

Лекция 11

Скалярные моды нерелятивистской материи в однокомпонентной модели (окончание). Начальные условия за горизонтом для адиабатической моды. Гауссовы случайные поля и начальные условия для адиабатических возмущений. Космическая неопределенность – *cosmic variance*

Резюме по прошлой лекции

- *Векторных мод нет вообще.*
- Любые другие моды за горизонтом – только константные (h, Φ, δ).
- *Тензорные моды под горизонтом* – гравитационные волны – осциллируют с известной фазой и падают во времени как $1/a$
- *Скалярные моды под горизонтом*, однокомпонентная среда:
 - UR вещество:
 - * Φ падают как $1/\eta^2$, осциллируя с известной фазой
 - * $\delta = \delta\rho/\rho$ осциллирует с постоянной амплитудой и известной фазой (акустические осцилляции)
 - NR вещество
 - * Φ не меняются
 - * $\delta = \delta\rho/\rho$ растёт как a/a_x – джинсовская неустойчивость

Какие (скалярные) моды плотности привели к образованию наблюдаемых структур?

Рассмотрим все моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии.

Самая короткая среди них – вошедшая под горизонт в момент η_{eq}

Координатный импульс (волновое число) моды определяется

$$k_{eq}\eta_{eq} \sim 1 \quad (11.1)$$

Длина волны сейчас:

$$1 \sim \frac{k_{eq}}{a_0}(a_0\eta_{eq}) = q_{eq}(a_0\eta_{eq}) = \frac{2\pi}{\lambda_{eq}}(a_0\eta_{eq}) \Rightarrow \quad (11.2)$$

$$\lambda_{eq} \sim 2\pi(a_0\eta_{eq}) = 2\pi \times 120 \text{ Мпк} \approx 750 \text{ Мпк} \quad (11.3)$$

$$\delta = \frac{1}{3} \frac{a_0}{a_x} \delta_{(i)} = \frac{1}{3}(1 + z_{eq})\delta_{(i)} \quad (11.4)$$

$$\delta_{(i)} \approx 4.5 \cdot 10^{-5}, \quad z_{eq} \approx 3000 \Rightarrow \delta \sim 0.045 \quad (11.5)$$

Моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии не вошли в нелинейный режим \Rightarrow

Вселенная на масштабах 750 Мпк и более – заведомо однородна.

Существующие структуры определяются модами, вошедшими под горизонт раньше – на РД-стадии.

Скорости, нерелятивистские скалярные моды за и под горизонтом

$0i$ -компонента линеаризованных уравнений Эйнштейна для скалярной моды (10.136):

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2(\rho + p)v \quad (11.6)$$

$\Phi' = 0, p = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{a'}{a}\Phi \frac{1}{4\pi G a^2} \frac{1}{\rho} = \left\langle H = \frac{a'}{a^2}, a = \text{const } \eta^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{8\pi}{3} G \rho = H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2, \frac{a'}{a} = \frac{2}{\eta} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{3}\Phi\eta \quad (11.7) \end{aligned}$$

$$kv = -\frac{\Phi}{3}k\eta \propto \sqrt{a} \quad (11.8)$$

Нерелятивистское вещество на Λ -доминированной стадии, линейные возмущения

$$(9.10) : \quad a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}, \quad H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (11.9)$$

Λ создает давление, но не создает возмущения давления!

Потенциал Φ .

ij -компонента линеаризованных уравнений Эйнштейна для скалярной моды (10.137):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \quad (11.10)$$

$\delta p_{tot} = 0$. Подставляем (11.9):

$$\Phi'' - \frac{3}{\eta}\Phi' + \frac{3}{\eta^2}\Phi = 0 \quad (11.11)$$

Два типа решений:

$$\Phi(\eta) = \text{const} \cdot \eta \propto \frac{1}{a} \quad (11.12)$$

$$\Phi(\eta) = \text{const} \cdot \eta^3 \propto \frac{1}{a^3} \quad (11.13)$$

Падает!

