

## Лекция 12

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.  
Анизотропия реликтового излучения. Эффекты распространения фотонов и наблюдаемые возмущения температуры CMB

## Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.

Важна в двух отношениях:

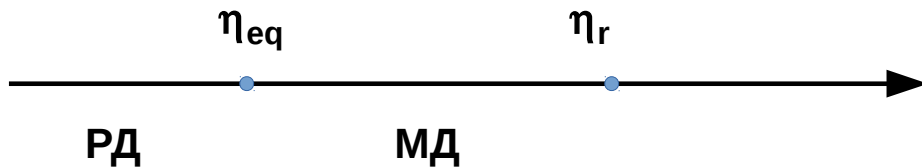
- Определяет структуру анизотропии реликтового микроволнового фона
- Формирует начальные условия для последующего формирования структур – галактик и т.д.

Вплоть до рекомбинации барион-фотонная компонента среды  $B\gamma$  остается релятивистской, в том смысле, что

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_{eq}) \cong 0.30 \quad (12.1)$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_r) \cong 0.85 \quad (12.2)$$

$B\gamma$  рассматривается как единая среда.



## Адиабатические моды, входящие под горизонт на РД-стадии

Уже известно: Релятивистская компонента на РД-стадии осциллирует с фиксированной фазой (10.155)

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[ \cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] \quad (12.3)$$

$$\Phi_{(i)} = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \quad (12.4)$$

Осцилляции  $B\gamma$  продолжаются до рекомбинации.

- Существенно новое явление: Потенциал главной УР осциллирующей компоненты  $\Phi(\eta)$  индуцирует возмущения темной материи, которые уже на РД-стадии логарифмически растут во времени.
- Релятивистская  $B\gamma$ -материя осциллирует до самой рекомбинации, и остаточных возмущений  $\sqrt{R} \sim 5 \cdot 10^{-5}$  не хватило бы для перехода в нелинейный режим и формирования структур.
- После рекомбинации барионная материя сваливается в потенциальные ямы, сформированные CDM еще до рекомбинации (и даже до  $\eta_{eq}$ ), и только благодаря этому возникают структуры.
- Изучаем возмущения CDM, индуцированные потенциалом (10.155) (или (12.3))

## Возмущения темной материи на РД-стадии

Потенциалы считаем заданными уравнениями (10.155) (или (12.3)).

Покомпонентные уравнения ковариантного сохранения ЭИ (11.22), (11.23):

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1+w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1+w_\lambda)\Phi' \quad (12.5)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \quad (12.6)$$

$$\lambda = CDM \Rightarrow w_\lambda = u_{s,\lambda}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 3\Phi' \quad (12.7)$$

$$v'_{CDM} + \frac{1}{\eta}v_{CDM} = -\Phi \quad (12.8)$$

Из (12.8), методом вариации постоянных:

$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} \eta\Phi(\eta) d\eta \quad (12.9)$$

$\eta_0$  – неопределенная постоянная.

Решение расходится в нуле при всех  $\eta_0 \neq 0 \Rightarrow \eta_0 = 0$ .

Следовательно конечное решение есть

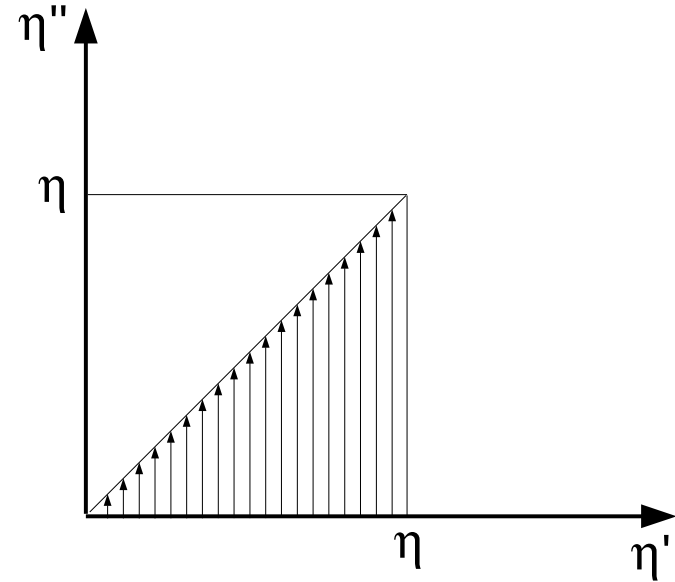
$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \eta\Phi(\eta) d\eta \quad (12.10)$$

Из (12.7) сразу получается:

$$\delta_{CDM}(\eta) = 3\Phi(\eta) + C - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \quad (12.11)$$

$$\eta = 0 \Rightarrow C = -3\Phi_{(i)} + \delta_{CDM(i)} \Rightarrow \quad (12.12)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \end{aligned} \quad (12.13)$$



$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} d\eta' \int_0^{\eta'} d\eta'' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') &= \int_0^{\eta} d\eta'' \int_{\eta''}^{\eta} d\eta' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') = \\ \int_0^{\eta} d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \int_{\eta''}^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} &= \int_0^{\eta} d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left( \frac{\eta}{\eta''} \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^\eta d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left( \frac{\eta}{\eta''} \right) \end{aligned} \quad (12.15)$$

Интеграл сходится и считается, для мод глубоко под акустическим горизонтом ( $u_s k \eta \gg 1$ ) получается ★:

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM(i)} - 9\Phi_{(i)} \left[ \ln(u_s k \eta) + \mathbf{C} - \frac{2}{3} \right] \quad (12.16)$$

$\mathbf{C} = 0.577 \dots$  – постоянная Эйлера.

