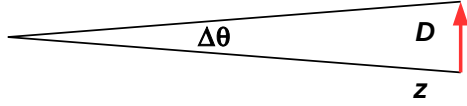


Лекция 6

Стандартные линейки и стандартные сирены. Термодинамика Вселенной.

Тест углового размера и стандартные линейки



Стандартные линейки $\Rightarrow \Delta\theta(z) \rightarrow \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_K$.
Стандартные линейки существуют – акустические пики.

1. Плоское пространство

$$ds^2 = a^2(t)(d\eta^2 - dx^2) \quad (6.1)$$

В конформных координатах все как в плоской статике:

$$\Delta\theta = \frac{D_{conf}}{x(z)} \quad (6.2)$$

$$D = D_{conf}a(t) \Rightarrow D_{conf} = \frac{D}{a(t)} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{D}{a(t)x(z)} = \frac{a_0}{a(t)} \frac{D}{a_0x(z)} = \frac{z+1}{x(z)} \frac{D}{a_0} = \\ &= \backslash a_0x(z) = r(z), (5.60) \backslash = DH_0 \frac{z+1}{\int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\Delta\theta(z) = DH_0 \frac{z+1}{\int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz} \quad (6.5)$$

Как себя ведет $\Delta\theta(z)$?

- $z \ll 1$

$$\Delta\theta(z) \cong DH_0 \sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda} \frac{1}{z} = DH_0 \frac{1}{rH_0} = \frac{D}{r} \quad (6.6)$$

– убывает, как и ожидается.

- $z \gg 1$

$$\begin{aligned} \int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz &\cong \int_0^z [\Omega_M(z+1)^3]^{-1/2} dz = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_M}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}} \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\Delta\theta(z) \cong 2DH_0 \sqrt{\Omega_M} \frac{z+1}{1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}}} \approx 2DH_0 \sqrt{\Omega_M} (z+1) \quad (6.8)$$

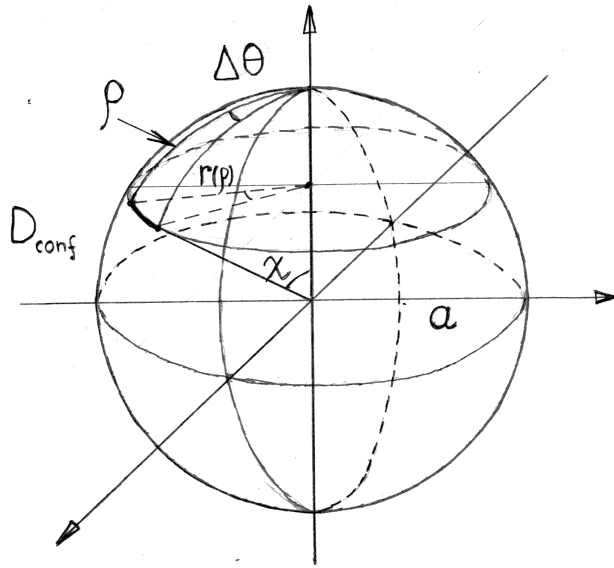
1) Угловой размер растет с ростом расстояния!

- При $z \sim 1.5$ угловой размер достигает минимума (ищется численно).

2) Если известны D и z , то определяется Ω_M !

$$\Omega_M = \left(\frac{\Delta\theta(z)}{2DH_0(z+1)} \right)^2 \quad (6.9)$$

2. 3-сфера



$$D_{conf} = \frac{D}{a} = \frac{a \sin \chi \Delta \theta}{a} = \sin \chi \Delta \theta \Rightarrow \quad (6.10)$$