Плотность

Ковариантное сохранение (10.138):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (11.14)$$

Подставляем (11.12), пренебрегаем (11.13), используем $a'/a = -1/\eta$ (два последних слагаемых слева в (11.14) сокращаются)

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \Rightarrow \delta\rho = -\frac{k^2\Phi}{4\pi G a^2} \quad (11.15)$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{\Phi}{a^2} \cdot a^3 \propto \frac{1}{a^3} \times a^3 = 1 \text{ (не растут)} \quad (11.16)$$

Структуры большего масштаба, чем наблюдаются сейчас, не появятся никогда!

Структурная эволюция Вселенной завершена.

Первичные скалярные возмущения в многокомпонентной Вселенной

Основные уравнения для возмущений в импульсном представлении

Линеаризованные уравнения Эйнштейна (10.60)–(10.62), переписаны с учетом нескольких компонент материи λ :

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_{\lambda} \delta\rho_{\lambda} \quad (11.17)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_{\lambda} (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} \quad (11.18)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \sum_{\lambda} \delta p_{\lambda} \quad (11.19)$$

Линеаризованный закон сохранения ТЭИ:

$$\delta\rho'_{\lambda} + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_{\lambda} + \delta p_{\lambda}) - (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})(k^2 v_{\lambda} + 3\Phi') = 0 \quad (11.20)$$

$$[(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} + \delta p_{\lambda} + (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})\Phi = 0 \quad (11.21)$$

Основные компоненты среды до рекомбинации:

- Барион-электрон-фотонная среда $\lambda = B\gamma$
- Темная материя: $\lambda = CDM$.
- Нейтрино (лептоны): $\lambda = L$

Обозначения и связи:

$$\delta_{\lambda} = \delta\rho_{\lambda}/\rho_{\lambda} \quad (11.22)$$

$$\delta p_{\lambda} = u_{s,\lambda}^2 \delta\rho_{\lambda} \quad (11.23)$$

$$p_{\lambda} = w_{\lambda}\rho_{\lambda} \quad (11.24)$$

Уравнения (11.20) и (11.21) в терминах $\delta_\lambda, w_\lambda, u_{s,\lambda}^2$ ★:

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1 + w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1 + w_\lambda)\Phi' \quad (11.25)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \quad (11.26)$$

Адиабатическая мода и мода постоянной кривизны

Контекст:

- Интерес представляют моды, отвечающие за анизотропию СМВ и за рост структур вещества.
- Такие моды входят под горизонт при температурах не более $T \sim 100$ кэВ ($T_{eq} \sim 1$ эВ):
 - барионы и электроны нерелятивистские
 - CDM нерелятивистская
 - нейтрино (~ 1 МэВ) и CDM (> 0.05 ГэВ) заморожены, не взаимодействуют с барион-электрон-фотонной плазмой

Основные параметры космической плазмы:

- n_B, n_{CDM}, n_L
- T (или $s \propto T^3$)

- Вообще говоря, имеют место возмущения температуры, плотности и состава среды вместе.
- Если возмущения малы (линейный режим), то можно разделить на две линейно-независимые компоненты:
 - Возмущения плотности (температуры) – отдельно;
 - Возмущения состава – отдельно.

Возмущения плотности – адиабатическая мода

Вещество имеет ненулевые возмущения плотности энергии (температуры), но относительные величины, характеризующие барионную асимметрию, плотность темной материи и плотность лептонов не зависят от типа материи:

$$\delta\left(\frac{n_B}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_{CDM}}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_L}{s}\right) = 0 \quad (11.27)$$

Возмущения состава – моды постоянной кривизны

Возмущения плотности вещества отсутствуют, но:

- Неоднородность барионного числа \rightarrow барионная мода постоянной кривизны
- Неоднородность плотности темной материи \rightarrow CDM-мода постоянной кривизны
- Неоднородность лептонного числа \rightarrow лептонная мода постоянной кривизны

Кривизна постоянна потому, что изменения концентраций рассматриваются на фоне постоянной полной плотности энергии.

Наблюдения показывают: вклад мод постоянной кривизны мал.

Адиабатическая мода за горизонтом. Начальные условия для адиабатической моды – что это такое?

