

Лекция 12

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.
Анизотропия реликтового излучения.

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.

Важна в двух отношениях:

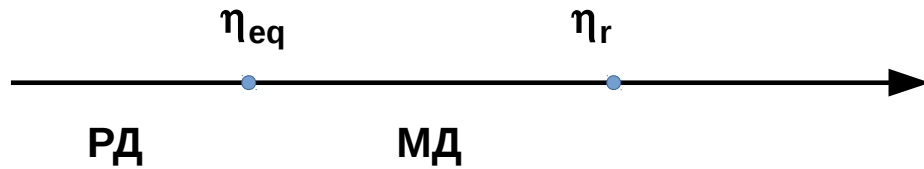
- Определяет структуру анизотропии реликтового микроволнового фона
- Формирует начальные условия для последующего формирования структур – галактик и т.д.

Вплоть до рекомбинации барион-фотонная компонента среды $B\gamma$ остается релятивистской, в том смысле, что

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_r) \cong 0.85 \quad (12.1)$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_{eq}) \cong 0.30 \quad (12.2)$$

$B\gamma$ рассматривается как единая среда.



Длинноволновые адиабатические моды CDM

- Входят под горизонт между η_{eq} и η_r (или позже)
- Современная длина волн больше $2\pi a_0 \eta_{eq} = 750$ Мпк (см. (8.120)).
- Нерелятивистская CDM доминирует, работает однокомпонентная модель, осцилляций в компоненте CDM нет,
- возмущения CDM растут как масштабный фактор, но никогда не входят в нелинейный режим ($\delta < 0.03$,

см. (10.158))

Адиабатические моды, входящие под горизонт на РД-стадии

Уже известно: Релятивистская компонента на РД-стадии осциллирует с фиксированной фазой (10.120)

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[\cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] \quad (12.3)$$

$$\Phi_{(i)} = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \quad (12.4)$$

Осцилляции $B\gamma$ продолжаются до рекомбинации.

- Существенно новое явление: Потенциал главной УР осциллирующей компоненты $\Phi(\eta)$ индуцирует возмущения темной материи, которые уже на РД-стадии логарифмически растут во времени.
- Релятивистская $B\gamma$ -материя осциллирует до самой рекомбинации, и остаточных возмущений $\sqrt{R} \sim 5 \cdot 10^{-5}$ не хватило бы для перехода в нелинейный режим и формирования структур.
- После рекомбинации барионная материя сваливается в потенциальные ямы, сформированные CDM еще до рекомбинации, и только благодаря этому возникают структуры.
- Изучаем возмущения CDM, индуцированные потенциалом (10.120) (или (12.3))

Возмущения темной материи на РД-стадии

Потенциалы считаем заданными уравнениями (10.120) (или (12.3)).

Покомпонентные уравнения ковариантного сохранения ЭИ (11.20), (11.21):

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1+w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1+w_\lambda)\Phi' \quad (12.5)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \quad (12.6)$$

$$\lambda = CDM \Rightarrow w_\lambda = u_{s,\lambda}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 3\Phi' \quad (12.7)$$

$$v'_{CDM} + \frac{1}{\eta}v_{CDM} = -\Phi \quad (12.8)$$

Из (12.8), методом вариации постоянных:

$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} \eta\Phi(\eta) d\eta \quad (12.9)$$

η_0 – неопределенная постоянная.

Решение расходится в нуле при всех $\eta_0 \neq 0 \Rightarrow \eta_0 = 0$.

Следовательно конечное решение есть

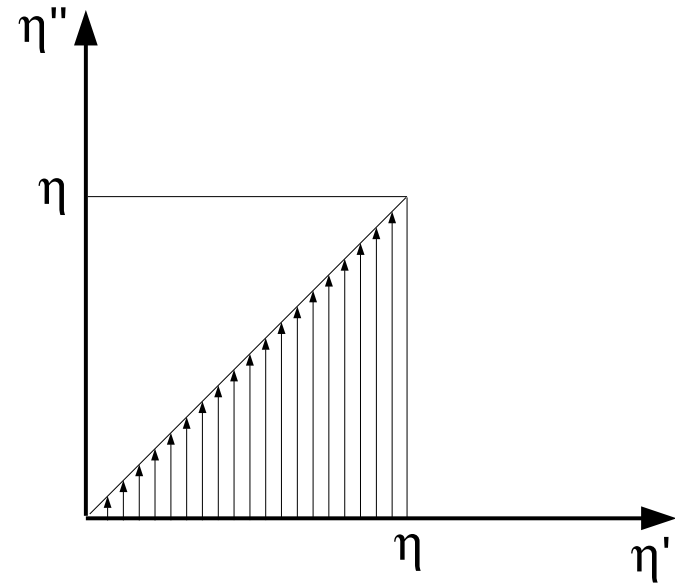
$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \eta\Phi(\eta) d\eta \quad (12.10)$$

Из (12.7) сразу получается:

$$\delta_{CDM}(\eta) = 3\Phi(\eta) + C - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \quad (12.11)$$

$$\eta = 0 \Rightarrow C = -3\Phi_{(i)} + \delta_{CDM(i)} \Rightarrow \quad (12.12)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \end{aligned} \quad (12.13)$$



$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} d\eta' \int_0^{\eta'} d\eta'' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') &= \int_0^{\eta} d\eta'' \int_{\eta''}^{\eta} d\eta' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') = \\ \int_0^{\eta} d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \int_{\eta''}^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} &= \int_0^{\eta} d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left(\frac{\eta}{\eta''} \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^\eta d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left(\frac{\eta}{\eta''} \right) \end{aligned} \quad (12.15)$$

Интеграл сходится и считается, для мод глубоко под акустическим горизонтом ($u_s k \eta \gg 1$) получается ★:

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM(i)} - 9\Phi_{(i)} \left[\ln(u_s k \eta) + \mathbf{C} - \frac{2}{3} \right] \quad (12.16)$$

$\mathbf{C} = 0.577 \dots$ – постоянная Эйлера.

