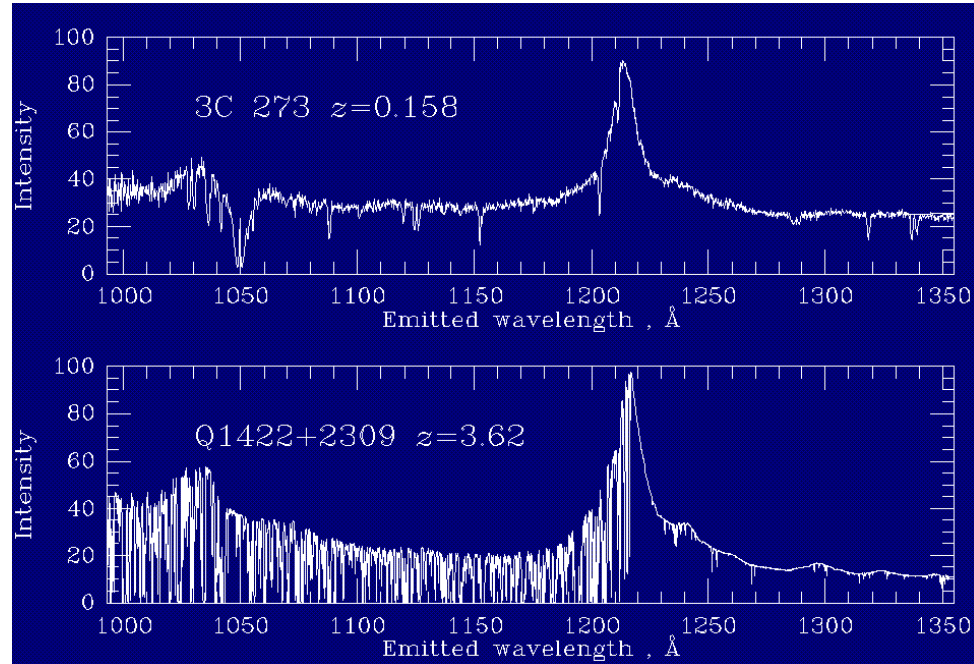
$$l_{H,0} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a_0 \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} [\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda H_0 t} \right)]^{2/3}} = \frac{2}{H_0} \times 1.8 \quad (8.83)$$

Это в ~ 30 раз больше, чем $l_{H,r}(t_0)$ – видимая часть Вселенной содержит $\sim 3 \cdot 10^4$ причинно не связанных областей на момент рекомбинации.

Отчего же микроволновой фон однороден с точностью $\sim 10^{-4}$ везде? – «**проблема горизонта**».

Эпоха реионизации

Лайман-альфа-лес (Lyman-alpha forest) в спектрах квазаров



Основной пик – Ly_α
Линии поглощения - тоже Ly_α



- Ly_α -линия поглощения сдвинутая разным красным смещением облаков водорода.
- Чем дальше квазар, тем гуще лес.
- При $z > 6$ густота леса перестает расти. Почему?

Реионизация водорода светом первых звезд (звездное население III типа),
 $6 < z < 20$, $150 \cdot 10^6 - 1000 \cdot 10^6$ лет.

Остаточная оптическая толщина $\tau \simeq 0.09 \pm 0.03$

Краткая история Вселенной (13.8 млрд. лет)

Событие	T	z	t
Горячий Большой взрыв	—	—	0
GUT-переход (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Бариогенезис (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Электрослабый переход	100 ГэВ	10^{15}	10^{-11} сек
Закалка темной материи(?)	$0.05 \div 300$ ГэВ	$10^{11} \div 10^{15}$	$2 \cdot 10^{-12} \div 10^{-4}$ сек
Адронизация: конфайнмент кварков	170 МэВ	$7 \cdot 10^{11}$	10^{-5} сек
Закалка нейтрино	1.5 МэВ	$5 \cdot 10^9$	0.3 сек
Закалка нейтронов	0.75 МэВ	$3 \cdot 10^9$	1.2 сек
Нуклеосинтез	65 кэВ	$3 \cdot 10^9$	4.5 мин

Событие	T	z	t
РД \rightarrow МД переход	1 эВ	3000	120 тыс. лет
Рекомбинация электронов	0.32 эВ	1370	350 тыс. лет
Последнее рассеяние фотонов	0.27 эВ	1140	460 тыс. лет
Реоинизация	$50 \div 15$ К°	$20 \div 6$	$150 \div 1000$ млн.лет
Начало эры ДеСиттера	4.5 К°	0.65	7.6 млрд.лет
Сейчас	2.73 К°	0.0	13.8 млрд.лет

Фоновая метрика, конформное время.

$$d\eta = dt/a; \quad dt = ad\eta; \quad dt/d\eta = a \quad (8.84)$$

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - dx^i dx^i] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (8.85)$$

Перепишем уравнения в производных по конформному времени:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta} \frac{d}{dt} = a \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \quad (8.86)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} \quad (8.87)$$

Уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (8.88)$$

(i, j) -компонента уравнений Эйнштейна ★

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi Gp \Rightarrow 2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp \quad (8.89)$$