За горизонтом возмущения существуют в виде константных мод $\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const}$, $\delta\rho/\rho = \text{const}$ и общая пространственно-временная картина, соответствующая одной *адиабатической* константной моде, на эвристическом уровне соответствует набору независимых однородных вселенных несколько различающихся по времени эволюции и потому имеющих разную температуру, или начавших развиваться в разное время.

Тогда для адиабатической моды для каждой независимой компоненты среды можно записать:

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv \rho'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.28)$$

$$\delta p_\lambda = p'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv p'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.29)$$

Функция $\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$ – одна для всех компонент λ , так как моды адиабатические.

В то же время, при фиксированном составе среды, ρ и p однозначно зависят от температуры \Rightarrow :

$$\delta\rho_\lambda = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.30)$$

$$\delta p_\lambda = \frac{\partial p_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.31)$$

Но:

$$\delta T(\mathbf{x}, \eta) = \frac{\partial T}{\partial \eta} \delta\eta \equiv \frac{\partial T}{\partial \eta} \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.32)$$

$\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$ и $\delta T(\mathbf{x}, \eta)$ однозначно связаны, поэтому определения (11.30,11.31) и (11.28,11.29) эквивалентны.

Формулы (11.30,11.31) можно считать определением адиабатической моды.

Совместимо ли определение (11.30,11.31) или (11.28,11.29) с уравнениями (11.17)–(11.21)?

Покажем, что Φ (а следовательно и все остальное) действительно выражается только через ε – при том, что уравнения записаны для отдельных компонент λ .

Используем (11.20) – сохранение ТЭИ, зависящее от λ :

$$(11.20): \delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)(k^2 v_\lambda + 3\Phi') = 0 \quad (11.33)$$

За горизонтом можно считать $k = 0$, остается:

$$\begin{aligned} & \delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)3\Phi' = \\ & = \left\{ \delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \varepsilon; \rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \text{ ков. сохр. (9.7)} \right\} \\ & = -3(\rho_\lambda + p_\lambda) \left[\left(\frac{a'}{a} \varepsilon \right)' + \Phi' \right] = 0 \Rightarrow \quad (11.34) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi' = - \left(\frac{a'}{a} \varepsilon \right)'} \quad (11.35)$$

– Зависимости от λ нет!

Решение (11.35):

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = -\frac{a'}{a}\varepsilon(\mathbf{x}, \eta) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (11.36)$$

$\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ важна, т.к., в действительности, и определяет константную моду за горизонтом.

Из ковариантного сохранения (9.7)

$$\rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \Rightarrow \quad (11.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} &= -\frac{1}{3} \frac{\rho'_\lambda}{(\rho_\lambda + p_\lambda)} = \left\langle \rho'_\lambda = \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon(\rho_\lambda + p_\lambda)} \Rightarrow \quad (11.38) \end{aligned}$$

ε в (11.36) сокращается! \Rightarrow

$$\zeta = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (11.39)$$

– так как мода адиабатическая

$$\boxed{\zeta = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}}} \quad (11.40)$$

– не зависит от времени, в то время, как слагаемые в п.ч. могут зависеть от времени!

Вместо ζ можно использовать (и часто используется) величину

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a}v_{tot}; \quad v_{tot} \equiv \frac{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda}{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (11.41)$$

Из (11.17), (11.18) и

$$\frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (\text{адиабатичность}) \quad (11.42)$$

следует ★

$$\zeta - \mathcal{R} = -\frac{k^2\Phi}{12\pi Ga^2(\rho + p)_{tot}} \rightarrow 0 \quad \text{в пределе } k \rightarrow 0 \quad (11.43)$$

За горизонтом ζ и \mathcal{R} – одно и то же.