Из (11.49), (11.51) следует  $\delta_{CDM(i)} = -\frac{3}{2}\Phi_{(i)} \Rightarrow$

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left[ \ln \left( \frac{k\eta}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \quad (12.17)$$

Есть логарифмический рост возмущения плотности  $CDM$ , скорость которого определяется амплитудами потенциалов  $9\Phi_{(i)}$

Важны потенциалы  $CDM$ , в которые потом сваливается обычное вещество:

Из (11.14) (00 компонента Лин. Ур. Эйнштейна)

$$k^2 \Phi + 3 \frac{a'}{a} \Phi' + 3 \frac{a'^2}{a^2} \Phi = -4\pi G a^2 \delta \rho_{CDM} \quad (12.18)$$

В пределе  $u_s k \eta \gg 1$  остается только член  $k^2 \Phi \Rightarrow$

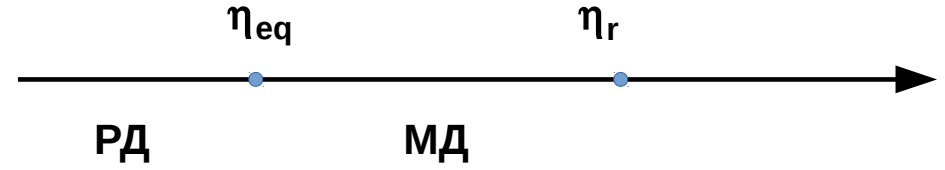
$$\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G \frac{a^2(\eta)}{k^2} \rho_{CDM}(\eta) \delta_{CDM} \quad (12.19)$$

– падает немного медленнее, чем  $1/a(\eta)$ .

На РД-стадии  $\Phi_{CDM}(\eta)$  мал по сравнению с релятивистским  $\Phi(\eta)$  из-за малости  $\rho_{CDM}$  по сравнению с  $\rho_{tot}$ .

Но вклад  $CDM$  становится главным при переходе на МД-стадию.

### Возмущения темной материи на МД-стадии



Так как  $CDM$  является доминирующей компонентой на МД-стадии после  $\eta_{eq}$ , то заранее ясно, что нужно ожидать роста  $\delta_{CDM}$  пропорционально  $a(\eta)$  на фоне постоянных потенциалов  $\Phi_{CDM}(\eta)$ , как это предсказывает упрощенная однокомпонентная модель адиабатических возмущений, см. (10.171) и (10.188).

Наивная оценка:

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \delta_{CDM}(\eta_{eq}) \frac{a(\eta)}{a_{eq}} = \\ &= -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \left[ \ln \left( \frac{k\eta_{eq}}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \approx \\ &\approx -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \ln(0.6k\eta_{eq}) \end{aligned} \quad (12.20)$$

Более точная оценка [Горбунов, Рубаков, Т.2, 6.2.1]:

$$\delta_{CDM}(\eta) \approx -\frac{27}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (12.21)$$

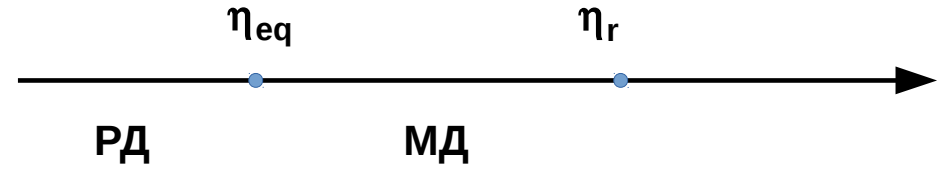
Решения не совсем сшиваются – есть переходная область в районе  $\eta_{eq}$  («ступенька», фактор  $3/2$ ).

Из (12.19):

$$\begin{aligned} \Phi_{CDM}(\eta) &= \frac{27}{2} \Phi_{(i)} 4\pi G \rho_{CDM} \frac{a^2}{k^2} \frac{a}{a_{eq}} \ln(0.2k\eta_{eq}) = \\ &= \left\langle \rho_{CDM} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \rho_{CDM}^0 = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Omega_{CDM} \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \right\rangle = \\ &= \frac{81}{4} \Phi_{(i)} \frac{a_0^2}{k^2} \Omega_{CDM} H_0^2 (1 + z_{eq}) \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (12.22) \end{aligned}$$

– не зависит от времени.

### Возмущения барион-фотонной компоненты $B\gamma$ на МД-стадии до рекомбинации



- Продолжаются осцилляции, но на фоне растущего возмущения CDM-компоненты.

- Единство  $B\gamma$  (приближение тесной связи):

$$v_\gamma \approx v_B \equiv v_{B\gamma} \quad (12.23)$$

- Для адиабатической моды  $B_\gamma$ :

$$\delta_B = 3 \frac{\delta T}{T}, \quad \delta_\gamma = 4 \frac{\delta T}{T} \Rightarrow \delta_B = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (12.24)$$

- Из-за того, что барионы нерелятивистские, переноса энергии от фотонов к барионам нет, поэтому ковариантное сохранение для барионов и фотонов выполняется отдельно.

- $B\gamma$  – субдоминантная компонента (CDM – доминантная).

С использованием потенциала (12.22) (или какого-то похожего, более точного), уравнений ковариантного сохранения и Эйнштейна для возмущений, ищется  $\delta_\gamma$ .

Можно считать численно, можно приближенно аналитически (метод типа ВКБ).

Результат (ВКБ): [Горбунов, Рубаков, Т.2, 6.2.2]

$$R_B \equiv \frac{\rho_B(\eta)}{\rho_\gamma(\eta)} \propto a(\eta) \propto \eta^2 \quad (12.25)$$

$$R_B(\eta_{eq}) \approx 0.2; \quad R_B(\eta_r) \approx 0.6 \quad (12.26)$$

$$u_s^2(\eta) = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\delta \rho_\gamma / 3}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_B} = \frac{1}{3[1 + R_B(\eta)]} \quad (12.27)$$

$u_s \neq 1/\sqrt{3}$ , но меняется не очень сильно.

$$\begin{aligned} \delta_\gamma(\eta) = \Phi_i \times \\ \times \left[ -324 \cdot (1 + R_B) I(\Omega_M)^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1 + z_{eq}) \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{6}{(1 + R_B)^{1/4}} \cos \left( k \int_0^\eta u_s(\eta') d\eta' \right) \right] \quad (12.28) \end{aligned}$$

где (см. (9.26))

$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} \approx 0.89 \quad (12.29)$$

