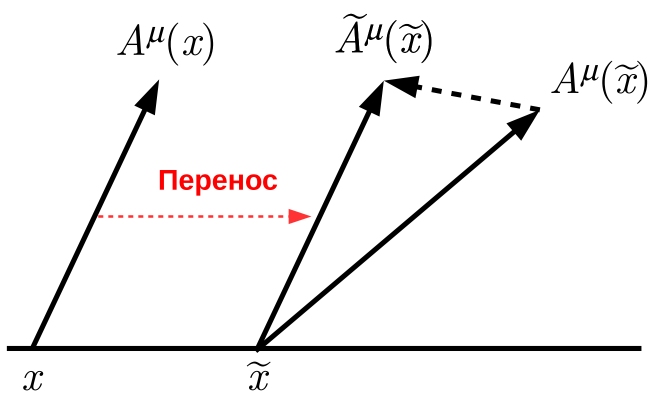
Лекция 2

Основы ОТО. II. Параллельный перенос, ковариантное дифференцирование, локально-лоренцевы системы отсчета и геодезические. Тензор кривизны.

Параллельный перенос

Почему дифференцирование вектора не приводит к тензору?

Проблема: Помимо изменения поля «самого по себе» есть еще добавка, связанная с изменением компонент поля из-за криволинейности системы координат.



Решение: Сначала параллельно перенести $A^\mu(x)$ в точку $\tilde{x}$, а потом сравнить с $A^\mu(\tilde{x})$!
Перенос (в линейном порядке):

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tag{2.1}$$

$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – *коэффициенты аффинной связности*

• Вообще говоря, определены совершенно независимо от $g_{\mu\nu}$ $\Rightarrow$
Геометрия кривого пространства определяется величинами $g_{\mu\nu}$ *и* $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$.

$$\begin{aligned} A^\mu(\tilde{x}) - \tilde{A}^\mu(\tilde{x}) &= A^\mu(\tilde{x}) - [A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda] = \\ &= \partial_\lambda A^\mu dx^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda = \\ &= (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu)dx^\lambda \equiv \nabla_\lambda A^\mu dx^\lambda \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu} \tag{2.3}$$

Требуем, чтобы $\nabla_\lambda A^\mu$ был тензором!
Это будет определять закон преобразования $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$.

$\nabla_\lambda B_\mu =?$
Скаляр *не должен меняться* при параллельном переносе:

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x})\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \tag{2.4}$$

$$[A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda]\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \Rightarrow \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} A^\mu(x)[\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) - B_\mu(x)] &= \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) \cong \\ &\cong \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda B_\mu(x) = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}A^\mu dx^\lambda B_\nu \Rightarrow \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) - B_\mu(x) = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}dx^\lambda B_\nu \tag{2.7}$$

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = B_\mu(x) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}dx^\lambda B_\nu \tag{2.8}$$

$$B_\mu(\tilde{x}) - \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = (\partial_\lambda B_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}B_\nu)dx^\lambda \Rightarrow \tag{2.9}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda B_\mu = \partial_\lambda B_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}B_\nu} \tag{2.10}$$

Правило Лейбница (легко проверяется ★):

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A^\mu)B_\nu + A^\mu(\nabla_\lambda B_\nu) \tag{2.11}$$

Правило дифференцирования тензоров высшего ранга следует из правила Лейбница:

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}A^\sigma)B_\nu + A^\mu(\partial_\lambda B_\nu - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}B_\sigma) = \partial_\lambda(A^\mu B_\nu) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}(A^\sigma B_\nu) - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}(A^\mu B_\sigma) \Rightarrow \tag{2.12}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda C^\mu_\nu = \partial_\lambda C^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}C^\sigma_\nu - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}C^\mu_\sigma} \tag{2.13}$$

Закон преобразования афинных связностей

$$\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}A^\nu - \text{Должно быть тензором!} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\lambda A^\mu)' &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\nabla_\alpha A^\beta) = \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\partial_\alpha A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma) = \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}(\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}A^\nu)' &= \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}A'^\gamma = \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}A^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}A^\alpha + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta \tag{2.17}$$

$A^\gamma, A^\alpha, A^\delta \to A^\varepsilon$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\varepsilon} \quad \Bigg| \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \tag{2.18}$$

$$\boxed{\Gamma'^\mu_{\lambda\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon} - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon}} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\beta}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} \equiv 0 \quad \bigstar \tag{2.20}$$

$$\boxed{\Gamma'^\mu_{\lambda\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\delta \partial x'^\lambda}} \tag{2.21}$$

Афинная связность – не тензор!