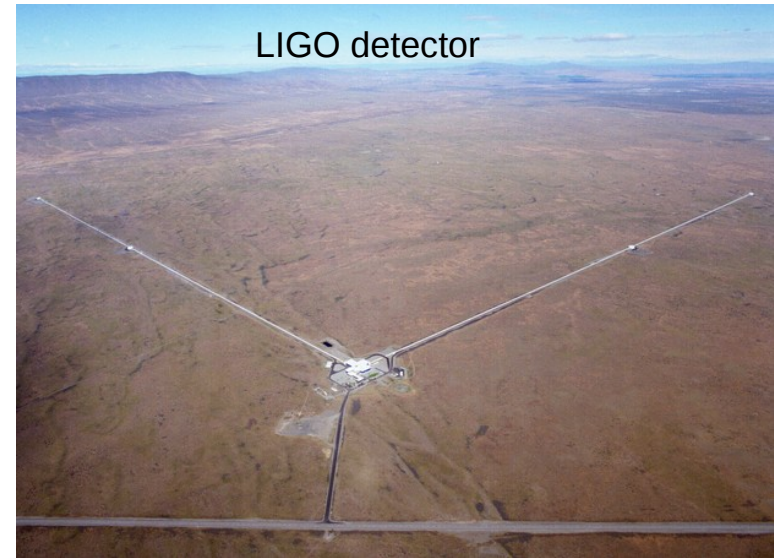
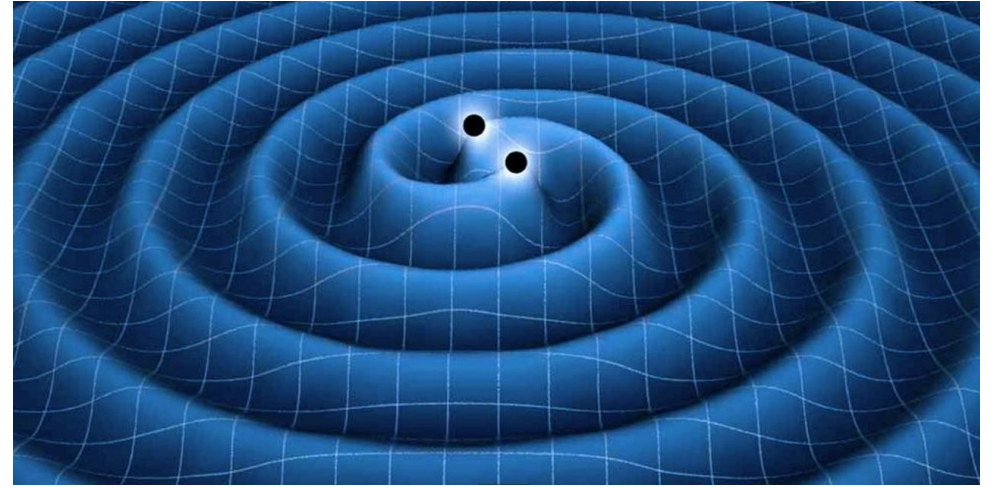
$$\begin{aligned} \Delta \theta &= \frac{D_{conf}}{\sin \chi} = \frac{D}{a(t) \sin \chi} = \frac{a_0}{a(t)} \frac{D}{a_0 \sin \chi} = \frac{D(z+1)}{a_0 \sin \chi} = \\ &= \frac{D}{a_0 \sin \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K (1+z)^2}} \right]} \end{aligned} \quad (6.11)$$

3. 3-псевдосфера

$$\Delta \theta = \frac{D}{a_0} \frac{z+1}{\text{sh} \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K (1+z)^2}} \right]} \quad (6.12)$$