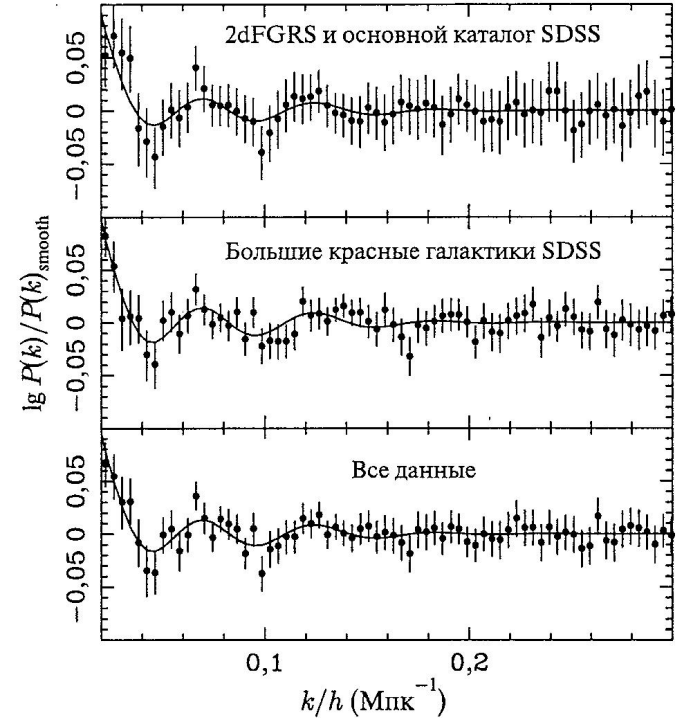
Для адиабатических мод:

$$\delta_B = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (12.30)$$

Осцилляции  $B\gamma$ -материи до момента рекомбинации влияют на

- анизотропию микроволнового фона
- распределение барионной материи – *барионные осцилляции*

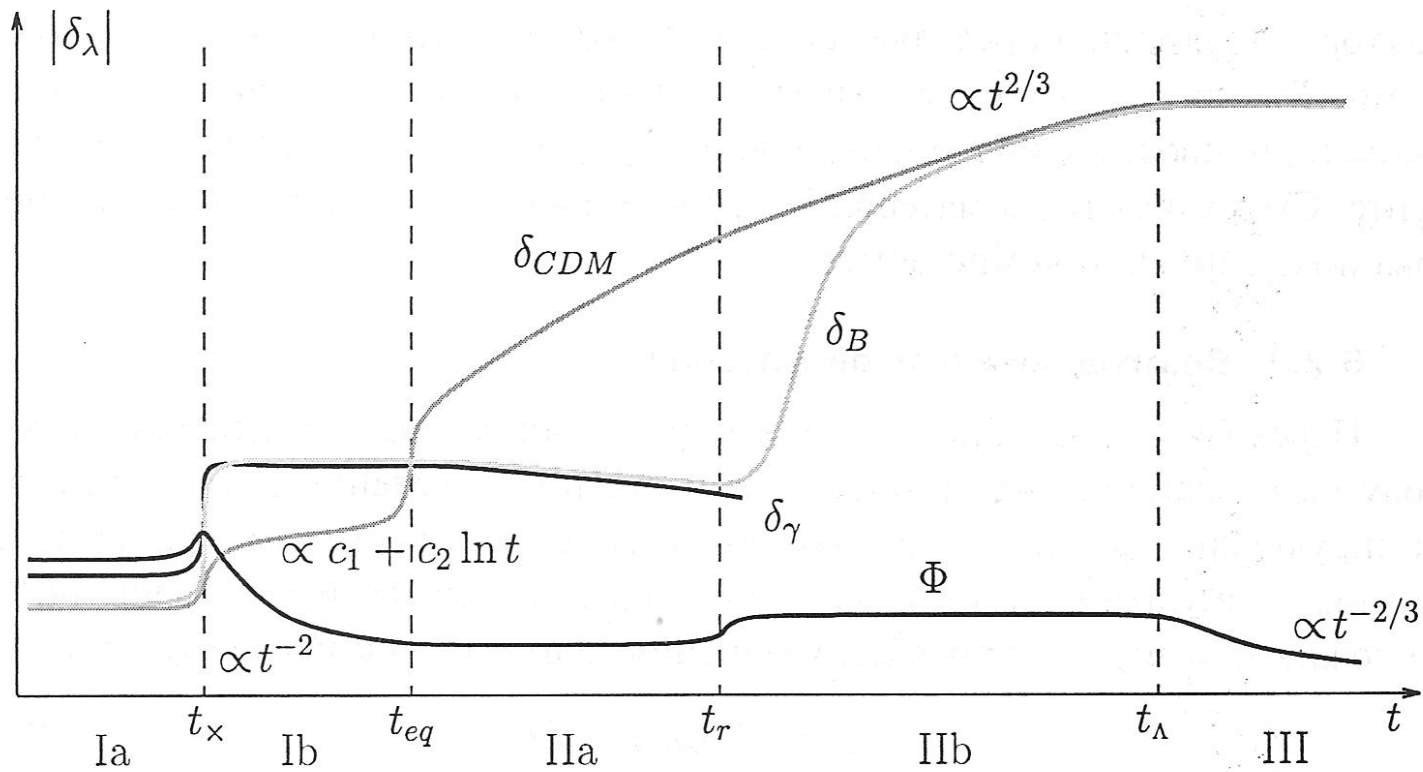
Корреляционная функция распределения материи (галактики)



Космологические возмущения видны не только в анизотропии температуры/поляризации СМВ!

Космологические возмущения видны в распределении галактик.

Это дает возможность определять космологические параметры и по анизотропии СМВ, и «локально» – по распределению галактик в пространстве (вместе с другими локальными методами).



**Рис. 6.1.** Схематическое изображение эволюции линейных скалярных возмущений в адиабатической моде с фиксированным конформным импульсом  $k$ , входящих под горизонт на РД-стадии. Осцилляции не изображены.  $t_x$  — момент входа под горизонт. Поведение вблизи характерных времен ( $t_x, t_{eq}, t_r, t_\Lambda$ ) показано условно. Масштаб по осям не соблюден. I — РД-стадия, доминируют возмущения релятивистской компоненты (раздел 4.2); Ia — до входа под горизонт моды не эволюционируют, их значения удовлетворяют соотношениям (5.22); Ib — вблизи входа под горизонт возмущение релятивистского вещества индуцирует логарифмически растущее возмущение CDM, формула (6.11); II — МД-стадия, доминируют возмущения CDM (раздел 4.3) с начальными данными для этой стадии, соответствующими формуле (6.11); IIa — возмущения барион-фотонной компоненты — звуковые волны — осциллируют согласно (6.36), кроме того, CDM-возмущения индуцируют возмущения барион-фотонной компоненты, формула (6.35); IIb — барионы отщеплены, их возмущения догоняют возмущения CDM, формулы (7.19), (7.18); III — ΛД-стадия, рост возмущений прекращается (раздел 4.4)

## Анизотропия температуры реликтового излучения

Средняя температура реликтового микроволнового фона (СМВ, Cosmic Microwave Background)

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ К}$$

Есть два типа анизотропии:

- Диполь  $\delta T/T \sim 10^{-3}$  – эффект Доплера соответствующий движению со скоростью  $v = 369 \pm 2$  км/сек относительно сопутствующей системы в направлении созвездия Гидры. Часть амплитуды может иметь космологическое происхождение, но много меньше наблюдаемого значения.