Ковариантный закон сохранения энергии

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0 \quad (8.90)$$

Космологические решения $a(\eta)$ ★:

$$\text{РД-стадия: } a(\eta) = \text{const} \cdot \eta; \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/2} \quad (8.91)$$

$$\text{ДМ-стадия: } a(\eta) = \text{const} \cdot \eta^2; \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/3} \quad (8.92)$$

$$\Lambda\text{-стадия: } a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}; \quad \eta = -\text{const} \cdot e^{-H_{dS}t}, \quad \eta < 0 \quad (8.93)$$

$$H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (8.94)$$

Коэффициенты в (8.91) и (8.92) – через a_0 и измеримые величины

РД-стадия ($T \lesssim 100 \text{ ГэВ}$)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}G\frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \quad (8.95)$$

Сохранение энтропии:

$$g_*a^3T^3 = g_*^0a_0^3T_0^3 \quad (8.96)$$

$$T^3 = \frac{g_*^0}{g_*} \frac{a_0^3}{a^3} T_0^3 \Rightarrow T = \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \frac{a_0}{a} T_0 \quad (8.97)$$

$$\rho_c \Omega_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*^0T_0^4 \Rightarrow T_0^4 = \frac{\Omega_{rad}\rho_c}{\frac{\pi^2}{30}g_*^0} \quad (8.98)$$

Подставляем (8.98) в (8.97), (8.97) в (8.95):

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{8\pi}{3}G\rho_c\right) \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right) \Omega_{rad} = \\ &= H_0^2 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right) \Omega_{rad} \quad (8.99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_0}^a \frac{da}{a^2 \dot{a}} = \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{\dot{a}} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \text{\ (8.99)\ } = \\
&= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \sqrt{\Omega_{rad}}} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0^2} \frac{a}{\sqrt{\Omega_{rad}}}
\end{aligned} \tag{8.100}$$

$$\eta = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \frac{a}{a_0} \tag{8.101}$$

ДМ-стадия (но не Λ)

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c \tag{8.102}$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M = \frac{8\pi}{3} G \rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \tag{8.103}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_M^0}{\rho_c} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow H^2 = H_0^2 \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{8.104}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \sqrt{\Omega_M} (a_0/a)^{3/2}} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \tag{8.105}
\end{aligned}$$

$$\eta^2 = \frac{a}{a_0} \frac{4}{a_0^2 H_0^2 \Omega_M} \tag{8.106}$$

Конформные времена $\eta_0, \eta_r, \eta_{eq}$ – через a_0 и измеримые величины

Уравнение Фридмана:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4} \tag{8.107}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_{z+1}^{\infty} \frac{a_0}{a^2} \frac{da}{dz} \frac{dz}{a} = \int_{z+1}^{\infty} \frac{a_0}{(z+1)^2} dz = \\
&= \int_{z+1}^{\infty} -\frac{dz}{a_0 H(z)} = \\
&= \frac{1}{a_0 H_0} \int_z^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4}} \tag{8.108}
\end{aligned}$$

Конформное время современной эпохи:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times \\ &\times \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + (1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times I(\Omega_M) \quad (8.109) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_M = 0.31, \quad \Omega_\Lambda = 0.69, \quad \Omega_{rad} = 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \\ I(\Omega_M) \approx 0.89 \quad (8.110) \end{aligned}$$

Конформное время последнего рассеяния (рекомбинации):

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{2} \int_{z_r}^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) \quad (8.111) \end{aligned}$$

\mathcal{F} считается:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} = \\ \left\langle \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} = 1 + z_{eq} \star \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \\ &\mathcal{F} = 0.017 \quad (8.112) \end{aligned}$$

Легко считается угол видимости горизонта рекомбинации:

$$\Delta\theta_r = \eta_r / \eta_0 = 0.019; \quad \Delta\theta_r = 1.1^\circ \quad (8.113)$$

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+z_{eq}}}; \quad \mathcal{F} = 0.0076 \quad (8.114)$$

$$\frac{\eta_r}{\eta_{eq}} = 2.3; \quad \frac{\eta_0}{\eta_{eq}} = 1.2 \cdot 10^2 \quad (8.115)$$

η_r и η_{eq} близки, но не совпадают.

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}} (\sqrt{2}-1) \quad (8.116)$$

$$a_0 \eta_r = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \left(\sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \right) \quad (8.117)$$

$$a_0 \eta_0 = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M); \quad I(\Omega_M) = 0.89 \quad (8.118)$$

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} (a_{eq} \eta_{eq}) = \frac{a_0}{a_{eq}} l_H^{eq} \quad (8.119)$$

– до каких размеров сейчас растянулся горизонт на момент перехода РД→ДМ. И т.д.

$$a_0 \eta_{eq} = 120 \text{ Мпк} \quad (8.120)$$

$$a_0 \eta_r = 510 \text{ Мпк} \quad (8.121)$$

$$a_0 \eta_0 = 14.1 \text{ Гпк} = 46.0 \text{ Млрд. св. лет} \quad (8.122)$$