Ф. Дж. Дайсон, Упущенные возможности,

УМН, 1980, том 35, выпуск 1, 171–191

https://www.mathnet.ru/rm3163

1980 г. январь—февраль *т. 35, вып. 1(211)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УПУЩЕННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ[1])

Ф. Дж. Дайсон

> Тому, кто хочет обнаружить скрытое, важно не замыкаться в одной области науки, а сохранять связь с другими ее областями.
>
> *Жак Адамар*

1. Введение. Цель гиббсовских лекций, как гласит их статус, — «предоставить широкой публике и научной общественности возможность ознакомиться с вкладом математики в современное мышление и цивилизацию» Это ставит меня в трудное положение. Я — физик, начинавший свою научную деятельность как математик. Как действующий физик, я со всей остротой ощущаю, что брак математики с физикой, такой плодотворный в прошлые века, недавно пришел к разрыву[2]). Обсуждая этот развод, физик Рес Иост однажды заметил: «как водится в таких случаях, одна из сторон явно проиграла...». За последние двадцать лет мы наблюдали стремительное продвижение математики в золотой век расцвета, в то же время теоретическая физика, предоставленная самой себе, выглядит несколько потускневшей и раздражительной.

Учитывая это, я вынужден построить лекцию несколько иначе, чем это предполагалось учредителями фонда. Вместо того, чтобы говорить о «вкладе математики в современное мышление», я расскажу о ее невыплаченной дани и неисполненном долге; подробно рассмотрю несколько примеров «упущенных возможностей», случаев, когда математики и физики упустили открытия из-за пренебрежения к взаимным обсуждениям.

Я хочу привлечь внимание к этим эпизодам не для того, чтобы порицать математиков или оправдывать физиков, не сумевших за последние 20 лет совершить ничего, сравнимого с великими достижениями прошлого. Моя цель — не оплакивать былое, а увидеть контуры будущего.

Было бы нелепо надеяться, что я смогу очертить эти контуры в часовой лекции. Хотя Гильберт в 1900 г. [1] и Минковский в 1908 г. [2] с успехом справились с этой задачей, у меня нет никакой уверенности в своих возможностях. У Гильберта и Минковского я научился по крайней мере одному —

---

[1]) Freeman J. Dyson. Missed Opportunities.— Bull. Amer. Math. Soc., 1972, 78, p. 635. Перевод с английского М. И. Монастырского.

[2]) Не стоит понимать это высказывание слишком буквально. Даже в период максимального ослабления связей между современной математикой и современной физикой ряд крупных ученых одновременно и при этом весьма успешно действовал в обеих областях, например, автор статьи Дайсон, Н. Н. Боголюбов. (*Прим. перев.*)

людей нельзя убедить общими рассуждениями. Гильберт и Минковский наметили конкретные задачи, над которыми математики и физики могли с пользой размышлять. Я попытаюсь, действуя в их стиле и рассматривая соответствующие случаи, убедить вас, что прогресс как математики, так и физики в прошлом был значительно замедлен из-за нежелания прислушиваться к мнению друг друга. Я закончу попыткой указать на некоторые области, в коих и ныне упускаются возможности будущих открытий.

2. Экскурс в теорию чисел. Начну с банальной истории, случившейся со мной. Это живая иллюстрация того, какие возможности упускаются по причине узкой специализации. История связана с недавней замечательной работой Макдональда [3] о свойствах аффинных систем классических алгебр Ли.

Свою научную деятельность я начинал с теории чисел. В мои студенческие годы в Кембридже я учился у Г. Харди, уже тогда бывшего легендарной личностью. Даже первокурсникам в те годы было ясно, что теория чисел в духе Харди и Рамануджана устарела и блестящее будущее ее не ждет. Сам Харди в лекции о τ-функции Рамануджана, опубликованной в [4], назвал этот сюжет «одной из тихих заводей математики». Значения τ-функции — это коэффициенты модулярной формы:

$$\sum \tau(n)\, x^n = \eta^{24}(x) = x \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{24}, \tag{1}$$