Кручение

$$C^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \tag{2.22}$$

Преобразуется как тензор!

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \Leftrightarrow C^\alpha_{\beta\gamma} = 0 \tag{2.23}$$

Локально Лоренцевы системы отсчета и отсутствие кручения

В пространстве Минковско:

1. Метрический тензор имеет вид $g = \{1, -1, -1, -1\}$
2. Все $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$

Если преобразованием координат можно добиться выполнения этих условий в точке, то система отсчета называется локально-Лоренцевой в этой точке.

Если $C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ во всех системах отсчета $\Rightarrow$

Если $C^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0$ в любой системе отсчета, следовательно в любой системе отсчета $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0$ и гравитацию (кривизну) исключить невозможно.

Чтобы гравитацию *можно было* локально исключить, в ОТО *необходимо* $C^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv 0$, $\Rightarrow \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$

$C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ является *достаточным* условием, чтобы было возможно занулить афинную связность.

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + T^{\mu}_{\sigma\rho} x^{\sigma} x^{\rho} \tag{2.24}$$

$$\left.\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right|_0 = \delta^{\mu}_{\nu}; \ \left.\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\right|_0 = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{2.25}$$

$$\left.\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}}\right|_0 = T^{\mu}_{\varepsilon\beta} + T^{\mu}_{\beta\varepsilon} \Rightarrow \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \Gamma^{\beta}_{\alpha\varepsilon} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} = \\ &= \delta^{\alpha}_{\lambda} \delta^{\mu}_{\beta} \delta^{\varepsilon}_{\delta} \Gamma^{\beta}_{\alpha\varepsilon} - \delta^{\beta}_{\lambda} \delta^{\varepsilon}_{\delta} (T^{\mu}_{\varepsilon\beta} + T^{\mu}_{\beta\varepsilon}) = \\ &= \Gamma^{\mu}_{\lambda\delta} - (T^{\mu}_{\delta\lambda} + T^{\mu}_{\lambda\delta})\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$T^{\mu}_{\delta\lambda} + T^{\mu}_{\lambda\delta} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\delta}(0) \Rightarrow \Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta}(0) = 0. \tag{2.28}$$

Чтобы подобрать $T^{\mu}_{\delta\lambda}$ достаточно, чтобы $\Gamma^{\mu}_{\delta\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\delta}$. Тогда:

$$T^{\mu}_{\delta\lambda} = T^{\mu}_{\lambda\delta} = \frac{1}{2} \Gamma^{\mu}_{\delta\lambda} \tag{2.29}$$

С помощью преобразования

$$\hat{g}' = \hat{J} \hat{g} \hat{J}^T, \ \hat{J} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right), \quad x^{\mu} = J^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \tag{2.30}$$

симетричная матрица $\hat{g}$ может быть приведена к диагональному виду

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} k^0 & & & 0 \\ & -k^1 & & \\ & & -k^2 & \\ 0 & & & -k^3 \end{pmatrix}, \ k^{\mu} > 0 \tag{2.31}$$

С помощью масштабного преобразования:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} \frac{1}{\sqrt{k^{\mu}}} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

Преобразование (2.24) в силу (2.25) не меняет тензоры в начале координат, поэтому связность можно занулить <u>после того</u>, как как $\hat{g}$ приведен к лоренцову виду.

Метрический тензор можно привести к Лоренцеву виду и связность можно занулить одновременно – это локально Лоренцева система отсчета

Однако производные $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, вообще говоря, не исчезают!

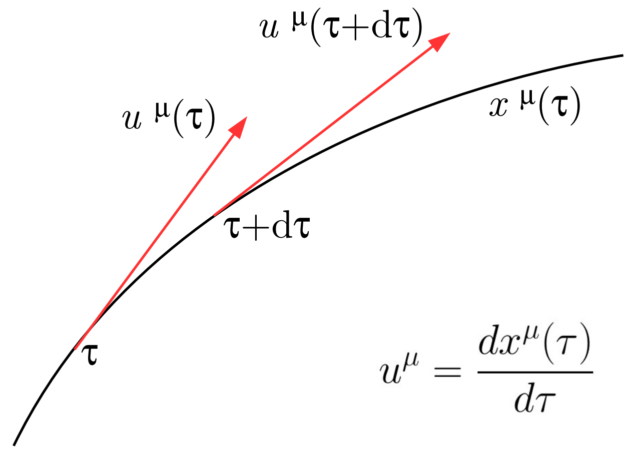
В частности, из-за этого неустранимы приливные силы.