- Более высокие мультиполи космологического происхождения  $\delta T/T \sim 5 \times 10^{-5}$  – основа количественной космологии (но не единственная, что важно).

Дипольная компонента  $l = 1$  вычитается.

Анизотропия температуры:

$$\delta T_0(\mathbf{n}) = T(\mathbf{n}) - T_0 \quad (12.31)$$

$$\Theta_0(\mathbf{n}) \equiv \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (12.32)$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sin^{|m|} \theta \frac{d^{|m|} P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^{|m|}} e^{im\varphi} \quad (12.33)$$

$$a_{l,m}^* = (-1)^m a_{l,-m} \quad (\text{вещественность}) \quad (12.34)$$

$$a_{lm} = \int d\mathbf{n} \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \quad (12.35)$$

$Y_{lm}$  – неоднородности масштаба  $\pi/l$

- Коэффициенты  $a_{lm}$  линейно определяются через начальные возмущения  $\mathcal{R}$  и др.  $\Rightarrow$

- Если начальные возмущения – гауссовы случайные поля, то и  $a_{lm}$  – набор гауссовых случайных величин.

- Если Вселенная совершенно изотропна и флуктуации случайны, то  $a_{lm}$  не должны коррелировать при различных  $l, m$

- Рассматриваем ансамбль вселенных, таких как наша (!)

- Тогда, усредняя по ансамблю

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (12.36)$$

- Имея одну вселенную, измерить  $C_l$  невозможно.

- Но для больших  $l$  есть много гармоник  $m = -l, \dots, +l$  (не меньше 5), поэтому можно найти среднее  $C_l$  по набору, и можно даже проверить гауссов характер флуктуаций.

$$\langle C_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \quad (12.37)$$

Несмотря на то, что ансамбль вселенных нам недоступен, каую-то оценку  $C_l$  получить можно.

Однако ошибка в определении  $C_l$  неустранима!



Коэффициенты  $a_{lm}$  зависят от ориентации системы координат, в которой они вычисляются.

• Корректны ли определения (12.36) и (12.37)?

Величины  $\langle C_l \rangle$  – не зависят от системы координат:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 = \\
 &= \sum_{m=-l}^{+l} \int d\mathbf{n}_1 \Theta_0(\mathbf{n}_1) Y_{lm}(\mathbf{n}_1) \int d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_2) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\
 &= \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\
 &= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
 &= \frac{2l+1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.38)
 \end{aligned}$$

$$\langle C_l \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.39)$$

Точного значения  $C_l$ , какое дало бы усреднение по ансамблю, не получим!

Какова ошибка (стандартное отклонение)  $\delta C_l = ?$

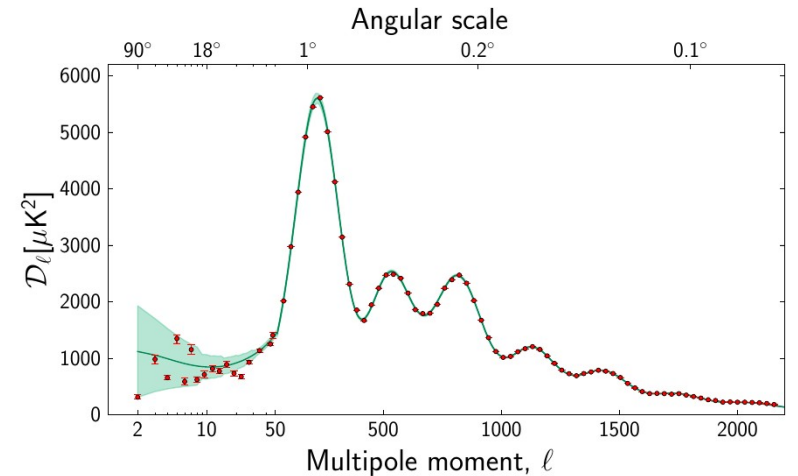
$$\begin{aligned}
 \sigma^2 C_l &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 \left( \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 (\chi_{2l+1}^2) \langle |a_{lm}| \rangle^2 = \\
 &= \frac{1}{(2l+1)^2} 2(2l+1) C_l^2 = \frac{2C_l^2}{2l+1} \Rightarrow \quad (12.40)
 \end{aligned}$$

$$\delta C_l \equiv \sqrt{\sigma^2 C_l} = \frac{C_l}{\sqrt{l + \frac{1}{2}}} \quad (12.41)$$

$\delta C_l$  – космическая неопределенность, cosmic variance.

• Предсказания величины коэффициентов  $C_l$  не могут быть проверены с точностью, выше  $\delta C_L \Rightarrow$

• Космологические параметры не могут быть определены со сколь угодно высокой точностью



