

Лекция 9

Космологические возмущения: фоновая метрика, конформное время. Джинсовская неустойчивость. Скалярные, векторные, тензорные моды.

Космологические возмущения: фоновая плоская метрика, конформное время.

$$d\eta = dt/a; \quad dt = ad\eta; \quad dt/d\eta = a \quad (9.1)$$

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (9.2)$$

Перепишем уравнения в производных по конформному времени:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta} \frac{d}{dt} = a \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \quad (9.3)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} \quad (9.4)$$

Уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (9.5)$$

(i, j) -компонента уравнений Эйнштейна ★

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi Gp \Rightarrow 2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp \quad (9.6)$$

Ковариантный закон сохранения энергии

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0 \quad (9.7)$$

Космологические решения $a(\eta)$ ★:

$$\text{РД-стадия: } \eta = \text{const} \cdot t^{1/2}; \quad a(\eta) = \text{const} \cdot \eta \quad (9.8)$$

$$\text{ДМ-стадия: } \eta = \text{const} \cdot t^{1/3}; \quad a(\eta) = \text{const} \cdot \eta^2 \quad (9.9)$$

$$\Lambda\text{-стадия: } \eta = -\text{const} \cdot e^{-H_{dS}t}, \quad \eta < 0; \quad a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta} \quad (9.10)$$

$$H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (9.11)$$

Коэффициенты в (9.8) и (9.9) – через a_0 и измеримые величины

РД-стадия ($T \lesssim 100$ ГэВ)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}G\frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \quad (9.12)$$

Сохранение энтропии:

$$g_*a^3T^3 = g_*^0a_0^3T_0^3 \quad (9.13)$$

$$T^3 = \frac{g_*^0}{g_*} \frac{a_0^3}{a^3} T_0^3 \Rightarrow T = \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \frac{a_0}{a} T_0 \quad (9.14)$$

$$\rho_c \Omega_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*^0T_0^4 \Rightarrow T_0^4 = \frac{\Omega_{rad}\rho_c}{\frac{\pi^2}{30}g_*^0} \quad (9.15)$$

Подставляем (9.15) в (9.14), (9.14) в (9.12):

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{8\pi}{3}G\rho_c\right) \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Omega_{rad} = \\ &= H_0^2 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Omega_{rad} \quad (9.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{\dot{a}} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \sqrt{\Omega_{rad}}} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0^2} \frac{a}{\sqrt{\Omega_{rad}}}
\end{aligned} \tag{9.17}$$

$$\eta = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \frac{a}{a_0} \tag{9.18}$$

ДМ-стадия (но не Λ)

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c \tag{9.19}$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M = \frac{8\pi}{3} G \rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \tag{9.20}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_M^0}{\rho_c} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow H^2 = H_0^2 \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{9.21}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \sqrt{\Omega_M} (a_0/a)^{3/2}} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \sqrt{\frac{a}{a_0}}
\end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\eta^2 = \frac{a}{a_0} \frac{4}{a_0^2 H_0^2 \Omega_M} \tag{9.23}$$

Конформные времена $\eta_0, \eta_r, \eta_{eq}$ – через a_0 и измеримые величины

Уравнение Фридмана:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4} \tag{9.24}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_{z+1}^{\frac{a_0}{a}} - \frac{a_0}{(z+1)^2} dz = \\
&= \int_\infty^z - \frac{dz}{a_0 H(z)} = \\
&= \frac{1}{a_0 H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4}}
\end{aligned} \tag{9.25}$$

Конформное время современной эпохи:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times \\ &\times \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + (1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times I(\Omega_M) \quad (9.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_M = 0.31, \quad \Omega_\Lambda = 0.69, \quad \Omega_{rad} = 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \\ I(\Omega_M) \approx 0.89 \quad (9.27) \end{aligned}$$

Конформное время последнего рассеяния (рекомбинации):

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{2} \int_{z_r}^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) \quad (9.28) \end{aligned}$$

\mathcal{F} считается:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} = \\ \left\langle \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} = 1 + z_{eq} \star \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \\ \mathcal{F} &= 0.017 \quad (9.29) \end{aligned}$$

Легко считается угол видимости горизонта рекомбинации:

$$\Delta\theta_r = \eta_r / \eta_0 = 0.019; \quad \Delta\theta_r = 1.1^\circ \quad (9.30)$$

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+z_{eq}}}; \quad \mathcal{F} = 0.0076 \quad (9.31)$$

$$\frac{\eta_r}{\eta_{eq}} = 2.3; \quad \frac{\eta_0}{\eta_{eq}} = 1.2 \cdot 10^2 \quad (9.32)$$

η_r и η_{eq} близки, но не совпадают.