Из (11.51), (11.53) следует $\delta_{CDM(i)} = -\frac{3}{2}\Phi_{(i)} \Rightarrow$

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left[\ln \left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \quad (12.17)$$

Есть логарифмический рост возмущения плотности CDM , скорость которого определяется амплитудами потенциалов $9\Phi_{(i)}$

Важны потенциалы CDM , в которые потом сваливается обычное вещество:

Из (11.12) (00 компонента Лин. Ур. Э.)

$$k^2 \Phi + 3 \frac{a'}{a} \Phi' + 3 \frac{a'^2}{a^2} \Phi = -4\pi G a^2 \delta \rho_{CDM} \quad (12.18)$$

В пределе $u_s k \eta \gg 1$ остается только член $k^2 \Phi \Rightarrow$

$$\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G \frac{a^2(\eta)}{k^2} \rho_{CDM}(\eta) \delta_{CDM} \quad (12.19)$$

– падает немного медленнее, чем $1/a(\eta)$.

На РД-стадии $\Phi_{CDM}(\eta)$ мал по сравнению с релятивистским $\Phi(\eta)$ из-за малости ρ_{CDM} по сравнению с ρ_{tot} .

Но вклад CDM становится главным при переходе на МД-стадию.

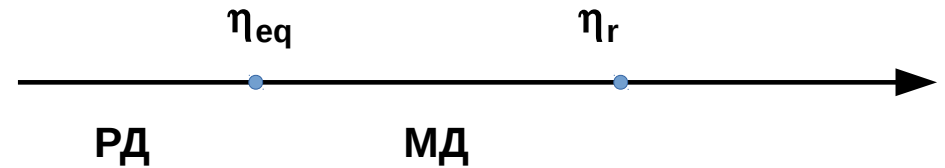
Уже на РД-стадии есть логарифмический рост возмущения плотности CDM

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left[\ln \left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \quad (12.20)$$

Потенциал CDM падает немного медленнее, чем $1/a(\eta)$:

$$\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G \frac{a^2(\eta)}{k^2} \rho_{CDM}(\eta) \delta_{CDM} \quad (12.21)$$

Возмущения темной материи на МД-стадии



Так как CDM является доминирующей компонентой на МД-стадии после η_{eq} , то заранее ясно, что нужно ожидать роста δ_{CDM} пропорционально $a(\eta)$ на фоне постоянных потенциалов $\Phi_{CDM}(\eta)$, как это предсказывает упрощенная однокомпонентная модель адиабатических возмущений, см. (10.136) и (10.153).

Наивная оценка:

$$\begin{aligned}\delta_{CDM}(\eta) &= \delta_{CDM}(\eta_{eq}) \frac{a(\eta)}{a_{eq}} = \\ &= -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \left[\ln \left(\frac{k\eta_{eq}}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \approx \\ &\approx -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \ln(0.6k\eta_{eq}) \quad (12.22)\end{aligned}$$

Более точная оценка [Горбунов, Рубаков, Т.2, 6.2.1]:

$$\delta_{CDM}(\eta) \approx -\frac{27}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (12.23)$$

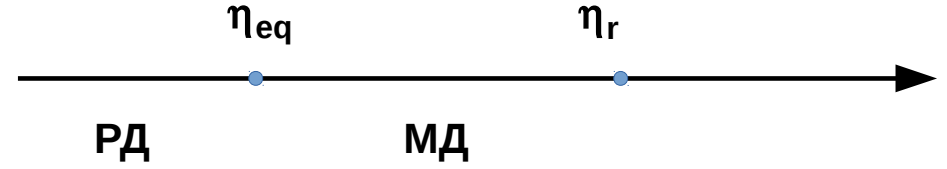
Решения не совсем сшиваются – есть переходная область в районе η_{eq} («ступенька», фактор 3/2).

Из (12.21):

$$\begin{aligned}\Phi_{CDM}(\eta) &= \frac{27}{2} \Phi_{(i)} 4\pi G \rho_{CDM} \frac{a^2}{k^2} \frac{a}{a_{eq}} \ln(0.2k\eta_{eq}) = \\ &= \left\langle \rho_{CDM} = \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \rho_{CDM}^0 = \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \Omega_{CDM} \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \right\rangle = \\ &= \frac{81}{4} \Phi_{(i)} \frac{a_0^2}{k^2} \Omega_{CDM} H_0^2 (1 + z_{eq}) \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (12.24)\end{aligned}$$

– не зависит от времени.

Возмущения барион-фотонной компоненты $B\gamma$ на МД-стадии до рекомбинации



• Продолжаются осцилляции, но на фоне растущего возмущения CDM-компоненты.

• Единство $B\gamma$ (приближение тесной связи):

$$v_\gamma \approx v_B \equiv v_{B\gamma} \quad (12.25)$$

• Для адиабатической моды:

$$\delta_B = 3 \frac{\delta T}{T}, \quad \delta_\gamma = 4 \frac{\delta T}{T} \Rightarrow \delta_B = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (12.26)$$

• Из-за того, что барионы нерелятивистские, переноса энергии от фотонов к барионам нет, поэтому ковариантное сохранение для барионов и фотонов выполняется отдельно.

• $B\gamma$ – субдоминантная компонента (CDM – доминантная).