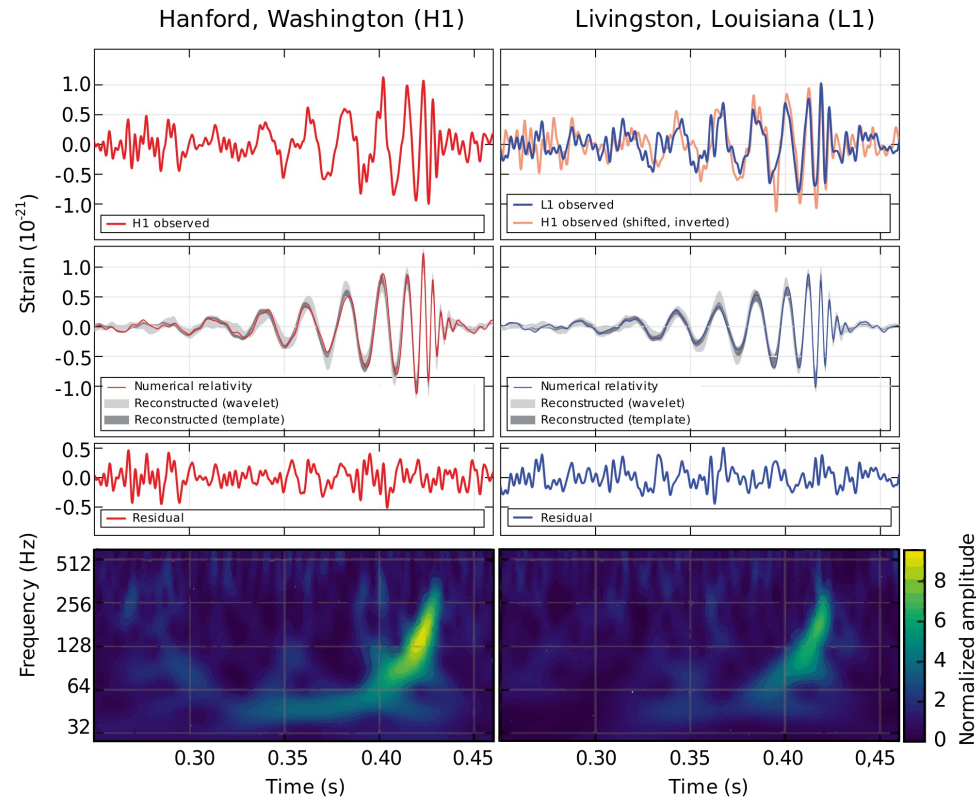
$$\Delta \theta = \Delta \theta(z, D, \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_K) \quad (6.13)$$

«Стандартные сирены» - гравитационные сигналы от слияния черных дыр и нейтронных звезд
(gravitational wave standard sirens)



Регистрируются наземными детекторами гравитационных волн преимущественно с расстояний $z \sim 0.1$, но уже до расстояний $z \approx 0.8$.

Wave forms



По профилю гравитационного всплеска с хорошей точностью восстанавливаются массы черных дыр и их моменты \Rightarrow абсолютная энергетика всплеска.

По замедлению колебаний восстанавливается z .

Абсолютная энергетика всплеска + z + наблюдаемая амплитуда = «стандартная сирена».

Термодинамика (горячей) Вселенной

Химический потенциал в равновесии

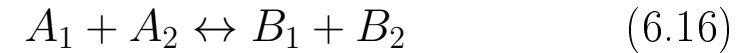
$$dE = -PdV + TdS + \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (6.14)$$

Термодинамическое **И** химическое равновесие: превращение частиц много быстрее расширения Вселенной.

Равновесие и статика:

$$dV = dS = 0 \Rightarrow \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (6.15)$$

Пример реакции в равновесии:



Предположим малый выход из химического равновесия, $dN \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mu_{A_1} dN + \mu_{A_2} dN - \mu_{B_1} dN - \mu_{B_2} dN &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{A_1} + \mu_{A_2} &= \mu_{B_1} + \mu_{B_2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} A_1 + \dots + A_n \leftrightarrow B_1 + \dots + B_m \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{A_1} + \dots + \mu_{A_n} &= \mu_{B_1} + \dots + \mu_{B_m} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Полезные следствия:

$$e + e \leftrightarrow e + e + \gamma + \dots + \gamma \Rightarrow \mu_\gamma = 0 \quad (6.19)$$

$$b + \bar{b} = 2\gamma \Rightarrow \mu_b = -\mu_{\bar{b}} \quad (6.20)$$

Распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна в импульсном представлении (идеальные газы)

Обычная запись распределений ФД и БЭ идеального газа:

$$N_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu)/T} \pm 1}; \quad \begin{array}{l} +\text{ФД} \\ -\text{БЭ} \end{array} \quad (6.21)$$

- N_i – число частиц в энергетическом ящике номер i с энергией E_i
- g_i – число минимальных ячеек фазового пространства одной частицы в этом ящике (стат. вес ящика).