В качестве начального условия для адиабатических скалярных мод можно взять $\zeta_{(i)}(\mathbf{k})$ или $\mathcal{R}_{(i)}(\mathbf{k})$

Начальные условия для УР вещества за горизонтом на РД-стадии

$$\delta_{rad} = -2\Phi \quad (\text{для любых скалярных мод (10.151)}) \quad (11.44)$$

На РД-стадии, для главных УР мод за горизонтом (поскольку УР моды доминируют) $p_{tot} = \rho_{tot}/3 \Rightarrow$

$$\zeta = -\Phi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})} = -\Phi + \frac{1}{4}\delta = -\frac{3}{2}\Phi \Rightarrow \quad (11.45)$$

$$\Phi = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R}; \quad \delta_{rad} = \frac{4}{3}\mathcal{R} \quad (11.46)$$

Начальные условия для НР вещества за горизонтом на РД-стадии

На РД стадии, не слишком задолго до РД→МД перехода имеется нерелятивистское вещество – В и CDM. Для НР вещества

$$\rho_M \propto 1/a^3 \Rightarrow \rho'_M = -3\rho_M \frac{a'}{a} \quad (11.47)$$

Для УР вещества

$$\rho_{rad} \propto 1/a^4 \Rightarrow \rho'_{rad} = -4\rho_{rad} \frac{a'}{a} \quad (11.48)$$

Отсюда

$$\delta_M = \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} = \frac{\rho'_M \varepsilon}{\rho_M} = -3 \frac{a'}{a} \varepsilon \quad (11.49)$$

$$\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho_{rad}} = \frac{\rho'_{rad} \varepsilon}{\rho_{rad}} = -4 \frac{a'}{a} \varepsilon \quad (11.50)$$

$$\delta_M = \frac{3}{4} \delta_{rad} = -\frac{3}{2} \Phi = \mathcal{R} \quad (11.51)$$

Эти соотношения выполняются для каждой компоненты в отдельности: В, CDM, γ ...

Итог:

$$\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3} \zeta(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3} \mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.52)$$

$$\delta_{rad}(\mathbf{k}) = \frac{4}{3} \mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.53)$$

$$\delta_M(\mathbf{k}) = \mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.54)$$

Начальные условия для мод постоянной кривизны

Для мод постоянной кривизны $\zeta_{tot} = \mathcal{R}_{tot} \equiv 0$ по определению.

Для каждой отдельной компоненты λ :

$$\zeta_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)} = -\Phi + \frac{\delta_\lambda}{3(1 + w_\lambda)} \quad (11.55)$$

не зависит от времени (см. (11.39)).

Начальные условия для мод постоянной кривизны выражаются через ζ_λ :

$$S_{\lambda,\lambda'} = 3(\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda'}) = \frac{\delta_\lambda}{1 + w_\lambda} - \frac{\delta_{\lambda'}}{1 + w_{\lambda'}} \quad (11.56)$$

Обычно $\lambda' = \gamma$; $S_\lambda \equiv S_{\lambda,\gamma} \Rightarrow w_{\lambda'} = 1/3$

$$S_\lambda = \delta_\lambda - \frac{3}{4} \delta_\gamma, \quad \lambda = B, CDM \quad (11.57)$$

Для УР материи (γ)

$$s_\gamma = g_\gamma \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (11.58)$$

$$n_\gamma = g_\gamma \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (11.59)$$

$$\rho_\gamma = g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (11.60)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (11.61)$$

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (11.62)$$

$$\frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \delta_\gamma = 4 \frac{\delta T}{T} \quad (11.63)$$

$$(11.64)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (11.65)$$

Реальный интерес представляют:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(n_\lambda/s_\gamma)}{n_\lambda/s_\gamma} &= \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{3}{4} \delta_\gamma = \\ &= \backslash \lambda - \text{HP} \backslash = \frac{\delta \rho_\lambda}{\rho_\lambda} - \frac{3}{4} \delta_\gamma = \delta_\lambda - \frac{3}{4} \delta_\gamma = S_\lambda \Rightarrow \end{aligned} \quad (11.66)$$

$$S_\lambda = \frac{\delta(n_\lambda/s)}{n_\lambda/s} - \text{«Энтропийные моды»} \quad (11.67)$$

Гауссовы случайные поля

Распределение Гаусса

$$F(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(q - q_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (11.68)$$

q_0 – среднее, σ^2 – дисперсия.

$$\tilde{q} = aq + b \quad (11.69)$$

– снова Гаусс, $\tilde{q}_0 = aq_0 + b$, $\tilde{\sigma} = a\sigma$.