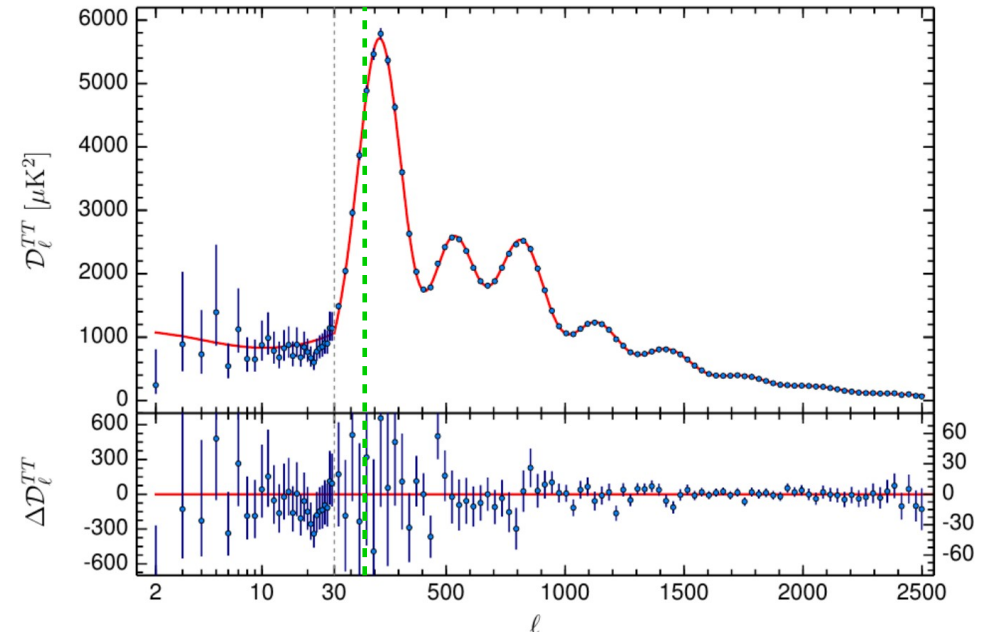
Выразим  $\langle \delta T^2 \rangle$  через коэффициенты  $C_l$ .

Двухточечная корреляционная функция (усреднение по ансамблю вселенных):

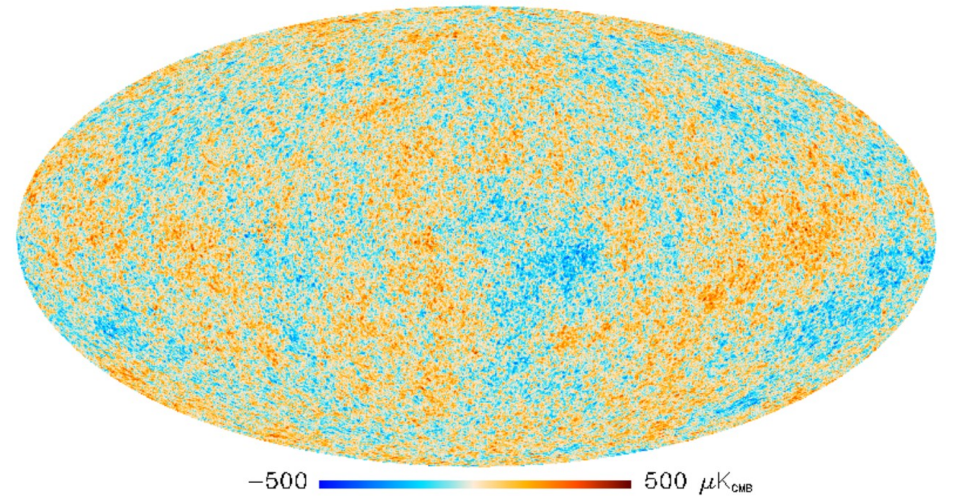
$$\begin{aligned}
 \langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0(\mathbf{n}_2) \rangle &= \langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0^*(\mathbf{n}_2) \rangle = \\
 &= T_0^2 \left\langle \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} a_{l_1 m_1} Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} a_{l_2 m_2}^* Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{n}_2) = \\
 &= \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle = C_l \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \langle a_{l m} a_{l m}^* \rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\
 &= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} C_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.42)
 \end{aligned}$$

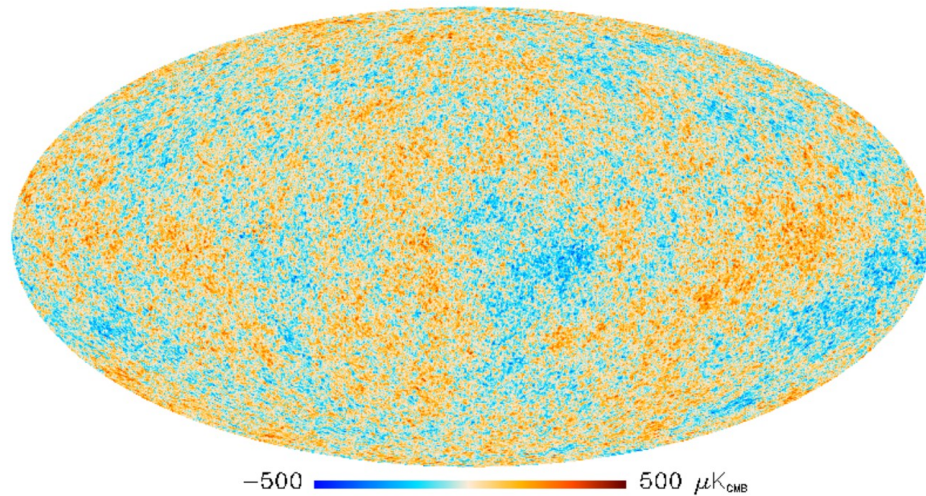
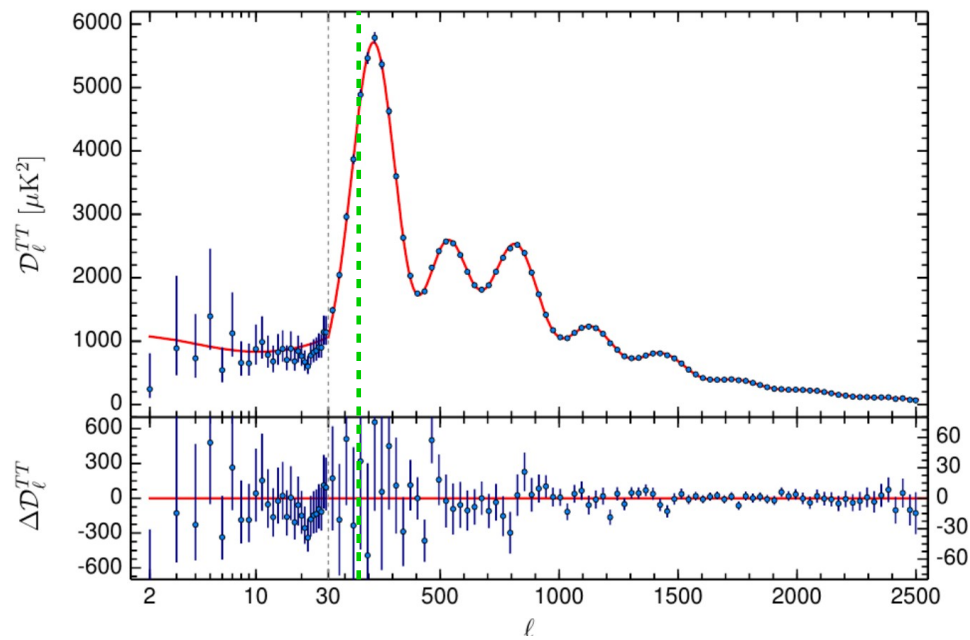
$$\begin{aligned}
 \langle \delta T_0^2(\mathbf{n}) \rangle &= \langle P_l(1) = 1 \rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \approx \langle \text{большие } l \rangle \approx \\
 &\approx T_0^2 \int_0^{\infty} \frac{l+1/2}{2\pi} C_l l \frac{1}{l} dl \cong \int_0^{\infty} T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l d(\ln l) \quad (12.43)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_l \equiv T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l} \quad (12.44)$$