С использованием потенциала (12.24) (или какого-то похожего, более точного), уравнений ковариантного сохранения и Эйнштейна для возмущений, ищется δ_γ .

Можно считать численно, можно приближенно аналитически (метод типа ВКБ).

Результат (ВКБ): [Горбунов, Рубаков, Т.2, 6.2.2]

$$R_B \equiv \frac{3\rho_B(\eta)}{4\rho_\gamma(\eta)} \propto a(\eta) \propto \eta^2 \quad (12.27)$$

$$R_B(\eta_{eq}) \approx 0.2; \quad R_B(\eta_r) \approx 0.6 \quad (12.28)$$

$$u_s^2(\eta) = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\delta \rho_\gamma / 3}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_B} = \frac{1}{3[1 + R_B(\eta)]} \quad (12.29)$$

$u_s \neq 1/\sqrt{3}$, но меняется не очень сильно.

$$\begin{aligned} \delta_\gamma(\eta) = \Phi_i \times \\ \times \left[-324 \cdot (1 + R_B) I(\Omega_M)^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1 + z_{eq}) \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{6}{(1 + R_B)^{1/4}} \cos \left(k \int_0^\eta u_s(\eta') d\eta' \right) \right] \quad (12.30) \end{aligned}$$

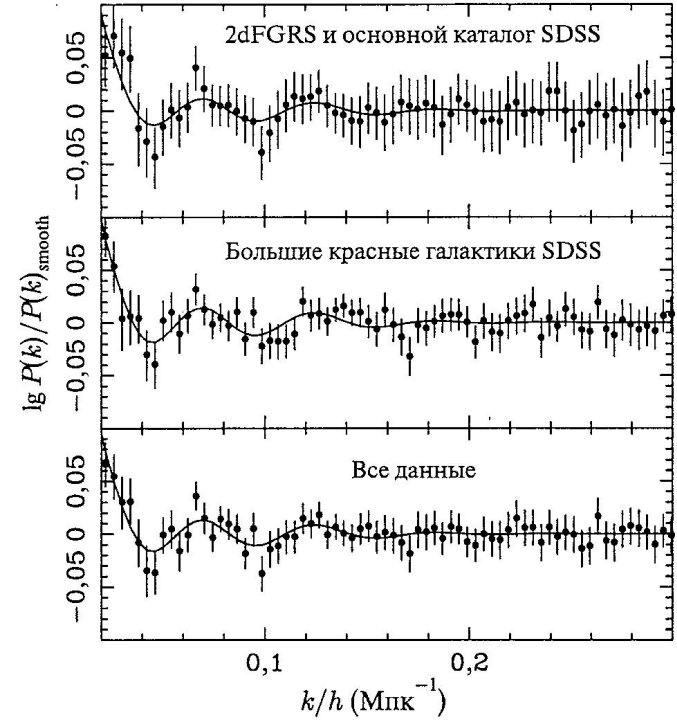
где (см. (8.109))

$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} \approx 0.89 \quad (12.31)$$

Осцилляции $B\gamma$ -материи до момента рекомбинации влияют на

- анизотропию микроволнового фона
- распределение барионной материи – *барионные осцилляции*

Корреляционная функция распределения материи (галактики)