Для определения случайной величины нужен ансамбль событий (систем).

Обобщение на многомерный случай

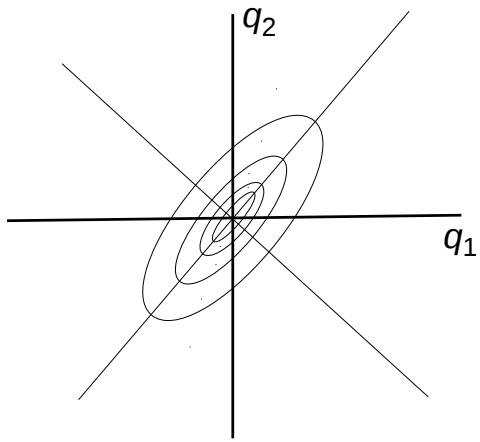
Гауссов набор случайных величин

$$F(q_1, \dots, q_N) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{1}{2} q_m M_{mn} q_n + L_n q_n \right] \quad (11.70)$$

M – положительно определенная симметричная матрица

$$\int F(q) d^n q = 1; \quad \mathcal{N} = (\det M)^{-1/2} (2\pi)^{-N/2} \quad (11.71)$$

$$\langle q_m \rangle = (M^{-1})_{mn} L_n \quad (11.72)$$



Если привести M_{mn} к главным осям, то получится просто произведение одномерных Гауссовых функций

Набор линейных функций от гауссовых случайных величин – тоже набор гауссовых случайных величин.

Рассматриваем случай $L_n = 0 \Rightarrow \langle q_m \rangle = 0$

Формула Вика

Если q_n – гауссов набор случайных величин, то корреляторы нечетного числа величин равны нулю, а для четного числа величин

$$\langle q_p q_r q_s q_t \rangle = D_{pr} D_{st} + D_{ps} D_{rt} + D_{pt} D_{rs}; \quad \text{и т.д.} \quad (11.73)$$

где $D_{pr} = \langle q_p q_r \rangle$ и т.д. И обратно.

Смысл усреднения – *усреднение по ансамблю*

Случайное поле

Кубическая решетка со стороной L , шаг a .

$\varphi_i = \varphi(\mathbf{x}_i)$ – гауссов набор случайных величин \Rightarrow случайное поле на решетке.

- Гауссово случайное поле: предел $a \rightarrow 0$

Формула Вика для гауссовых случайных полей

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \varphi(\mathbf{x}_3) \varphi(\mathbf{x}_4) \rangle = D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) D(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \quad (11.74)$$

где

$$D(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \varphi(\mathbf{x}_i) \varphi(\mathbf{x}_j) \rangle \quad (11.75)$$

– двухточечные корреляторы – основной объект изучения теории случайных полей.

Однородное и изотропное случайное поле:

$$D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = D(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \quad (11.76)$$

Переходим к Фурье-образу

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{k} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}); \quad \varphi^*(-\mathbf{k}) = \varphi(\mathbf{k}) \quad (11.77)$$

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{x} e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (11.78)$$

Будучи интегралом случайного поля, Фурье-образ случайного поля сам является случайным полем (в пространстве \mathbf{k}).

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k}') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y} e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}} e^{-i \mathbf{k}' \mathbf{y}} D(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \\ &= \langle \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{z} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathbf{x}} e^{i \mathbf{k}' \mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int d^3 \mathbf{z} e^{i \mathbf{k}' \mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (11.79)$$

так как $P(\mathbf{k})$ зависит от $|\mathbf{k}|$, четна, действительна.

$$\langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.80)$$

$$P(k) = \int d^3\mathbf{z} e^{i\mathbf{kz}} D(|\mathbf{z}|) \quad (11.81)$$

$P(k)$ – неотрицательна:

$$\varphi[f] = \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}, \quad f^*(\mathbf{k}) = f(-\mathbf{k}) \quad (11.82)$$

Очевидно: $\langle \varphi^2[f] \rangle \geq 0$ (усреднение по ансамблю $\phi!$).