Вывод:

Для того, чтобы можно было ввести локально-лоренцевы системы отсчета необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты связности были симметричны $\Rightarrow$

Первое дополнительное условие ОТО на коэффиценты связности: симметричность

Геодезические



$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$$

Геодезическая линия – такая кривая, вдоль которой касательный вектор к ней переносится параллельно самому себе.

$$u^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu + \frac{du^\mu(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} u^\mu(\tau + d\tau) = \tilde{u}^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu(\tau) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu(\tau) dx^\lambda = \\ = u^\mu(\tau) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu(\tau) u^\lambda(\tau) d\tau \Rightarrow \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} d\tau = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu(\tau) u^\lambda(\tau) d\tau \Rightarrow \tag{2.35}$$

$$\boxed{\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0} \tag{2.36}$$

Меняем местами ν и λ и складываем:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2} \left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right) u^\nu u^\lambda = 0 \tag{2.37}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} u^\nu u^\lambda = 0 \tag{2.38}$$

$$\Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right) \tag{2.39}$$

Геодезические определяются симметризованными коэффициентами связности.

Другая форма уравнения геодезической:

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0} \tag{2.40}$$

Движение частиц в гравитационном поле по геодезическим – постулат, который не имеет доказательства.

Первая проблема ОТО со спином: частицы со спином не движутся по геодезическим (?).

Вторая проблема ОТО со спином: нет рецепта расчета гравитационного поля спина.

Система спинов может создавать макроскопический момент и должна приводить к макроскопическому гравитационному полю, которое ОТО не может сосчитать $\Rightarrow$.

Попытка учета поля спинов приводит к теориям Эйнштейна-Картана, в которых кручение не равно нулю.

Второе дополнительное условие на коэффиценты связности: метричность

Хотим, чтобы операци поднятия/опускания индексов была универсальной:

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda A_\mu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \text{ т.е.} \tag{2.41}$$

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) \tag{2.42}$$

По правилу Лейбница:

$$\nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) = (\nabla_\lambda g_{\mu\nu})A^\nu + g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \\ = g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) \Rightarrow \tag{2.43}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0} \tag{2.44}$$

Метрический тензор ковариантно постоянен, если *связность метрична* *(свзность совместима с метрикой).*

Метричность связности априори ниоткуда не следует $\rightarrow$
рассматриваются обобщения ОТО, в которых связность не метрична.

Явное выражение коэффициентов связности через метрический тензор

Используется *одновременно* метричность $g_{\mu\nu}$ и симметричность связности:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = 0. \quad (2.45)$$

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} \quad (2.46)$$

40 линейных уравнений с 40 неизвестными $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ★

$$\begin{array}{l} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = \partial_\lambda g_{\mu\nu}\ [\lambda\mu\nu]\ |\times(+1) \\ \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} = \partial_\mu g_{\nu\lambda}\ [\mu\nu\lambda]\ |\times(+1) \\ \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} g_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma} = \partial_\nu g_{\lambda\mu}\ [\nu\lambda\mu]\ |\times(-1) \end{array} \quad (2.47)$$

$$2\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu}\ |g^{\nu\delta} \bigstar \quad (2.48)$$

$$\boxed{\Gamma^\delta_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\delta\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})} \quad (2.49)$$

Для того, чтобы $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ выражались через $g_{\mu\nu}$, метричность и симметричность связности необходимы!

Можно посчитать, что
метричность+симметричность вместе дают 64 уравнения, однозначно определяющие все 64 компоненты связности ★.

Если в некоторой точке все $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, то все $\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$ ★.