Рассматриваем объем V с однородным газом частиц. Энергетический ящик $d\Gamma = d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$ вблизи энергии E .

Тогда

$$g_i = \frac{d\Gamma}{a} g \quad (6.22)$$

- a – объем минимальной ячейки фазового пространства частицы
- g – статистический вес (количество) внутренних состояний частицы (спин, спиральность)

$$dN = \frac{g}{a} \frac{d\Gamma}{e^{(E - \mu)/T} \pm 1} \quad (6.23)$$

Из кв.мех.:

$$a = h^3 = (2\pi)^3 \hbar^3 \equiv (2\pi)^3 \quad (6.24)$$

Распределение однородно внутри $V \Rightarrow$ нет зависимости от координат и в $d\Gamma$ можно включить весь V :

$$d\Gamma = V d^3\mathbf{p} \Rightarrow \quad (6.25)$$

$$dN = \frac{1}{(2\pi)^3} g \frac{V d^3\mathbf{p}}{e^{[E(\mathbf{p}) - \mu]/T} \pm 1} \quad (6.26)$$

Можно переписать как плотность распределения импульса:

$$\frac{1}{V} \frac{dN}{d^3\mathbf{p}} \equiv f(\mathbf{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{[E(\mathbf{p}) - \mu]/T} \pm 1} = f(E(\mathbf{p})) \quad (6.27)$$

Нормировка:

$$\int f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = n - \text{число частиц в 1 объеме} \quad (6.28)$$

Как выражаются n, ρ, p через $f(E)$?

Для частиц типа $i \rightarrow f_i(\mathbf{p})$

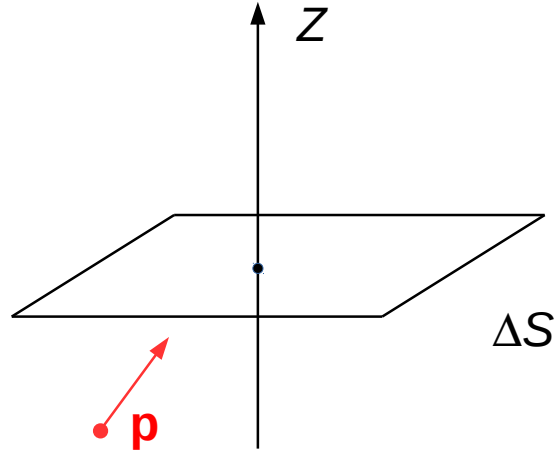
$$E_i(\mathbf{p}) = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \Rightarrow E_i dE_i = p_i dp_i \quad (6.29)$$

Интегрируя по углам – плотность числа частиц через распределение по энергии:

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_i(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \int f_i(p) 4\pi p^2 dp = \\ &= 4\pi \int f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \end{aligned} \quad (6.30)$$

Плотность энергии

$$\rho_i = \int f_i(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = 4\pi \int f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE \quad (6.31)$$



Количество частиц с импульсом в $d^3\mathbf{p}$ около \mathbf{p} , налетающих с одной стороны за Δt :

$$\Delta n_i = v_z f_i(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} \Delta S \Delta t \quad (6.32)$$

$$p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2}}; \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}; \Rightarrow v_z = \frac{p_z}{E} \quad (6.33)$$

От одной частицы площадка получает получает импульс $\Delta p_z = 2p_z \Rightarrow$