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2[f] \rangle &= \left\langle \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k} \cdot \int f(\mathbf{k}')\varphi(\mathbf{k}')d^3\mathbf{k}' \right\rangle = \\ &= \text{\ (11.80)\ } = \int d^3\mathbf{k} |f(\mathbf{k})|^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \geq 0 \Rightarrow P(k) \geq 0. \end{aligned} \quad (11.83)$$

$P(k)$ – спектр мощности случайного поля.

$$\mathcal{P}(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} \quad (11.84)$$

– тоже называется спектром мощности. Смысл:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle &= \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} \langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \\ &= 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}(k) \end{aligned} \quad (11.85)$$

Важно: Согласно (11.80) $P(k)$ определяется усреднением по ансамблю, но согласно (11.81) $P(k)$ может быть приблизительно оценено усреднением по реализации, если гауссово случайное поле однородное и изотропное \Rightarrow байесовская вероятность.

Первичные адиабатические скалярные моды и наблюдения

- Наблюдения говорят о том, что в начальных возмущениях доминируют адиабатические скалярные моды.
- Тензорные моды и скалярные моды постоянной кривизны не обнаружены, есть только ограничения сверху.

Адиабатические скалярные моды самые существенные – *стандартная космологическая модель* (СКМ) включает пока только их.

Предполагается, что начальные данные для адиабатической скалярной моды – константные моды за горизонтом – представляют однородное и изотропное гауссово случайное поле и характеризуются функцией $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ ($\zeta(\mathbf{k})$), через которую вычисляются относительные флуктуации плотности и возмущения гравитационного потенциала, (11.52)–(11.54).

Однозначно описывается двухточечным коррелятором:

$$\langle \mathcal{R}(\mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P_{\mathcal{R}}(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.86)$$

Задача наблюдений – найти одну скалярную функцию $P_{\mathcal{R}}(k)$ – спектр мощности константной моды адиабатических скалярных возмущений.

Смысл усреднения $\langle \mathcal{R}(\mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle$ – **усреднение по ансамблю вселенных.**

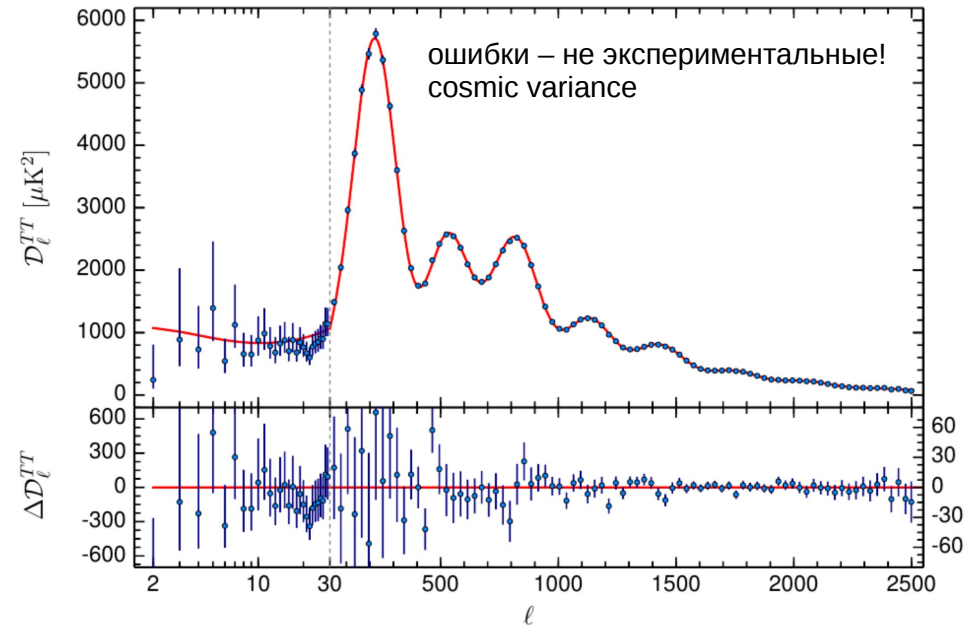
Оценка $P_{\mathcal{R}}(k)$ через двухточечный коррелятор:

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} D(|\mathbf{x}|) \quad (11.87)$$

Так как мы имеем дело только с конечным фрагментом Вселенной внутри горизонта, то оценка дает лишь конечную точность, в предположении однородности и изотропии.