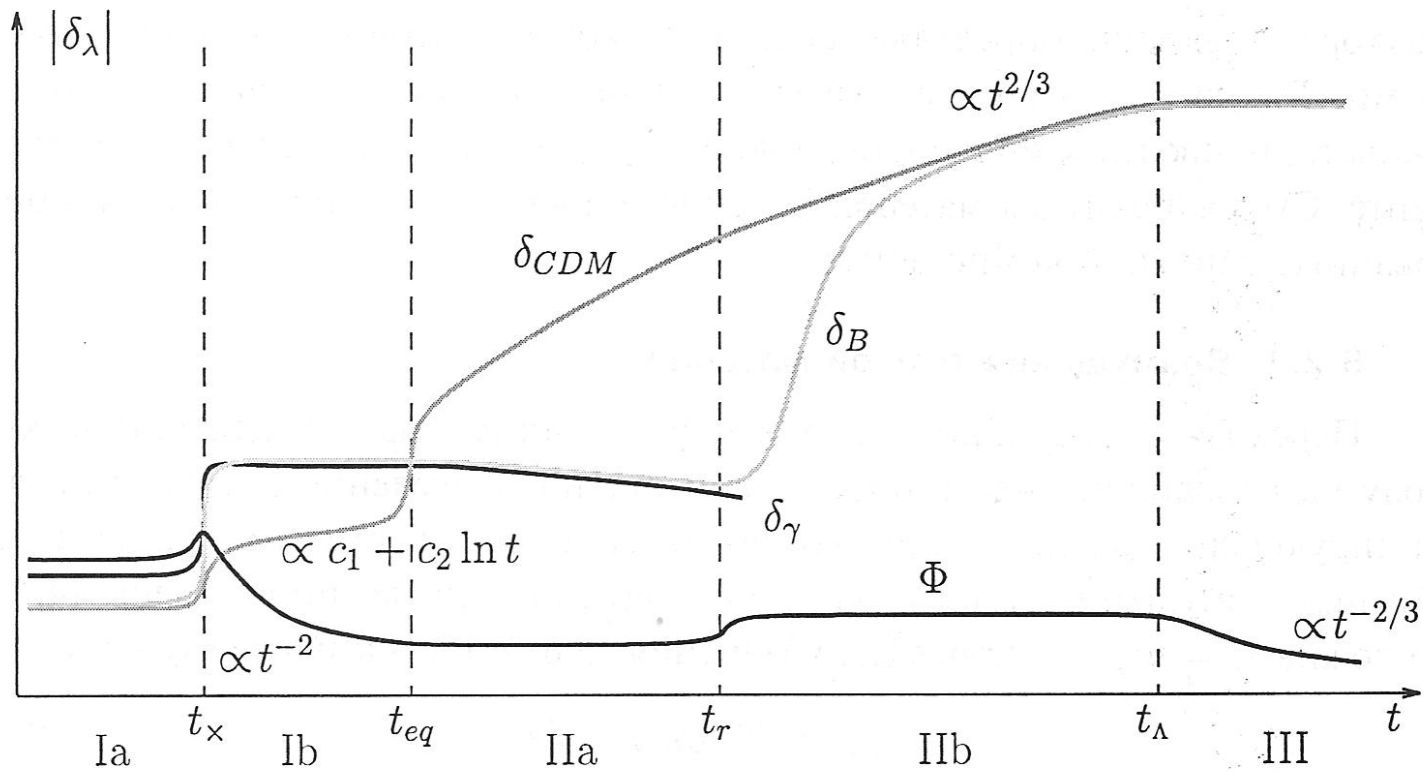


Рис. 6.1. Схематическое изображение эволюции линейных скалярных возмущений в адиабатической моде с фиксированным конформным импульсом k , входящих под горизонт на РД-стадии. Осцилляции не изображены. t_x — момент входа под горизонт. Поведение вблизи характерных времен ($t_x, t_{eq}, t_r, t_\Lambda$) показано условно. Масштаб по осям не соблюден. I — РД-стадия, доминируют возмущения релятивистской компоненты (раздел 4.2); Ia — до входа под горизонт моды не эволюционируют, их значения удовлетворяют соотношениям (5.22); Ib — вблизи входа под горизонт возмущение релятивистского вещества индуцирует логарифмически растущее возмущение CDM, формула (6.11); II — МД-стадия, доминируют возмущения CDM (раздел 4.3) с начальными данными для этой стадии, соответствующими формуле (6.11); IIa — возмущения барион-фотонной компоненты — звуковые волны — осциллируют согласно (6.36), кроме того, CDM-возмущения индуцируют возмущения барион-фотонной компоненты, формула (6.35); IIb — барионы отщеплены, их возмущения догоняют возмущения CDM, формулы (7.19), (7.18); III — ΛД-стадия, рост возмущений прекращается (раздел 4.4)

Анизотропия температуры реликтового излучения

Средняя температура реликтового микроволнового фона (СМВ, Cosmic Microwave Background)

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ К}$$

Есть два типа анизотропии:

- Диполь $\delta T/T \sim 10^{-3}$ – эффект Доплера соответствующий движению со скоростью $v = 369 \pm 2$ км/сек относительно сопутствующей системы в направлении созвездия Гидры. Часть амплитуды может иметь космологическое происхождение, но много меньше наблюдаемого значения.
- Более высокие мультиполи космологического происхождения $\delta T/T \sim 5 \times 10^{-5}$ – основа количественной космологии (но не единственная, что важно).

Дипольная компонента $l = 1$ вычитается.

Анизотропия температуры:

$$\delta T_0(\mathbf{n}) = T(\mathbf{n}) - T_0 \quad (12.32)$$

$$\frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (12.33)$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sin^{|m|} \theta \frac{d^{|m|} P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^{|m|}} e^{im\varphi} \quad (12.34)$$

$$a_{l,m}^* = (-1)^m a_{l,-m} \quad (\text{вещественность}) \quad (12.35)$$

$$a_{lm} = \int d\mathbf{n} \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \quad (12.36)$$

Y_{lm} – неоднородности масштаба π/l

- Коэффициенты a_{lm} линейно определяются через начальные возмущения \mathcal{R} и др. \Rightarrow
- Если начальные возмущения – гауссовы случайные поля, то и a_{lm} – набор гауссовых случайных величин.
- Если Вселенная совершенно изотропна и флуктуации случайны, то a_{lm} не должны коррелировать при различных l, m
- Рассматриваем ансамбль вселенных, таких как наша (!)
- Тогда, усредняя по ансамблю

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (12.37)$$

- Имея одну вселенную измерить C_l невозможно.
- Но для больших l есть много гармоник $m = -l, \dots, +l$, поэтому можно найти среднее C_l по набору, и можно даже проверить гауссов характер флуктуаций.

$$\langle C_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \quad (12.38)$$

Несмотря на то, что ансамбль вселенных нам недоступен, каую-то оценку C_l получить можно.

Коэффициенты a_{lm} зависят от ориентации системы координат, в которой они вычисляются.

• Корректны ли определения (12.37) и (12.38)?

Величины C_l – не зависят от системы координат:

$$\Theta_0(\mathbf{n}) \equiv \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} \quad (12.39)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 = \\ &= \sum_{m=-l}^{+l} \int d\mathbf{n}_1 \Theta_0(\mathbf{n}_1) Y_{lm}(\mathbf{n}_1) \int d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_2) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\ &= \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\ &= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle = \\ &= \frac{2l+1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.40) \end{aligned}$$

$$C_l = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.41)$$

Точного значения C_l , какое дало бы усреднение по ансамблю, не получим!