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}} (\sqrt{2}-1) \quad (9.33)$$

$$a_0 \eta_r = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \left(\sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \right) \quad (9.34)$$

$$a_0 \eta_0 = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M); \quad I(\Omega_M) = 0.89 \quad (9.35)$$

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} (a_{eq} \eta_{eq}) = \frac{a_0}{a_{eq}} l_H^{eq} \quad (9.36)$$

– до каких размеров сейчас растянулся горизонт на момент перехода РД→ДМ. И т.д.

$$a_0 \eta_{eq} = 120 \text{ Мпк} \quad (9.37)$$

$$a_0 \eta_r = 510 \text{ Мпк} \quad (9.38)$$

$$a_0 \eta_0 = 14.1 \text{ Гпк} = 46.0 \text{ Млрд. св. лет} \quad (9.39)$$

Космологические возмущения

Джинсовская неустойчивость

Ньютоновская гравитация + классическая гидродинамика нерелятивистской идеальной жидкости.

Гравитационный потенциал:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (9.40)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (9.41)$$

Уравнение Эйлера для идеальной жидкости:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \quad (9.42)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \Rightarrow \quad (9.43)$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \quad (9.44)$$

Начальные условия – бесконечная однородная статическая среда:

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad p(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (9.45)$$

[Заведомо нереалистично, т.к. $\Delta\varphi = 4\pi G\rho \neq 0$]

Изучаем малые возмущения.

Линеаризованные уравнения:

Из (9.40):

$$\Delta(\varphi + \delta\varphi) = 4\pi G(\rho + \delta\rho) \Rightarrow \quad (9.46)$$

$$\Delta\delta\varphi = 4\pi G\delta\rho \quad (9.47)$$

Из (9.41):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho + \delta\rho) + \nabla[(\rho + \delta\rho)(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})] &= \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v} + \delta\rho\mathbf{v} + \rho\delta\mathbf{v} + \delta\rho\delta\mathbf{v}) = \\ &= \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) \right] + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\delta\mathbf{v}) = \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} \Rightarrow \end{aligned} \quad (9.48)$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} = 0 \quad (9.49)$$

Из (9.44):

$$\rho(\delta\mathbf{v}\nabla)\delta\mathbf{v} \simeq 0 - 2\text{-й порядок малости} \quad (9.50)$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi \quad (9.51)$$

Уравнение состояния: $p = p(\rho)$

$$\delta p = \frac{dp}{d\rho}\delta\rho \equiv u_s^2\delta\rho \quad (9.52)$$

Из (9.49), подставляя $\partial\delta\mathbf{v}/\partial t$ из (9.51)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} &= \\ = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi\right) &= \left\langle \nabla\delta p = \nabla\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho\right) \right\rangle = \\ = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}u_s^2\nabla\delta\rho\right) - 4\pi G\rho\delta\rho &= \\ = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - u_s^2\Delta\delta\rho - 4\pi G\rho\delta\rho = 0 & \quad (9.53) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - u_s^2\Delta\delta\rho - 4\pi G\rho\delta\rho = 0} \quad (9.54)$$

[Если $G = 0$, то простое волновое уравнение]

Ищем решения в виде малых линейных волн:

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \int d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q}) = \int d^3q e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \delta\rho(\mathbf{q}, t) \quad (9.55)$$

$$\frac{\partial^2\delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \int [-\omega^2(\mathbf{q})] d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q}) \quad (9.56)$$

$$\Delta\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \int (-q^2) d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q})$$