Давление есть переданный импульс через единицу площади в единицу времени (p_i слева - давление!):

$$\begin{aligned} p_i &= \int_{p_z > 0} 2p_z \frac{p_z}{E} f_i(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \left\langle p_z^2 = \frac{1}{3} p^2, 2 \rightarrow 1 \right\rangle = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{E(p)} f_i(p) = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{p^3}{E} f_i(p) E dE = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE \quad (6.34) \end{aligned}$$

$$f(E) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad (6.35)$$

$$n_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \quad (6.36)$$

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE \quad (6.37)$$

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE \quad (6.38)$$

Ультрарелятивистские частицы: $T \gg m_i, \mu_i = 0$

Из (6.37):

$$\begin{aligned} \rho_i &= 4\pi \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z \pm 1} dz \quad (6.39) \end{aligned}$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z + 1} dz = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n \quad (6.40)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz = \frac{(2\pi)^{2n}}{4n} B_n \quad (6.41)$$

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad (6.42)$$

$n = 2 \Rightarrow$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z + 1} dz = \frac{7}{4} \pi^4 \frac{1}{30} \quad (6.43)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z - 1} dz = 2\pi^4 \frac{1}{30} \quad (6.44)$$

Объемная формула Стефана-Больцмана для УР-частиц типа i :

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (6.45)$$

Если все УР частицы имеют одинаковую температуру T , то

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (6.46)$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \quad (6.47)$$

g_* — эффективное число степеней свободы (стат.вес).

Давление

Из (6.38):

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \frac{\rho_i}{3} \quad (\text{см. (6.39)}) \quad (6.48)$$

Для УР вещества всегда $p = \rho/3$.

Плотность числа частиц

$$\begin{aligned} n_i &= 4\pi \int \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^2 dE = \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty \frac{z^2}{e^z \pm 1} dz \quad (6.49) \end{aligned}$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} = (1 - 2^{1-x})\Gamma(x)\zeta(x) \quad (6.50)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} = \Gamma(x)\zeta(x) \quad (6.51)$$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (6.52)$$

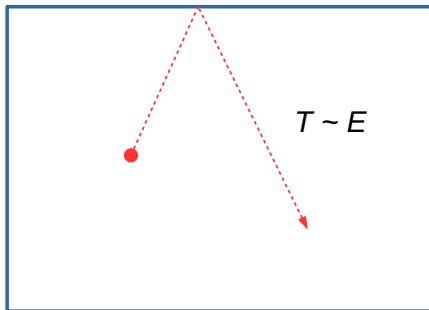
x	$\zeta(x)$
3	1.202
5	1.037
3/2	2.612
5/2	1.341

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \end{aligned} \quad (6.53)$$

$x = 3 \Rightarrow$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & \text{— Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{— Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (6.54)$$

Частица в ящике: частица одна, а температура сколь угодно высокая? Где ошибка?



А есть ли тепловое (химическое) равновесие?

Характерное время расширения:

$$1/t_H \sim H(t) \quad (6.55)$$

Электромагнитное взаимодействие:

$$\sigma \propto \alpha^2 \Rightarrow 1/t_{em} \sim \alpha^2 T \quad (6.56)$$

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}Gg_*\frac{\pi^2}{30}T^4} = T^2 \sqrt{\frac{8\pi^3}{90}g_*} \frac{1}{M_{Pl}} \quad (6.57)$$

$$H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}; \quad M_{Pl}^* = M_{Pl} \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}} = \frac{1}{1.66\sqrt{g_*}} M_{Pl} \quad (6.58)$$

Нужно:

$$t_{em} \ll t_H \Rightarrow 1/t_{em} \gg H(t) \quad (6.59)$$

$$\alpha^2 T \gg \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T \ll \alpha^2 M_{Pl}^* \sim 10^{14} \text{ ГэВ} \quad (6.60)$$