Выражение (2.49) иногда называется символами Кристоффеля и обозначается

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \lambda\mu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\delta\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})} \quad (2.50)$$

Уравнение геодезической из принципа максимума длины или из принципа наименьшего действия

$\delta S = 0$ – принцип действия для свободной частицы

$$S = -m \int_a^b ds = -m \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \backslash x = x(\tau) \backslash =$$
$$= -m \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau \quad (2.51)$$

$$\delta S = -m \int \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \delta(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) =$$
$$= -\frac{m}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}} \left(\partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} \right) d\tau =$$
$$= \backslash \sigma \leftrightarrow \nu \text{ в первом слагаемом,}$$
$$\text{по частям второе слагаемое} \backslash =$$
$$= -\frac{m}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}} \left[\partial_\nu g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\sigma - 2\frac{d(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu)}{d\tau} \right] \delta x^\sigma d\tau =$$
$$= 0 \ \Rightarrow \quad (2.52)$$

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu) - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\sigma = 0 \tag{2.53}$$

$$\dot{x}^\mu\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} + g_{\mu\nu}\ddot{x}^\mu - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\mu\sigma}\dot{x}^\mu\dot{x}^\sigma = 0 \;\Big|g^{\nu\rho} \tag{2.54}$$

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} = \partial_\sigma g_{\mu\nu}\dot{x}^\sigma \tag{2.55}$$

$$\ddot{x}^\rho + g^{\rho\nu}\left(\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\mu\sigma}\right)\dot{x}^\sigma\dot{x}^\mu = 0 \tag{2.56}$$

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\mu = \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\mu\nu}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\mu + \partial_\mu g_{\sigma\mu}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\mu) \tag{2.57}$$

$$\ddot{x}^\rho + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\mu = 0 \tag{2.58}$$

$$\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}) = \Gamma^\rho_{\sigma\mu} \tag{2.59}$$

$$\boxed{\ddot{x}^\rho + \Gamma^\rho_{\sigma\mu}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\mu = 0} \tag{2.60}$$

$$\boxed{\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\sigma\mu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0} \tag{2.61}$$

Тензор Леви-Чевита

Хотим, чтобы $E^{\mu\nu\rho\sigma}$ был тензором, и в локально лоренцевой (галилеевой) системе (x)

$$E^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma},\; \varepsilon^{0123} = 1 \tag{2.62}$$

Как будет в произвольной системе (x')?

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{2.63}$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{-g'} \;\Rightarrow\; \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \;\Rightarrow \tag{2.64}$$

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g'}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{2.65}$$

$$\boxed{E^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}} \tag{2.66}$$

Аналогично можно найти ★:

$$\boxed{E_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}} \tag{2.67}$$

Тензор кривизны

Два способа ввести тензор кривизны.

1. Через коммутатор ковариантной производной $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi = \partial_\mu \partial_\nu \varphi - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda \varphi \tag{2.68}$$

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \varphi = \partial_\nu \partial_\mu \varphi - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \varphi \ \Rightarrow \tag{2.69}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\varphi = -(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})\partial_\lambda \varphi = -C^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\varphi = 0 \tag{2.70}$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = ? \tag{2.71}$$

$$\nabla_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) = \partial_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(\nabla_\sigma A^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}(\nabla_\nu A^\sigma) = \ldots \tag{2.72}$$

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu A^\lambda) = \ldots \tag{2.73}$$

(посчитать! ★)

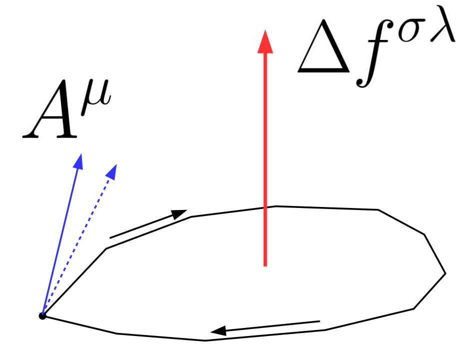
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = A^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \tag{2.74}$$

$$\boxed{R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}} \tag{2.75}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\lambda = A_\sigma R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} \ \text{(посчитать ★)} \tag{2.76}$$

Отсюда видно, почему тензар кривизны – действительно тензор.