Подставляем в (9.54):

$$\int [-\omega^2(\mathbf{q}) + u_s^2q^2 - 4\pi G\rho] e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)} \delta\rho(\mathbf{q}) d^3q = 0 \quad (9.57)$$

\Rightarrow Закон дисперсии

$$\omega^2(\mathbf{q}) = \omega^2(q) = u_s^2q^2 - 4\pi G\rho \quad (9.58)$$

Джинсовский «импульс» (волновое число) и длина волны

$$\omega^2(q) = 0 \Rightarrow q_J = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{u_s^2}}; \quad \lambda_J = \frac{2\pi}{q_J} \quad (9.59)$$

$$\lambda < \lambda_J \Rightarrow \omega^2(q) > 0, \text{ волна} \quad (9.60)$$

$$\lambda > \lambda_J \Rightarrow \text{волновых решений нет} \quad (9.61)$$

$$\omega(q) = \pm i\sqrt{4\pi G\rho - u_s^2q^2} = \pm\Omega_q, \quad \Omega_q > 0 \quad (9.62)$$

$$\delta\rho(q, t) = \delta\rho(q, 0)e^{\pm\Omega_q t} \quad (9.63)$$

Экспоненциально растущее и экспоненциально падающее решения – гравитационная неустойчивость Джинса.

Если $u_s = 0$ (пыль) то колебательных решений нет совсем.

*Однородная вселенная Ньютона неустойчива!
Стационарная модель Эйнштейна неустойчива!*

Линейный и нелинейный режимы:

$$\delta(\mathbf{q}, t) \equiv \frac{\delta\rho(\mathbf{q}, t)}{\rho} \quad (9.64)$$

Если $\delta(\mathbf{q}, t) \ll 1$ работает линейный анализ (представление Фурье).

Время входа в нелинейный режим определяется условием

$$\delta(\mathbf{q}, t_{nl}) \sim 1 \quad (9.65)$$

Теория неустойчивости Джинса – прообраз теории космологических возмущений.

Возмущения (плоской) метрики и фиксация калибровки $h_{0i} = 0$

Задача: Пусть на какой-то стадии эволюции Вселенной (возможно, весьма ранней) но после горячего Большого взрыва, над фоном Фридмановского пространства имеются малые возмущения вещества (и, следовательно, метрики). Что с ними станет по мере дальнейшей эволюции Вселенной?

$$ds^2 = a^2(\eta)\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (9.66)$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (9.67)$$

$\eta_{\mu\nu}$ – Минковский, $h_{\mu\nu}$ – возмущение.

Соглашение: Индексы *возмущений* будем поднимать/опускать метрикой Минковского:

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}h_{\rho\lambda} \text{ и т.д.} \quad (9.68)$$

Если $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, то $\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ (★)

Теория инвариантна относительно калибровочных преобразований – произвольных диффеоморфизмов. Рассматриваем произвольные инфинитезимальные преобразования

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad \xi^\mu \sim h^{\alpha\beta} \quad (9.69)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu \quad \star \quad (9.70)$$

Как преобразуются $h^{\mu\nu}$? Используем (9.70):

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\nu} &= \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) + g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\nu + g^{\nu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\mu \quad (9.71) \end{aligned}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu - (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\mu \quad (9.72)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu &\simeq \eta^{\mu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\nu = \eta^{\mu\lambda}(\partial_\lambda \xi^\nu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma) = \\ &= \partial^\mu \xi^\nu + \eta^{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma \quad (9.73) \end{aligned}$$

$\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu$ достаточно считать в 0-порядке:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu &= \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\sigma g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\sigma\lambda}) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\eta^{\nu\rho}[\partial_\sigma(a^2\eta_{\lambda\rho}) + \partial_\lambda(a^2\eta_{\rho\sigma}) - \partial_\rho(a^2\eta_{\sigma\lambda})] = \\ &= \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \delta_\lambda^\nu + \partial_\lambda a \delta_\sigma^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho}\eta_{\sigma\lambda}) \quad (9.74) \end{aligned}$$

$$\eta^{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a \eta^{\mu\lambda} \xi^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho} \xi^\mu) \quad (9.75)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu &= \\ &= \partial^\mu \xi^\nu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a \eta^{\mu\lambda} \xi^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho} \xi^\mu) \quad (9.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\mu &= \\ &= \partial^\nu \xi^\mu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\nu\mu} + \partial_\lambda a \eta^{\nu\lambda} \xi^\mu - \partial_\rho a \eta^{\mu\rho} \xi^\nu) \quad (9.77) \end{aligned}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\sigma \frac{\partial_\sigma a}{a} \quad (9.78)$$