Какова ошибка (стандартное отклонение) $\delta C_l = ?$

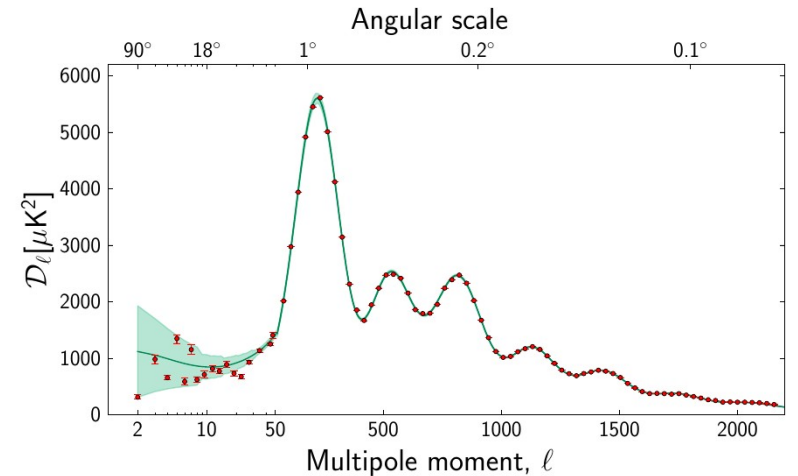
$$\begin{aligned} \sigma^2 C_l &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 \left(\sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 (\chi_{2l+1}^2) \langle |a_{lm}| \rangle^2 = \\ &= \frac{1}{(2l+1)^2} 2(2l+1) C_l^2 = \frac{2C_l^2}{2l+1} \Rightarrow \quad (12.42) \end{aligned}$$

$$\delta C_l \equiv \sqrt{\sigma^2 C_l} = \frac{C_l}{\sqrt{l + \frac{1}{2}}} \quad (12.43)$$

δC_l – космическая неопределенность, cosmic variance.

• Предсказания величины коэффициентов C_l не могут быть проверены с точностью, выше $\delta C_L \Rightarrow$

• Космологические параметры не могут быть определены со сколь угодно высокой точностью



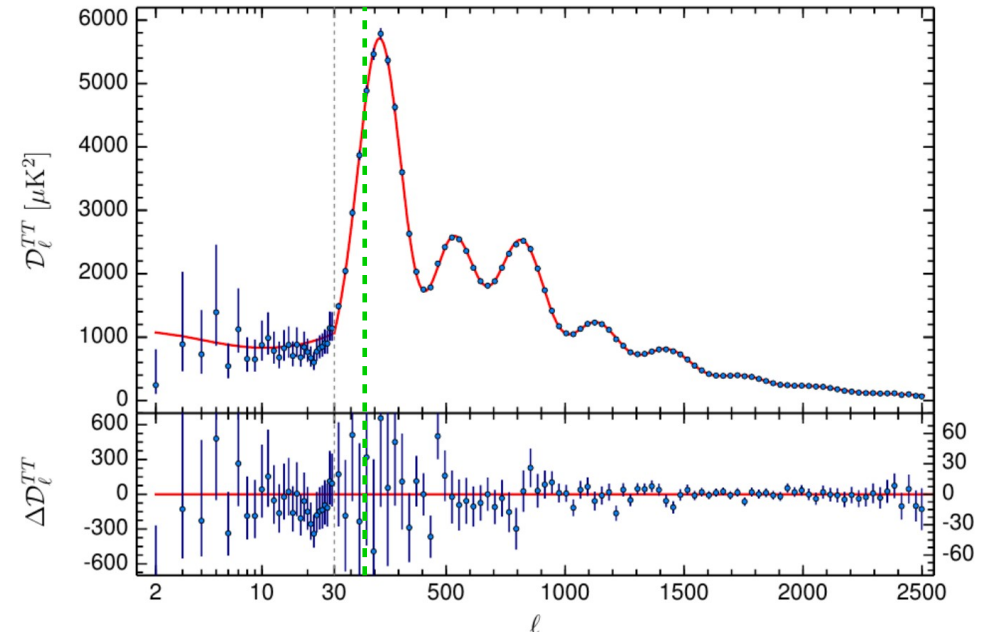
Выразим $\langle \delta T^2 \rangle$ через коэффициенты C_l .

Двухточечная корреляционная функция (усреднение по ансамблю вселенных):

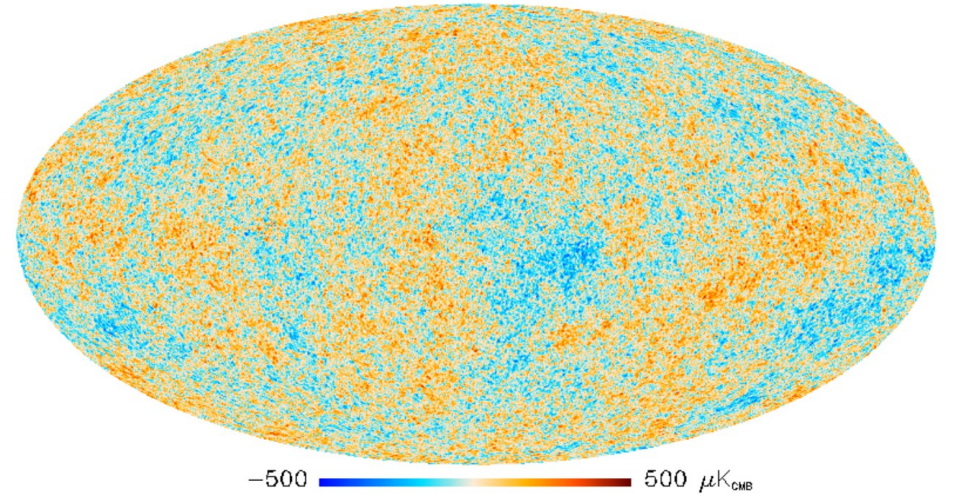
$$\begin{aligned}
\langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0(\mathbf{n}_2) \rangle &= \langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0^*(\mathbf{n}_2) \rangle = \\
&= T_0^2 \left\langle \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} a_{l_1 m_1} Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} a_{l_2 m_2}^* Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
&= T_0^2 \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{n}_2) = \\
&= \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle = C_l \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} = \\
&= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\
&= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
&= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} C_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.44)
\end{aligned}$$