Тепловое равновесие для ЭМ взаимодействия хорошо работает для $T \lesssim 10^{12}$ ГэВ

$$f(E) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}$$

$$n_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE$$

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE$$

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE$$

Нерелятивистский газ (распределение Больцмана)

$$m_i \gg T, \quad m_i - \mu_i \gg T \Rightarrow e^{(E-\mu_i)/T} \gg 1 \quad (6.61)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-[E(p)-\mu_i]/T} \quad (6.62)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} e^{-p^2/(2m_i T)} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_B(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \int_0^\infty f_B(p) 4\pi p^2 dp = \\ &= 4\pi \frac{g_i}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} \int_0^\infty p^2 e^{-p^2/(2m_i T)} dp = \\ &= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4 \int_0^\infty = \\ &= g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (6.64)$$

Больцмановский газ:

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (6.65)$$

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \quad (6.66)$$

$$p = \frac{1}{3} n \langle \mathbf{v}\mathbf{p} \rangle \Rightarrow \left\langle E_k = \frac{3}{2} T \right\rangle \Rightarrow p_i = n_i T \ll \rho_i \quad (6.67)$$

Энтропия во Вселенной

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i \quad (6.68)$$

Будем считать dE в расчете на 1 тип частиц.
Для плотностей:

$$\rho = \frac{E}{V}, \quad n = \frac{N}{V}, \quad s = \frac{S}{V} \quad (6.69)$$

$$dE = \rho dV + V d\rho \quad (6.70)$$

$$dN = n dV + V dn \quad (6.71)$$

$$dS = s dV + V ds \quad (6.72)$$

Из (6.68), (6.70)–(6.72):

$$(Ts - p - \rho + \mu n)dV + (Tds - d\rho + \mu dn)V = 0 \quad (6.73)$$

Применяем (6.73) к области постоянного (единичного) объема внутри системы. $dV = 0 \Rightarrow$

$$d\rho = Tds + \mu dn \quad (6.74)$$

Это соотношение между локальными величинами выполняется всегда (в равновесии).

Подставляем (6.74) в (6.73) и применяем к произвольной системе переменного объема:

$$s = \frac{p + \rho - \mu n}{T} \quad (6.75)$$

УР газ, μ мало

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i}{T} \quad (6.76)$$

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{БЭ} \end{cases}; \quad p_i = \frac{1}{3} \rho_i \quad (6.77)$$

$$s_i = \frac{4\rho_i}{3T} = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{БЭ} \end{cases} \quad (6.78)$$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & - \text{Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & - \text{Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (6.79)$$

$$s_i = \begin{cases} \frac{7}{8} \frac{16\pi^4}{270\zeta(3)} n_i = 4.2 n_i & - \text{ФД} \\ \frac{4\pi^4}{90\zeta(3)} = 3.6 n_i & - \text{БЭ} \end{cases} \quad (6.80)$$

$$s_i \sim n_i \quad (6.81)$$

Полная плотность энтропии УР газа

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3, \quad g_* = \frac{7}{8} \sum_{ferm} g_i + \sum_{bos} g_i \quad (6.82)$$

Нерелятивистский газ

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \quad (6.83)$$

$$p_i = n_i T \quad (6.84)$$

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i - \mu_i n_i}{T} \Rightarrow \quad (6.85)$$

$$s_i = \left(\frac{5}{2} + \frac{m_i - \mu_i}{T} \right) n_i \quad (6.86)$$

Из

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (6.87)$$

получаем

$$\frac{m_i - \mu_i}{T} = \ln \left[\frac{g_i}{n_i} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \Rightarrow \quad (6.88)$$

$$s_i = n_i \left(\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{g_i}{n_i} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \right) \quad (6.89)$$

При $T \lesssim 0.5$ МэВ электроны и адроны – нерелятивистские.

Сейчас $n_e \sim n_B \sim 10^{-9} n_\gamma$.

\ln в (6.89) $\approx 60(\star) \Rightarrow s_B \ll s_\gamma$ и

$$\boxed{s \sim s_\gamma \sim n_\gamma} \quad (6.90)$$

Из (6.86) и (6.89) $\Rightarrow \mu_i \sim m_i$.