Так как ξ^μ есть 4 произвольные функции, то их выбираем так, чтобы занулить 3 величины $h_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Остается еще остаточная инвариантность для преобразований (так как они не меняют $0i$ -компоненты)

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \quad (9.79)$$

Годится, в частности

$$\xi_i = \xi_i(\mathbf{x}), \quad \xi_0 = 0 \quad (9.80)$$

В калибровке $h_{i0} = 0$:

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + h_{00})d\eta^2 - (\delta_{ik} + h_{ik})dx^i dx^k]. \quad (9.81)$$

Соглашение: для трехмерных индексов возмущений, они опускаются трехмерной метрикой δ_{ij}

$$v_i = \delta_{ij} v^j = v^i \quad (9.82)$$

Для наблюдателя, покоящегося в сопутствующей системе, $dx_i = 0 \Rightarrow$

$$ds^2 = d\tau^2 = a^2(\eta)(1 + h_{00})d\eta^2 \Rightarrow \quad (9.83)$$

$$d\tau = a(\eta)(1 + \frac{1}{2}h_{00})d\eta \quad (9.84)$$

Ход индивидуального времени отличается от хода космологического времени при наличии возмущений метрики!

Возмущения тензора энергии-импульса

ТЭИ идеальной жидкости:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} - \delta_{\nu}^{\mu}p \quad (9.85)$$

С возмущениями:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u^{\mu} + \delta u^{\mu})(u_{\nu} + \delta u_{\nu}) - \delta_{\nu}^{\mu}(p + \delta p) \quad (9.86)$$

Скорость в контексте космологических возмущений

Невозмущенная (координатная: η, x^i) скорость имеет только 0-компоненту: $u^{\mu} = (u^0, 0, 0, 0)$

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 1 \Rightarrow a^2\eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = a^2u^0u^0 = 1 \Rightarrow u^0 = \frac{1}{a}; \quad u_0u^0 = 1 \Rightarrow u_0 = a \quad (9.87)$$

Физические скорости:

$$dX^{\mu} = adx^{\mu} \Rightarrow V^{\mu} = \frac{dX^{\mu}}{ds} = a\frac{dx^{\mu}}{ds} = au^{\mu} \quad (9.88)$$

$$V^0 = au^0 = 1; \quad V^i = au^i = 0; \quad (9.89)$$

Возмущенная скорость:

$$\hat{V}^0 = V^0 + v^0 = 1 + v^0 \quad (9.90)$$

$$\hat{V}^i = V^i + v^i = v^i - \text{физическая скорость} \quad (9.91)$$

v^0 и v^i – величины первого порядка малости.

$$\hat{V}^{\mu} = a\hat{u}^{\mu} \Rightarrow \hat{u}^{\mu} = \frac{1}{a}\hat{V}^{\mu} \quad (9.92)$$

$$\hat{u}^0 \equiv u^0 + \delta u^0 = \frac{1}{a}(1 + v^0) \quad (9.93)$$

$$\hat{u}^i \equiv u^i + \delta u^i \equiv \delta u^i = \frac{1}{a}v^i \quad (9.94)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
1 &= g_{\mu\nu}\hat{u}^\mu\hat{u}^\nu = a^2[(\eta_{00} + h_{00})\hat{u}^0\hat{u}^0 - (\delta_{ij} + h_{ij})\hat{u}^i\hat{u}^j] = \\
&= a^2(1 + h_{00})\frac{1}{a^2}(1 + v^0)^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})\delta u^i\delta u^j \cong \\
&\cong (1 + h_{00})(1 + v^0)^2 \cong 1 + h_{00} + 2v^0 \Rightarrow \quad (9.95)
\end{aligned}$$

$$\boxed{v^0 = -\frac{1}{2}h_{00}} \quad (9.96)$$

В линейном порядке это есть гравитационное замедление времени. Даже если $v^i = 0$ время замедляется.