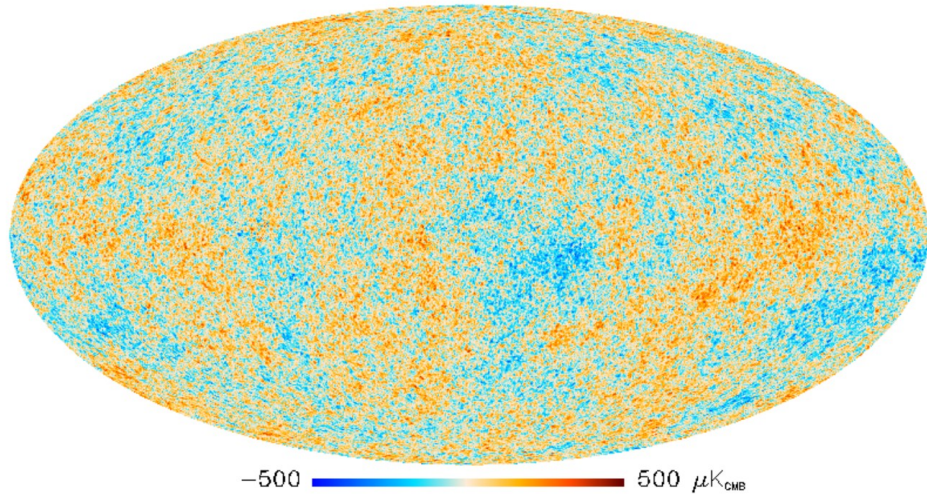
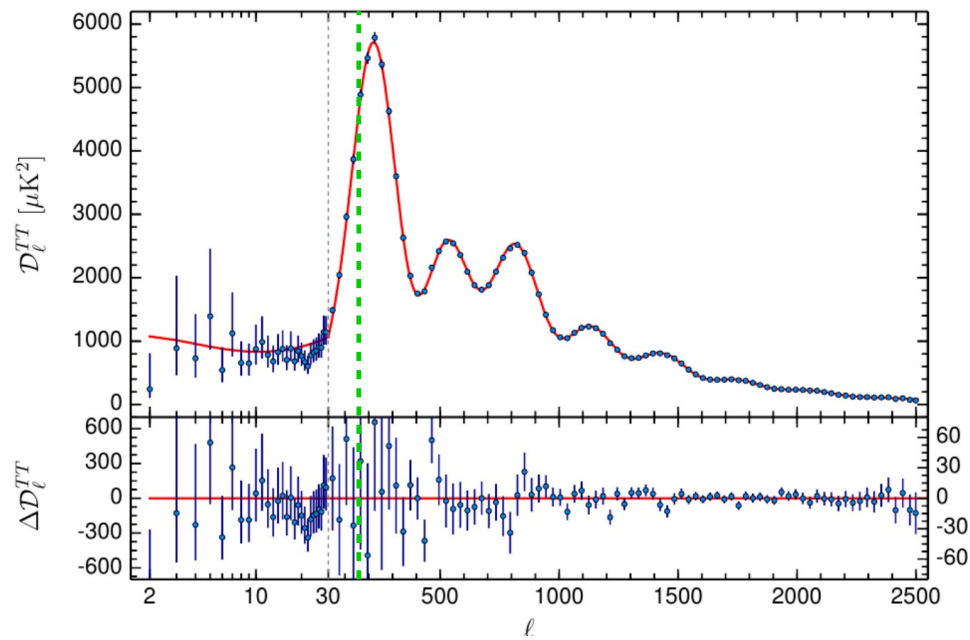
$$\begin{aligned}
\langle \delta T_0^2(\mathbf{n}) \rangle &= \langle P_l(1) = 1 \rangle = \\
&= T_0^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \approx \langle \text{большие } l \rangle \approx \\
&\approx T_0^2 \int_0^{\infty} \frac{l+1/2}{2\pi} C_l l \frac{1}{l} dl \cong \int_0^{\infty} T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l d(\ln l) \quad (12.45)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_l \equiv T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l} \quad (12.46)$$



$$\mathcal{D}_l^{TT} \equiv \mathcal{D}_l$$





Структура углового спектра анизотропии температуры СМВ – качественно

- Адиабатические моды, вошедшие под горизонт после рекомбинации никогда не осциллировали и на момент рекомбинации пребывали в константной моде

⇒

На масштабах больше горизонта событий на момент рекомбинации ожидается спектр флуктуаций, близкий плоскому спектру Гаррисона-Зельдовича.

- Моды, вошедшие под горизонт до рекомбинации, осциллировали с фиксированной начальной фазой, причем частота пропорциональна k

⇒

к поверхности последнего рассеяния придут с разными фазами и будет картина осцилляций в зависимости от l

- Граница между режимами:

Видимый размер горизонта рекомбинации 1.1° (стандартная линейка)

⇒

$l \approx 160 \pm$ некоторая переходная область.

- При больших k имеет место затухание осцилляций

⇒

Должны быть механизмы затухания, и они есть (см. далее).

Механизмы генерации анизотропии температуры СМВ

Поверхность последнего рассеяния имеет конечную толщину (продолжительность), но считаем ее равной нулю –

приближение мгновенного отщепления фотонов.

• Вопрос: Как влияют возмущения метрики на частоту фотонов при распространении от места излучения до места приема?

• Решим уравнения движения для фотонов и проследим за 0-компонентой импульса, которая связана с частотой.