$$\mathcal{D}_l^{TT} \equiv \mathcal{D}_l$$





## Структура углового спектра анизотропии температуры СМВ – качественно

- Адиабатические моды, вошедшие под горизонт после рекомбинации никогда не осциллировали и на момент рекомбинации пребывали в константной моде

⇒

На масштабах больше горизонта событий на момент рекомбинации ожидается спектр флуктуаций, близкий плоскому спектру Гаррисона-Зельдовича.

- Моды, вошедшие под горизонт до рекомбинации, осциллировали с фиксированной начальной фазой, причем частота пропорциональна  $k$

⇒

к поверхности последнего рассеяния придут с разными фазами и будет картина осцилляций в зависимости от  $l$

- Граница между режимами:

Видимый размер горизонта рекомбинации  $1.1^\circ$  (стандартная линейка)

⇒

$l \approx 160 \pm$  некоторая переходная область.

- При больших  $k$  имеет место затухание осцилляций

⇒

Должны быть механизмы затухания, и они есть (см. далее).

## Разные вклады в видимую анизотропию температуры СМВ

- Вопрос: Как влияют возмущения метрики и скорость среды на частоту регистрируемых фотонов?

Поверхность последнего рассеяния имеет конечную толщину (продолжительность), но считаем ее равной нулю –

приближение мгновенного отщепления фотонов.

- Решим уравнения движения для фотонов и проследим за 0-компонентой импульса, которая связана с частотой.

Плоская метрика с возмущениями

$$ds^2 = a^2 \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (12.45)$$

По причине конформной инвариантности ЭМ поля (см. (4.60) и далее) геодезические фотонов можно вычислять в конформноплоской метрике с возмущениями  $\gamma_{\mu\nu}$ .

Уравнение геодезической в конформной метрике  $\gamma_{\mu\nu}$ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (12.46)$$

$\lambda$  – произвольный параметр,  $\gamma_{\nu\rho}^\mu$  – связности в конформной метрике.

Касательный вектор («импульс»)

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Rightarrow \quad (12.47)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \quad (12.48)$$

Получим уравнения для  $P^\mu$  как функций конформного времени (избавимся от  $\lambda$ ).

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = \frac{d\eta}{d\lambda} \frac{dP^\mu}{d\eta} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dP^\mu}{d\eta} = P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} \Rightarrow \quad (12.49)$$

$$P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \Rightarrow \quad (12.50)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0 \Rightarrow \quad (12.51)$$

0-компонента:

$$\boxed{\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^0 \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0} \quad (12.52)$$

1. Скалярные возмущения метрики, Ньютонова калибровка

(10.52), (10.59):

$$h_{00} = 2\Phi, \quad h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij} \quad (12.53)$$

Элементарно считаются ★:

$$\gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}h'_{00}, \quad \gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \quad \gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}h'_{ij} \Rightarrow \quad (12.54)$$

$$\gamma_{00}^0 = \Phi', \quad \gamma_{0i}^0 = \partial_i \Phi, \quad \gamma_{ij}^0 = -\Phi'\delta_{ij} \quad (12.55)$$

Из (12.52) ★

$$\frac{dP^0}{d\eta} + 2P^0 \frac{P^i}{P^0} \partial_i \Phi = 0 \quad (12.56)$$

$P^i/P^0 = n^i$  – единичный (световой) вектор вдоль направления движения (почему? ★)  $\Rightarrow$

$$\frac{dP^0}{d\eta} + 2P_0 \mathbf{n} \nabla \Phi = 0 \quad (12.57)$$

$$\frac{dP^0}{d\eta} = -2P_0 \mathbf{n} \nabla \Phi = 2\Phi' P^0 - 2(\Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi) P^0 \quad (12.58)$$

$$(\Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi) = \frac{d\Phi(\eta, \mathbf{x})}{d\eta} \quad (12.59)$$

$$\frac{dP^0}{d\eta} = 2 \left( \Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) \cdot P^0 \quad (12.60)$$

Общее решение:

$$\ln P^0(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} 2 \left( \Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) d\eta \quad (12.61)$$

$\eta_0$  – некоторая константа (не нужна и не мешает).

Как изменится  $P_0$  от  $\eta'$  до  $\eta''$ :

$$\ln \left( \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} \right) = \int_{\eta'}^{\eta''} 2 \left( \Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) d\eta \quad (12.62)$$

$$\ln \left( \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} \right) \cong \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} - 1 = \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} \Rightarrow \quad (12.63)$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = 2 \int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta - 2[\Phi(\eta'') - \Phi(\eta')] \quad (12.64)$$

Как изменяется  $P^0$  нашли.

## Связь частоты $\Omega(\eta)$ с $P^0$

Фотон испущен элементом среды с (конформной) скоростью  $U^\mu$ , конформной частотой  $\Omega$  в системе покоя среды.

Работаем в конформно-Ньютоновой системе координат,  $\gamma_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$

Для скалярных возмущений в линейном порядке

$$U^0 = 1 - \Phi, \quad U^i = v^i \quad (12.65)$$

$$U_0 = 1 + \Phi, \quad U_i = -v^i \quad (12.66)$$

[ср. (9.96), (9.97) для возмущения скоростей.]

Можно локально выбрать координаты так, что будет  $\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , а в качестве  $\lambda$  взять время в этой с.к.