$$\boxed{v^i \text{ могут быть любыми (малыми)}} \quad (9.97)$$

Найдем u_μ и δu_μ (с нижними индексами):

$$\begin{aligned}
\hat{u}_\mu\hat{u}^\mu &= (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) + \delta u_i\delta u^i \cong \\
&\cong (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) = 1 \Rightarrow \quad (9.98)
\end{aligned}$$

$$u_0 + \delta u_0 = \frac{1}{u^0 + \delta u^0} = a(1 - v^0) \quad (9.99)$$

$$\delta u_i = g_{i\mu}\delta u^\mu \cong a^2\eta_{i\mu}\delta u^\mu = -a^2\delta u^i = -a^2\frac{1}{a}v^i = -av^i \quad (9.100)$$

$$\boxed{u_0 + \delta u_0 = a(1 - v^0)} \quad (9.101)$$

$$\boxed{\delta u_i = -av_i} \quad (9.102)$$

Компоненты TЭИ

Из (9.86)

$$T_\nu^\mu = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u^\mu + \delta u^\mu)(u_\nu + \delta u_\nu) - \delta_\nu^\mu(p + \delta p) \Rightarrow \quad (9.103)$$

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}(1 + v_0)a(1 - v_0) - \delta_0^0(p + \delta p) \cong \\
&\cong \rho + \delta\rho \Rightarrow \quad (9.104)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta T_0^0 = \delta\rho} \quad (9.105)$$

$$\begin{aligned}
T_i^0 &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}(1 + v_0)(-av_i) - \delta_i^0(p + \delta p) \cong \\
&\cong (\rho + p + \delta\rho + \delta p)(-v_i) \cong -(\rho + p)v_i \Rightarrow \quad (9.106)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i} \quad (9.107)$$

$$\begin{aligned}
T_j^i &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}v^i(-av_j) - \delta_j^i(p + \delta p) \cong \\
&\cong -\delta_j^i p - \delta_j^i\delta p \Rightarrow \quad (9.108)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta T_j^i = -\delta_j^i\delta p} \quad (9.109)$$

Потребуется, когда будем выписывать линеаризованные уравнения для возмущений.

Разложение возмущений по спиральностям: скалярные, векторные, тензорные моды

Так как все уравнения пишутся в линейном порядке по возмущениям, то разные компоненты Фурье можно изучать отдельно:

$$h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{k}) \quad (9.110)$$

и т.д. для $\delta\rho, \delta p, v_i$. Дифференцирование и умножение на ik для компонент Фурье взаимозаменяемы:

$$\partial_i \leftrightarrow ik_i \quad (9.111)$$

Для фиксированной моды \mathbf{k} пространство инвариантно относительно вращений вокруг вектора \mathbf{k} – «малая группа $SO(2)$ », но тензорные компоненты $h_{ik}, v_i, \delta\rho$ (вообще говоря) не инвариантны, преобразуются друг через друга \Rightarrow моды с определенной спиральностью (3 типа).

1. Скалярные моды (спиральность 0)

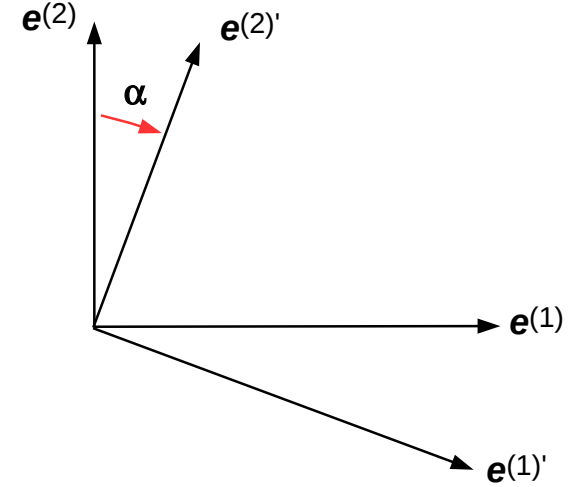
Объект при вращениях малой группы $SO(2)$ не преобразуется.