Плоская метрика с возмущениями

$$ds^2 = a^2 \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (12.47)$$

По причине конформной инвариантности ЭМ поля (см. (4.23) и далее) геодезические фотонов можно вычислять в конформноплоской метрике с возмущениями $\gamma_{\mu\nu}$.

Уравнение геодезической в конформной метрике $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (12.48)$$

λ – произвольный параметр, $\gamma_{\nu\rho}^\mu$ – связности в конформной метрике.

Касательный вектор («импульс»)

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Rightarrow \quad (12.49)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \quad (12.50)$$

Получим уравнения для P^μ как функций конформного времени (избавимся от λ).

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = \frac{d\eta}{d\lambda} \frac{dP^\mu}{d\eta} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dP^\mu}{d\eta} = P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} \Rightarrow \quad (12.51)$$

$$P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \Rightarrow \quad (12.52)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0 \Rightarrow \quad (12.53)$$

0-компонента:

$$\boxed{\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^0 \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0} \quad (12.54)$$

1. Скалярные возмущения метрики, Ньютонова калибровка

(10.9), (10.16):

$$h_{00} = 2\Phi, \quad h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij} \quad (12.55)$$

Элементарно считаются ★:

$$\gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}h'_{00}, \quad \gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \quad \gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}h'_{ij} \Rightarrow \quad (12.56)$$

$$\gamma_{00}^0 = \Phi', \quad \gamma_{0i}^0 = \partial_i \Phi, \quad \gamma_{ij}^0 = -\Phi'\delta_{ij} \quad (12.57)$$

Из (12.54) ★

$$\frac{dP^0}{d\eta} + 2P^0 \frac{P^i}{P^0} \partial_i \Phi = 0 \quad (12.58)$$

$P^i/P^0 = n^i$ – единичный вектор вдоль направления движения (почему? ★) \Rightarrow

$$\frac{dP^0}{d\eta} = -2P_0 \mathbf{n} \nabla \Phi = 2\Phi' P^0 - 2(\Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi) P^0 \quad (12.59)$$

$$(\Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi) = \frac{d\Phi(\eta, \mathbf{x})}{d\eta} \quad (12.60)$$

$$\frac{dP^0}{d\eta} = 2 \left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) \cdot P^0 \quad (12.61)$$

Общее решение:

$$\ln P^0(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} 2 \left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) d\eta \quad (12.62)$$

η_0 – некоторая константа (не нужна).

Как изменится от η' до η'' :

$$\ln \left(\frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} \right) = \int_{\eta'}^{\eta''} 2 \left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) d\eta \quad (12.63)$$

$$\ln \left(\frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} \right) \cong \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} - 1 = \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} \Rightarrow \quad (12.64)$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = 2 \int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta - 2[\Phi(\eta'') - \Phi(\eta')] \quad (12.65)$$

Как изменяется P^0 нашли.

Связь частоты с P^0

Фотон испущен элементом среды с (конформной) скоростью U^μ , конформной частотой Ω в системе покоя среды.

Работаем в конформно-Ньютоновой системе координат, $\gamma_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$

Для скалярных возмущений в линейном порядке

$$U^0 = 1 - \Phi, \quad U^i = v^i \quad (12.66)$$

$$U_0 = 1 + \Phi, \quad U_i = -v^i \quad (12.67)$$

[ср. (9.57), (9.58) для возмущения скоростей.]

Можно локально выбрать координаты так, что будет $\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, а в качестве λ взять время в этой с.к.

Тогда:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega = \tilde{P}^0 \\ \tilde{U}_\mu = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Omega = \tilde{U}_0 \tilde{P}^0 \Rightarrow \quad (12.68)$$

Общековариантное выражение для частоты (скаляр: частота в той системе, где среда, испустившая фотон, неподвижна):

$$\Omega = U_\mu P^\mu \quad (12.69)$$

Подставляем (12.67) в (12.69)

$$\begin{aligned} \Omega &= (1 + \Phi)P^0 - v_i P^i = \left\langle n^i = \frac{P^i}{P^0} \Rightarrow P^i = n^i P^0 \right\rangle = \\ &= (1 + \Phi)P^0 - v_i n^i P^0 = (1 + \Phi - \mathbf{v}\mathbf{n})P^0 \quad (12.70) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega(\eta') = [1 + \Phi(\eta') - \mathbf{nv}(\eta')]P^0(\eta')} \quad (12.71)$$

Совершенно аналогичным образом, для приема фотона в момент η'' наблюдателем со скоростью $\mathbf{v}(\eta'')$

$$\Omega(\eta'') = [1 + \Phi(\eta'') - \mathbf{nv}(\eta'')]P^0(\eta'') \quad (12.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\mathbf{n}, \eta'') - \Omega(\mathbf{n}, \eta')}{\Omega(\mathbf{n}, \eta')} &\cong \backslash \text{до первого порядка} \backslash \cong \\ &\cong \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} + \Phi(\eta'') - \Phi(\eta') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') = \\ &= \backslash (12.65) \backslash = \\ &= 2 \int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta + \Phi(\eta') - \Phi(\eta'') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') \end{aligned} \quad (12.73)$$

- Сдвиг конформной частоты пропорционален самой частоте \Rightarrow
- Форма спектра не меняется \Rightarrow
- Наблюдается планковский спектр, с температурой (пропорциональна частоте), зависящей от направления

В момент рекомбинации были флуктуации температуры, обусловленные флуктуацией плотности $B\gamma$ -среды:

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \Rightarrow \quad (12.74)$$

$$\delta_\gamma = \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \frac{4\delta T}{T} = \frac{4\delta\omega}{\omega} \Rightarrow \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{4}\delta_\gamma \quad (12.75)$$

К этой величине величине добавится (12.73).