Сохранение энтропии при сохранении разности числа частиц и античастиц: $d(N - \bar{N}) = 0$

В сопутствующем объеме, с учетом всех типов частиц:

$$\begin{aligned} dE &= TdS - pdV + \sum \mu(dN - d\bar{N}) = \\ &= TdS - pdV + \sum \mu d(N - \bar{N}) = \\ &= TdS - pdV \end{aligned} \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned} TdS &= dE + pdV = d(\rho V) + pdV = \\ &= Vd\rho + \rho dV + pdV = (p + \rho)dV + Vd\rho \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$T \frac{dS}{dt} = (p + \rho) \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} \quad (6.93)$$

$$\text{Сопутствующий объем: } V = ka^3 \Rightarrow \quad (6.94)$$

$$\frac{dV}{dt} = k3a^2 \dot{a} \Rightarrow \quad (6.95)$$

$$T \frac{dS}{dt} = ka^3 \left[(p + \rho) 3 \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\rho} \right] \quad (6.96)$$

Закон сохранения ЭИ:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho) = 0 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0 \quad (6.97)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} (ka^3 s) \Rightarrow \frac{d}{dt} (a^3 s) = 0 \quad (6.98)$$

Закон сохранения энтропии в локальной форме

$$\boxed{3\dot{a}s + a\dot{s} = 0} \quad (6.99)$$

Барион-фотонное отношение

При температуре ниже по крайней мере ~ 100 ГэВ барионное число сохраняется:

$$(n_B - n_{\bar{B}})a^3 = \text{const} \quad (6.100)$$

$$sa^3 = \text{const} \Rightarrow \quad (6.101)$$

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = \text{const} \quad (6.102)$$

– хорошая характеристика барионной асимметрии (сейчас $\Delta_B = n_B/s$)

Барион-фотонное отношение:

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (6.103)$$

При температуре $T \lesssim 0.5$ МэВ (электроны и позитроны становятся нерелятивистскими и аннигилируют)

$$\left\langle T_\nu = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T_\gamma \right\rangle$$

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3 = \left(2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} \right) \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (6.104)$$

$$\Delta_B = \left\langle n_{\bar{B}} \approx 0 \right\rangle = \frac{n_B}{s} = \frac{n_B n_\gamma}{n_\gamma s} = \eta_B \frac{n_\gamma}{s} =$$

$$= \frac{2^{\zeta(3)} T^3}{\left(2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} \right) \frac{4\pi^2}{90} T^3} \eta_B = 0.14 \eta_B \quad (6.105)$$

$$\boxed{\Delta_B = 0.14 \eta_B} \quad (6.106)$$

$$\eta_B = (6.10 \pm 0.20) \cdot 10^{-10} \quad (6.107)$$

$$\Delta_B = 0.87 \cdot 10^{-10} \quad (6.108)$$

Частицы стандартной модели и $g_*(T)$

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (6.109)$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \quad (6.110)$$

Лептоны		Кварки	
$\nu_e(?)$	$e(0.511 \text{ МэВ})$	$u(1.5\text{--}3.0 \text{ МэВ})$	$d(3.0\text{--}7.0 \text{ МэВ})$
$\nu_\mu(?)$	$\mu(105.7 \text{ МэВ})$	$c(1.15\text{--}1.35 \text{ ГэВ})$	$s(0.07\text{--}0.12 \text{ ГэВ})$
$\nu_\tau(?)$	$\tau(1.78 \text{ ГэВ})$	$t(169.3\text{--}173.5 \text{ ГэВ})$	$b(4.1\text{--}4.3 \text{ ГэВ})$
Калибровочные бозоны			
$\gamma(0)$	$G(0)$	$Z(91.2 \text{ ГэВ})$	$W(80.4 \text{ ГэВ})$
Бозон Хиггса $h(125.26 \pm 0.21 \text{ ГэВ})$			

$$X - \text{бозон: } m_X \sim 10^{15} \div 10^{16} \text{ ГэВ (?) } \quad (6.111)$$