Тогда:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega = \tilde{p}^0 \\ \tilde{U}_\mu = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Omega = \tilde{U}_0 \tilde{p}^0 \Rightarrow \quad (12.67)$$

$\Omega$  – скаляр (частота в системе среды).

$$\Omega = U_\mu p^\mu - \text{тоже скаляр.} \quad (12.68)$$

Следовательно, это есть общековариантное выражение для частоты.

Подставляем (12.66) в (12.68)

$$\begin{aligned} \Omega &= (1 + \Phi)p^0 - v_i p^i = \left\langle n^i = \frac{p^i}{p^0} \Rightarrow p^i = n^i p^0 \right\rangle = \\ &= (1 + \Phi)p^0 - v_i n^i p^0 = (1 + \Phi - \mathbf{v}\mathbf{n})p^0 \quad (12.69) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega(\eta') = [1 + \Phi(\eta') - \mathbf{nv}(\eta')]p^0(\eta')} \quad (12.70)$$

Совершенно аналогичным образом, для приема фотона в момент  $\eta''$  наблюдателем со скоростью  $\mathbf{v}(\eta'')$

$$\Omega(\eta'') = [1 + \Phi(\eta'') - \mathbf{nv}(\eta'')]p^0(\eta'') \quad (12.71)$$

*Изменение частоты при распространении*

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\mathbf{n}, \eta'') - \Omega(\mathbf{n}, \eta')}{\Omega(\mathbf{n}, \eta')} &\cong \text{\textbackslash до первого порядка \textbackslash} \cong \\ &\cong \frac{p^0(\eta'') - p^0(\eta')}{p^0(\eta')} + \Phi(\eta'') - \Phi(\eta') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') = \\ &= \text{\textbackslash (12.64), } \frac{p^0(\eta'') - p^0(\eta')}{p^0(\eta')} = \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} \text{\textbackslash} = \\ &= 2 \int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta + \Phi(\eta') - \Phi(\eta'') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') \end{aligned} \quad (12.72)$$

- Сдвиг конформной частоты пропорционален самой частоте  $\Rightarrow$
- Форма спектра не меняется  $\Rightarrow$
- Наблюдается планковский спектр, с температурой (пропорциональна частоте), зависящей от направления

*Возмущения наблюдаемой температуры*

В момент рекомбинации были флуктуации температуры, обусловленные флуктуацией плотности  $B\gamma$ -

среды:

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \Rightarrow \quad (12.73)$$

$$\delta_\gamma = \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \frac{4\delta T}{T} = \frac{4\delta\omega}{\omega} \Rightarrow \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{4}\delta_\gamma \quad (12.74)$$

К этой величине величине добавится (12.72).  
Окончательно:

$$\frac{\delta T}{T}(\eta_0) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + [\Phi(\eta_r) - \Phi(\eta_0)] + \quad (12.75)$$

$$+ 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + \quad (12.76)$$

$$+ \mathbf{nv}(\eta_r) - \mathbf{nv}(\eta_0) \quad (12.77)$$

- (12.75) – эффект Сакса-Вольфа (флуктуация температуры + флуктуация гравитационного потенциала)
- (12.76) – интегральный эффект Сакса-Вольфа (фотон падает в один потенциал, а выбирается из другого) – следствие нелинейной эволюции возмущений, есть корреляции с крупными структурами – скоплениями галактик
- (12.77) – эффект Допплера

Вклад  $\mathbf{nv}(\eta_0)$  (диполь) вычитается, вклад  $\Phi(\eta_0)$  одинаков для всех направлений (монополь):

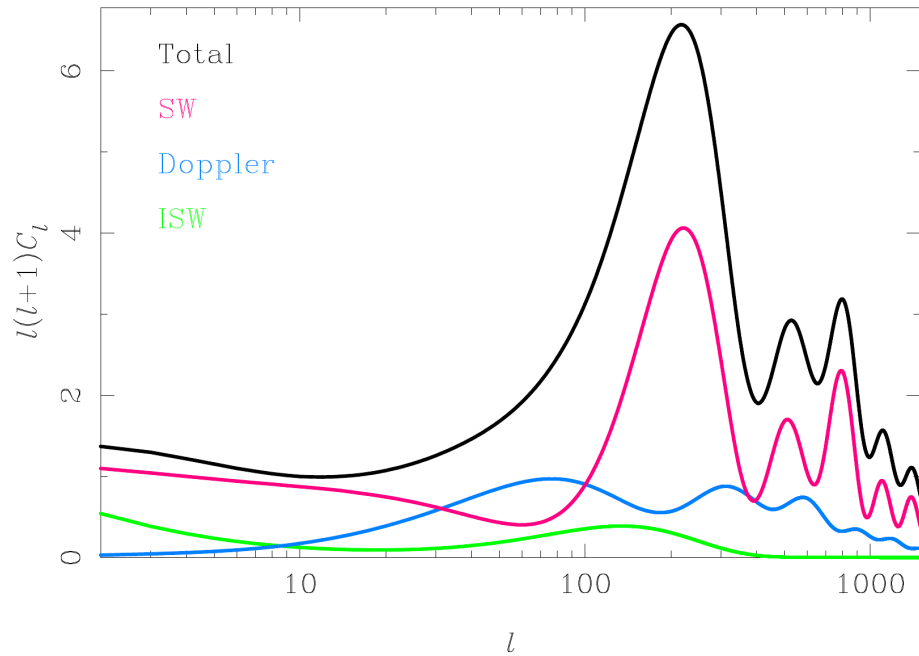
$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) + \quad (12.78)$$