Остаточная неопределенность – *космическая неопределенность*, cosmic variance

Если некоторая теория предсказывает определенную $P_{\mathcal{R}}(k)$, то предсказание это невозможно будет проверить с любой наперед заданной точностью. Точность измерений здесь ни при чем. См. картинку.



Вместо $P_{\mathcal{R}}(k)$ обычно используют

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \Rightarrow \quad (11.88)$$

$$\langle \mathcal{R}^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \quad (11.89)$$

Иногда используется обозначение: $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$

Простейшее предположение - плоский спектр:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \text{const} \quad (11.90)$$

– спектр Гаррисона-Зельдовича.

Как реальный спектр мощности отличается от спектра Гаррисона-Зельдовича?

Наблюдения показывают, что начальный спектр флуктуаций близок к плоскому.

Степенная параметризация (s – scalar):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1} \quad (11.91)$$

$$q_* = \frac{k_*}{a_0} = \frac{1}{500 \text{ Мпк}} = 0.002 \text{ Мпк}^{-1} \quad (11.92)$$

Современные значения:

$$n_s = 0.9667 \pm 0.0040 \quad (11.93)$$

$$A_{\mathcal{R}} = 2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9} \quad (11.94)$$

Относительная амплитуда возмущений

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{A_{\mathcal{R}}} \approx 4.5 \cdot 10^{-5} \quad (11.95)$$

6 параметров СКМ

Физическая плотность барионов	$\Omega_B h^2$	0.02230 ± 0.00014
Физическая плотность темной материи	$\Omega_{CDM} h^2$	0.1188 ± 0.00010
Возраст	t_0	$(13.799 \pm 0.021) \cdot 10^9$ лет
Скалярный спектральный индекс	n_s	0.9667 ± 0.0040
Амплитуда флуктуаций кривизны	$A_{\mathcal{R}}, \Delta_{\mathcal{R}}^2$	$2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9}$
Оптическая толщина реионизации	τ	0.066 ± 0.012
Приведенная постоянная Хаббла*	h	0.6774 ± 0.0046

*Постоянная Хаббла не входит в число 6 параметров!

Первичные моды постоянной кривизны и наблюдения

Аналогично адиабатическим модам:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) \text{ и } \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$$

Дополнительно, могут быть корреляции с адиабатической модой, которые задаются параметром

$$\beta = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}\mathcal{P}_{\mathcal{S}}}}, \quad \langle \mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{S}(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{RS}}(k) \quad (11.96)$$

Оценки для $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$ зависят от предположений о β :

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.07, \quad \beta = 0 \quad (11.97)$$

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.004, \quad \beta = 1 \quad (11.98)$$

Моды постоянной кривизны малы.

В СКМ $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k) = 0$.

Первичные тензорные моды и наблюдения

Тензорные моды до сих пор (ноябрь 2020) не обнаружены, поэтому можно только предполагать, что они образуют гауссовы случайные поля, причем одинаковые, но независимые для разных компонент поляризации:

$$\langle h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k})h_{(i)}^{(B)}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{1}{2}\delta_{AB} \frac{P_T(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.99)$$

Предполагается спектр, близкий к плоскому:

$$\mathcal{P}_T = A_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T-1}, \quad n_T \approx 1 \quad (11.100)$$

$$\sum_A \langle [h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{x})]^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(\mathbf{k}) \quad (11.101)$$

Отношение тензорных и скалярных мод (PLANCK-2015)

$$r = \frac{A_T}{A_{\mathcal{R}}} < 0.067, \quad 95\% \quad (11.102)$$

Очень важная величина, так как позволяет различать разные модели инфляции.

В СКМ $r = 0$.