где $\eta(x)$ — эта-функция Дедекинда. Рамануджан [5] открыл ряд замечательных арифметических свойств $\tau(n)$. Доказательство и обобщение этих свойств Морделлом [6], Гекке [7] и другими [8], [85], сыграли важную роль в развитии модулярных форм [9], [86]. Но сами τ-функции по-прежнему оставались тихой заводью, далекой от основного русла математики, где дилетанты могли плескаться в свое удовольствие, не тревожимые конкуренцией с профессионалами. Уже став физиком, много лет спустя, я сохранил сентиментальную привязанность к τ-функции и отдыхал от такого серьезного дела, как физика, время от времени возвращаясь к работам Рамануджана и размышляя над многими увлекательными проблемами, которые он оставил нерешенными. Четыре года тому назад, во время такого отдыха от физики, я нашел новую формулу для τ-функции, столь красивую, что просто поразительно, как сам Рамануджан не додумался до нее. Выглядит она так:

$$\tau(n) = \sum \frac{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e)}{1!\,2!\,3!\,4!}. \tag{2}$$

Суммирование ведется по множествам всех целых чисел a, b, c, d, e с

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e \equiv 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \pmod 5),$$
$$a+b+c+d+e=0, \qquad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=10n.$$

Пользуясь (1), можно записать эту формулу в виде выражения для 24-й степени η-функции Дедекинда.

Я пришел к ней под влиянием письма Винквиста[1]) [10], получившего похожее выражение для 10-й степени η, Винквист тоже, между прочим, физик, который плещется на досуге в водах старомодной теории чисел.

Продолжая своим доморощенным способом исследования этих тождеств, я обнаружил существование столь же красивой формулы, как (2), для d-х степеней η в тех случаях, когда d принадлежит следующей последовательности целых чисел:

$$d = 3,\ 8,\ 10,\ 14,\ 15,\ 21,\ 24,\ 26,\ 28,\ 35,\ 36\ldots \tag{3}$$

---

[1]) Винквист прислал доказательство в январе 1968 г.

На самом деле случай $d = 3$ был открыт Якоби [11], $d = 8$ Клейном и Фрикке [12], а $d = 14$, 26 Аткином [13][1]). На этом я остановился. Довольно недолго я разглядывал странную последовательность (3). Будучи в то время теоретиком-числовиком, я ничего в ней не увидел. Перегородки в сознании помешали мне заметить, что я неоднократно встречал эти числа в качестве физика. Попадись они мне на глаза в контексте какой-нибудь физической задачи, я бы, наверное, узнал в них размерности конечномерных простых алгебр Ли, если не считать число 26. Почему сюда попало 26 не знаю до сих пор. Остальные числа соответствуют простым алгебрам A_1, A_2, B_2, G_2, A_3, B_3, A_4, D_4, A_5, B_4 и так далее. Например, $d = 24$ соответствует A_4 и в структуре формулы (2) можно усмотреть систему корней A_4. Так я упустил возможность заметить глубокую связь между модулярными формами и алгебрами Ли только потому, что Дайсон теоретик-числовик не поговорил с Дайсоном физиком. У этой истории счастливый конец. Неизвестный мне в то время английский математик Ян Макдональд получил эти же формулы, как частный случай более общей теории [3], [84]. Алгебры Ли входили в его теорию с самого начала, а связь с модулярными формами появилась нежданно-негаданно. Так или иначе, Макдональд выявил эту связь и использовал возможность, которую я упустил. Выяснилось также, что Макдональд находился в Институте высших исследований в Принстоне, когда мы оба работали над этой проблемой. Поскольку наши дочери учились в одном классе, мы виделись время от времени в течение всего его годичного пребывания в Принстоне. Но так как он был математиком, а я физиком, мы не говорили о своей работе. То, что мы думали над одним и тем же вопросом, находясь столь близко друг от друга, выяснилось лишь по его возвращении в Оксфорд. Вот упущенная возможность, но не столь драматичная, поскольку Макдональд прекрасно во всем разобрался и без моей помощи. Единственный неясный случай $d = 26$, остается совершенно загадочным [2]).