$$+ 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + \quad (12.79)$$

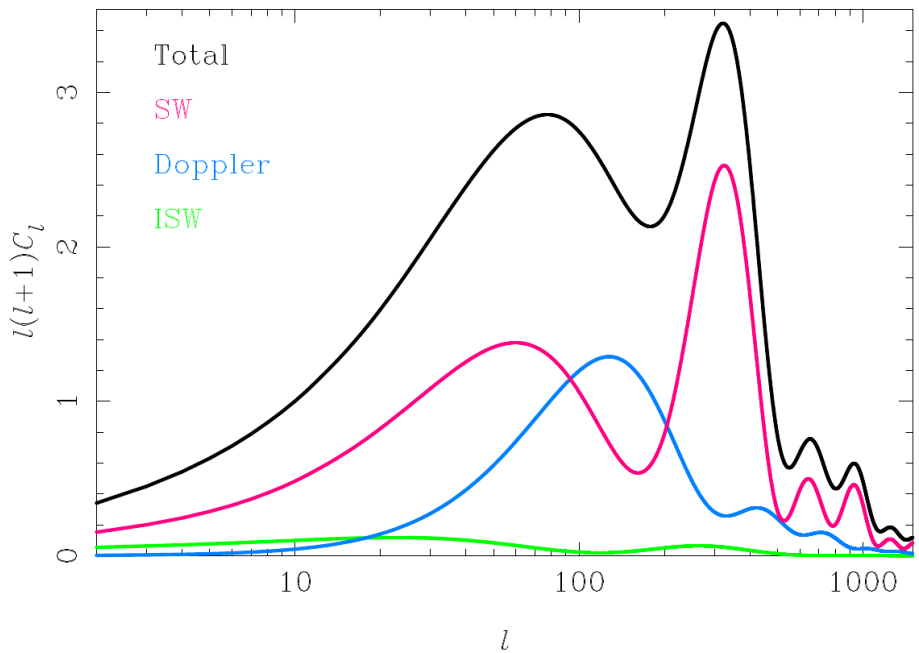
$$+ \mathbf{nv}(\eta_r) \quad (12.80)$$



Адиабатические моды:

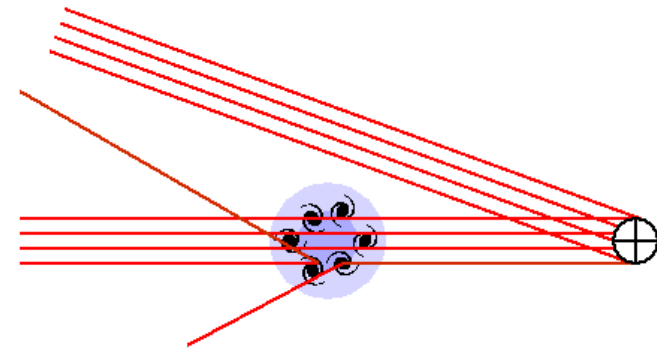


Моды постоянной кривизны:



Затухание, демпфирование и другие более тонкие эффекты:

- Конечная толщина последней поверхности рассеяния  $\Rightarrow$  размывание анизотропии на малых масштабах.
- Поглощение в эпоху реионизации  $\Rightarrow$  понижение контраста при всех масштабах.
- Эффект Силка (затухание Силка) – немонолитность среды  $B\gamma$  вблизи поверхности рассеяния, транспортировка фотонов без изменения энергии  $\Rightarrow$  затухание осцилляций на малых масштабах.
- Линзирование – смазывает картинку на малых масштабах.
- Эффект Сюняева-Зельдовича (подогрев излучения быстрыми электронами).



## 2. Тензорные возмущения метрики

Легко считается:

$$\gamma_{ij}^0 = -h'_{ij}/2 \Rightarrow \quad (12.81)$$

Из общего уравнения для  $P^0$  (12.52):

$$\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^0 \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = \frac{dP^0}{d\eta} - \frac{h'_{ij}}{2} n^i n^j P^0 = 0 \Rightarrow \quad (12.82)$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = \frac{1}{2} \int_{\eta'}^{\eta''} n^i h'_{ij} n^j d\eta \quad (12.83)$$

С тензорными модами не связаны вариации скорости среды, т.е. надо считать  $U^0 = 1, U^i = 0 \Rightarrow$

Измеряемая частота

$$\Omega(\eta'') = P^0(\eta'') \Rightarrow \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta P^0}{P^0} \Rightarrow \quad (12.84)$$

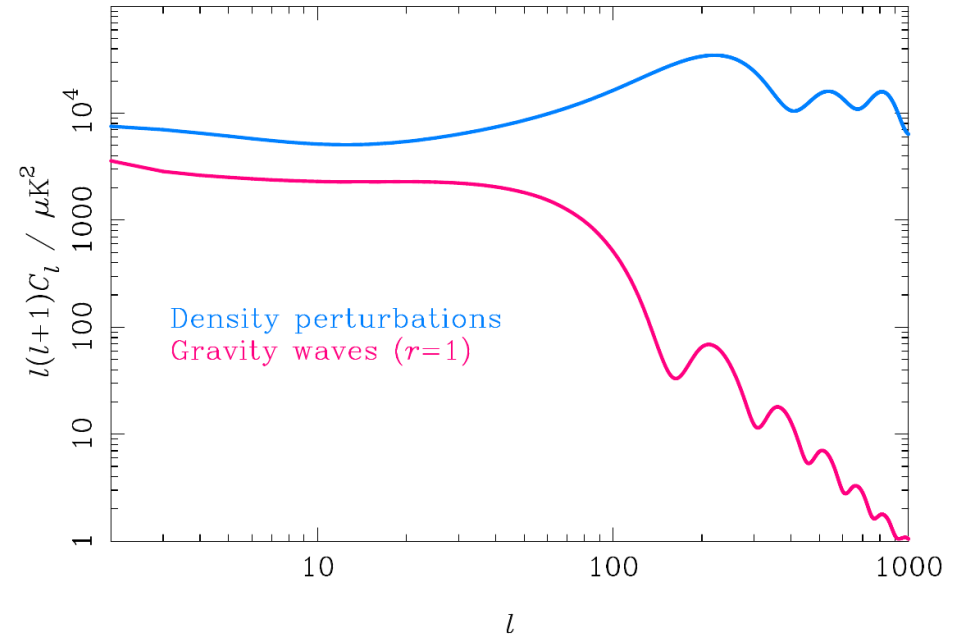
$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{2} \int_{\eta_r}^{\eta_0} n^i h_{ij}^{TT'} n^j d\eta \quad (12.85)$$

– тензорный вариант интегрального эффекта Сакса-Вольфа.

Тензорные моды после входа под горизонт падают как  $1/a \Rightarrow$

Ожидается вклад только мод, поздно вошедших под горизонт  $\Rightarrow$

Большие масштабы неоднородностей



Тензорные моды проще обнаружить по вкладу в поляризацию СМВ (см. далее)