Окончательно:

$$\frac{\delta T}{T}(\eta_0) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + [\Phi(\eta_r) - \Phi(\eta_0)] + \quad (12.76)$$

$$+ 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + \quad (12.77)$$

$$+ \mathbf{nv}(\eta_r) - \mathbf{nv}(\eta_0) \quad (12.78)$$

- (12.76) – эффект Сакса-Вольфа (флуктуация температуры + флуктуация гравитационного потенциала)
- (12.77) – интегральный эффект Сакса-Вольфа (фотон падает в один потенциал, а выбирается из другого) – следствие нелинейной эволюции возмущений, есть корреляции с крупными структурами – скоплениями галактик
- (12.78) – эффект Доплера

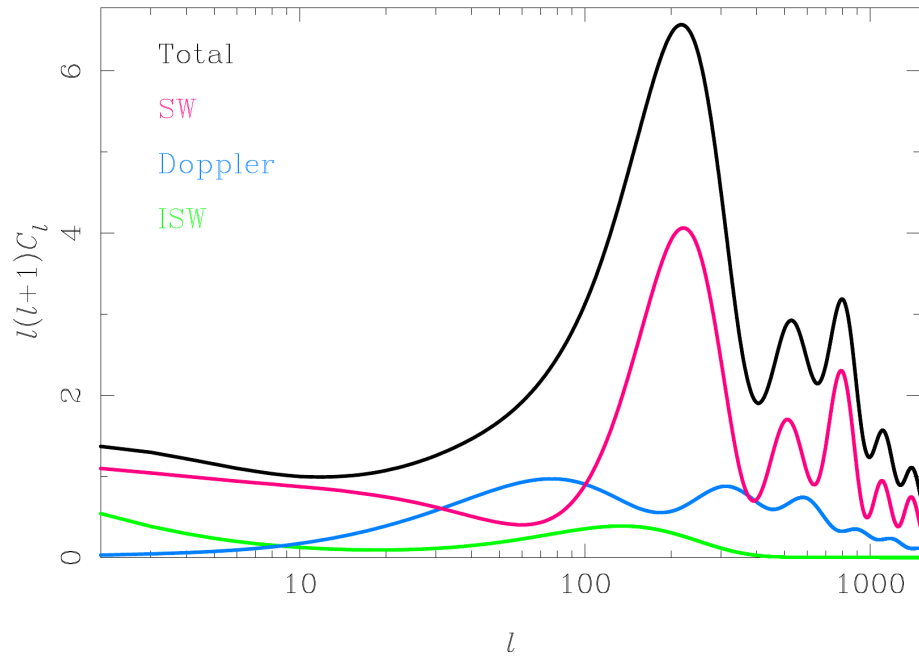
Вклад $\mathbf{nv}(\eta_0)$ (диполь) вычитается, вклад $\Phi(\eta_0)$ одинаков для всех направлений (монополь):

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) + \quad (12.79)$$

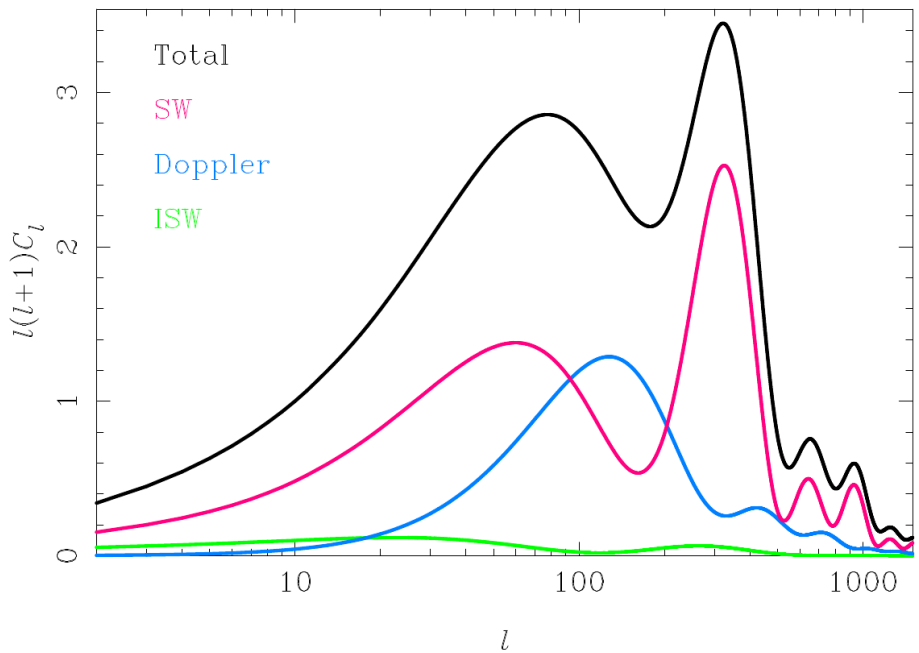
$$+ 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + \quad (12.80)$$

$$+ \mathbf{nv}(\eta_r) \quad (12.81)$$

Адиабатические моды:



Моды постоянной кривизны:



Затухание, демпфирование и другие более тонкие эффекты:

- Конечная толщина последней поверхности рассеяния \Rightarrow размывание анизотропии на малых масштабах.
- Рассеяние в эпоху реионизации \Rightarrow понижение контраста при всех масштабах.
- Эффект Силка (затухание Силка) – немонолитность среды $B\gamma$ вблизи поверхности рассеяния, транспортировка фотонов без изменения энергии \Rightarrow затухание осцилляций на малых масштабах.
- Линзирование – смазывает картинку на малых масштабах.
- Эффект Сюняева-Зельдовича (подогрев излучения быстрыми электронами).