2. Параллельный перенос вдоль замкнутого контура



$$\tilde{A}^\mu(x + dx) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \tag{2.77}$$

$$\delta A^\mu(x) = \tilde{A}^\mu(x + dx) - A^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \tag{2.78}$$

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu(x) = -\oint \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \tag{2.79}$$

Формула Стокса:

$$\oint B_{\ldots\lambda} dx^\lambda = \frac{1}{2}\int df^{\sigma\lambda}\left(\partial_\sigma B_{\ldots\lambda} - \partial_\lambda B_{\ldots\sigma}\right) \tag{2.80}$$

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2}\int df^{\sigma\lambda}[\partial_\sigma(\Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu) - \partial_\lambda(\Gamma^\mu_{\nu\sigma}A^\nu)] \simeq$$
$$\simeq -\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, A^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\partial_\sigma A^\nu - \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\, A^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\partial_\lambda A^\nu) \tag{2.81}$$

Внутри контура A^μ изменяется только за счет параллельного переноса, поэтому

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \ \Rightarrow \ \partial_\lambda A^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu \tag{2.82}$$

$$\Delta A^\mu =$$
$$-\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\rho\sigma}A^\rho - \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\sigma}A^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}A^\rho) =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma\Gamma^\mu_{\lambda\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda})A^\nu =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^\mu{}_{\sigma\lambda\nu}A^\nu \quad (2.83)$$

$$\boxed{\Delta A^\mu = \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^\mu{}_{\sigma\lambda\nu}A^\nu} \quad (2.84)$$

Из вывода видно, что формула верна универсально, независимо от метричности и симметричности связности.

Свойства тензора кривизны

$$R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \quad (2.85)$$

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = g_{\tau\lambda}R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} =$$
$$= g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}) \quad (2.86)$$

1.
$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\tau\sigma\nu\mu} \ - \ \text{очевидно} \quad (2.87)$$
2.
$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\tau\mu\nu} \quad (2.88)$$

– не очевидно, использует метричность, не универсально

$$\Gamma_{\xi,\nu\sigma} = g_{\xi\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\sigma\xi} + \partial_\sigma g_{\xi\nu} - \partial_\xi g_{\nu\sigma}) \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} \ &= \ +g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) \\ &\quad\ -g_{\tau\lambda}(\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}) \end{aligned} \quad (2.90)$$

$\nu\sigma \equiv ..$

$$g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma^\lambda_{..} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{..}) = g_{\tau\lambda}\nabla_\mu\Gamma^\lambda_{..} = \nabla_\mu(g_{\tau\lambda}\Gamma^\lambda_{..}) =$$
$$= \nabla_\mu(\Gamma_{\tau,..}) = \partial_\mu\Gamma_{\tau,..} - \Gamma^\lambda_{\tau\mu}\Gamma_{\lambda,..} =$$
$$= \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\mu}\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} \quad (2.91)$$

$$g_{\tau\lambda}(\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}) = \partial_\nu\Gamma_{\tau,\mu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\nu}\Gamma_{\lambda,\mu\sigma} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned}R_{\tau\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma_{\tau,\mu\sigma} + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) = \\ = \partial_\mu\partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu\partial_\tau g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu\partial_\tau g_{\mu\sigma} + \\ + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau})\end{aligned} \tag{2.93}$$

Отсюда свойство (2.88) уже очевидно.

3.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\tau\sigma} \bigstar \tag{2.94}$$

4.

$$R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} + R^{\sigma}{}_{\nu\rho\mu} = 0 \tag{2.95}$$

Из тождества Якоби:

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\varphi + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]\varphi = 0; \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi = \\ = \nabla_\rho([\nabla_\mu, \nabla_\nu]\varphi) - [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\nabla_\rho\varphi = \\ = -[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\partial_\rho\varphi = \\ - \partial_\sigma\varphi R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} \Rightarrow (2.95)\end{aligned} \tag{2.97}$$

5. Тождество Бьянки ★:

$$\nabla_\rho R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \tag{2.98}$$

Из тождества Якоби

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]A^\lambda + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]A^\lambda + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]A^\lambda = 0; \tag{2.99}$$

Число независимых компонент ★:

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \tag{2.100}$$

$$n = 4 \to N = 20 \tag{2.101}$$

$$n = 3 \to N = 6 \tag{2.102}$$

$$n = 2 \to N = 1 \tag{2.103}$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{2.104}$$

Скаляр кривизны (не гауссова кривизна!):

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu} = R^{\lambda\nu}{}_{\lambda\nu} \tag{2.105}$$