Типы скалярных мод (4 штуки)

- 3-скаляр ($\delta\rho, \delta p, \dots$)
- Вектор, $\parallel \mathbf{k}$
- Тензор, $\propto k_i k_j$ (т.к. k_i, k_j не меняются)
- Тензор, $\propto \delta_{i,j}$

2. Векторные моды (спиральность 1)

Преобразуются как вектор, ортогональный \mathbf{k}



$\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{k}$ – правая тройка.

Поворот по Ч.С. на α

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \cos \alpha - \mathbf{e}^{(2)} \sin \alpha \\ \mathbf{e}^{(2)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \sin \alpha + \mathbf{e}^{(2)} \cos \alpha \end{aligned} \quad (9.112)$$

$$\mathbf{e}^{\pm} = \mathbf{e}^{(1)} \pm i\mathbf{e}^{(2)} \quad (9.113)$$

$$\mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} = \mathbf{e}^{(1)'(\alpha)} + i\mathbf{e}^{(2)'(\alpha)} = e^{i\alpha} \mathbf{e}^{(+)} \quad (9.114)$$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} = -i \frac{\partial}{\partial \alpha} (e^{i\alpha} \mathbf{e}^{(+)}) = +1 \mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} \quad (9.115)$$

– спиральность +1

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(-)'(\alpha)} = -1 \mathbf{e}^{(-)'(\alpha)} \quad (9.116)$$

– спиральность -1

Произвольный поперечный вектор является смесью спиральностей -1 и $+1$:

$$\mathbf{S} = a_1 \mathbf{e}^{(1)} + a_2 \mathbf{e}^{(2)} = \alpha_- \mathbf{e}^{(-)} + \alpha_+ \mathbf{e}^{(+)} \quad (9.117)$$

Единичную спиральность имеют (2 типа)

- Поперечные векторы
- Тензоры со структурой $k_i W_j^T$, где W_j^T – поперечный вектор, то есть $k_i W_i^T = 0$

(скалярные моды имеют спиральность 0, т.к. они не зависят от поворота α)

3. Тензорные моды (спиральность 2), всего 1 тип

Рассмотрим симметричные, бесследовые, поперечные 3-мерные тензоры:

- $h_{ij} = h_{ji}$ – 3 условия
- $h_{ii} = 0$ – 1 условие
- $k_i h_{ij} = 0$ – поперечность, 3 условия

9 параметров, 7 условий, 2 – свободные \Rightarrow

Размерность = 2

Из $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ построим два тензора:

$$e_{ij}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)} e_j^{(1)} - e_i^{(2)} e_j^{(2)}) \quad (9.118)$$

$$e_{ij}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)} e_j^{(2)} + e_i^{(2)} e_j^{(1)}) \quad (9.119)$$

– линейно независимы, симметричны, бесследовы, поперечны по определению.

$$e_{ij}^{(\pm 2)} = e_{ij}^{(+)} \pm i e_{ij}^{(\times)} \quad (9.120)$$

Элементарно проверяется:

$$e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) = e^{+2i\alpha} e_{ij}^{(+2)'} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) = +2 e_{ij}^{(+2)'} \quad (9.121)$$

$$e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) = e^{-2i\alpha} e_{ij}^{(-2)'} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) = -2 e_{ij}^{(-2)'} \quad (9.122)$$

– объекты со спиральностью ± 2 .

• 4 типа скаляров (спиральность 0), 2 типа векторов (спиральность 1), 1 тип тензоров (спиральность 2) достаточно для разложения по ним всех величин, нужных для теории космологических возмущений (следующая лекция).

• Дифференцирование компонент Фурье по x_j эквивалентно умножению на $i k_j$, поэтому не меняет спиральности \Rightarrow

Линеаризованные (и потому линейные) уравнения разбиваются на независимые компоненты для мод разной спиральности.

Моды разной спиральности эволюционируют существенно по-разному!