Уравнения Максвелла. Я слишком увлекся историей с модулярными формами, которую и привел-то лишь потому, что сам упустил эту возможность. Теперь вернусь к основной теме: обсуждению упущенных возможностей, важных с точки зрения истории развития математики.

Первым явным признаком разрыва математики и физики было поразительное отсутствие интереса среди математиков к открытию Джеймсом Клерком Максвеллом законов электромагнетизма. Максвелл открыл свои уравнения, описывающие в самых общих предположениях свойства электрических и магнитных полей, в 1861 г. и опубликовал ясное и полное изложение в 1865 г. [13]. Это великое событие в физике 19-го столетия означало для теории электричества и магнетизма то же, что и сделанное Ньютоном двумя столетиями ранее для теории гравитации.

---

[1]) А. О. Л. Аткин получил эти формулы незадолго до 1968 г., когда он прислал мне их вывод. Его работа осталась неопубликованной.

[2]) Следующий частный случай формулы Аткина для $d = 26$ делает ясной аналогию с формулой (2) для $\tau(n)$. Напишем

$$\eta^{26}(x) = \sum \tau_{26}(n)\, x^{n/2} n = 1 \pmod{12}.$$

Для простого n имеем однозначное представление

$$n = a^2 + b^2 = c^2 + 3d^2, \qquad a = 0 \pmod 3)$$

и

$$\tau_{26}(n) = (-1)^a (2^3 \cdot 3^4 \cdot 11^2 \cdot 13)^{-1} (a - c)(a + c)(b - c)(b + c)(2a + c + 3d) \times$$
$$\times (2a + c - 3d)(2a - c + 3d)(2a - c - 3d)(2b + c + 3d)(2b + c - 3d) \times$$
$$\times (2b - c + 3d)(2b - c - 3d).$$

Но эти множители не соответствуют ни в каком очевидном смысле системе корней алгебры Ли.

Уравнения Максвелла содержали среди прочего объяснения электромагнитной природы света основные принципы передачи электроэнергии и основы радиотехники. Эти приложения теории представляли исключительный интерес для физиков и инженеров. Но помимо физических приложений, уравнения Максвелла обладали принципиально новыми и важными математическими свойствами. Максвелл сформулировал свою теорию, используя математическое понятие нового типа: тензорное поле на четырехмерном пространстве-времени, удовлетворяющее системе уравнений в частных производных с необычной симметрией.

После опубликования в 1687 году законов теории тяготения Ньютона математики поняли суть этих законов и создали на их основе мощную математическую теорию аналитической механики. Благодаря трудам Эйлера, Лагранжа и Гамильтона уравнения Ньютона были изучены и поняты во всей их глубине. Вследствие глубокого исследования ньютоновской физики в конечном счете появились новые разделы чистой математики. Из экстремальных свойств интегралов движения Лагранж извлек общие принципы вариационного исчисления. Пятьюдесятью годами позже работа Эйлера о движении по геодезическим привела Гаусса к созданию дифференциальной геометрии. Спустя еще пятьдесят лет обобщение динамики Гамильтона — Якоби способствовало открытию Софусом Ли групп Ли. И, наконец, последним даром ньютоновской физики чистой математике явились работы Пуанкаре по качественному исследованию орбит, в свою очередь приведшие к появлению на свет современной топологии.

Но математики 19-го столетия обнаружили плачевную неспособность понять, что столь же великие возможности открыл перед ними Максвелл в 1865 г. Если бы они приняли так же близко к сердцу уравнения Максвелла, как Эйлер уравнения Ньютона, то открыли, среди прочего, специальную теорию относительности Эйнштейна, теорию топологических групп и их линейных представлений и, вероятно, большую часть теории гиперболических уравнений и функционального анализа. Значительная часть физики и математики 20-го века могла появиться в 19-м, если бы просто были до конца исследованы математические концепции, к которым естественно приводят уравнения Максвелла.

Имеется множество документов, ясно показывающих, как приняли теорию Максвелла математики того времени. Я приведу две короткие выдержки, чтобы проиллюстрировать различные средства, использованные для привлечения внимания математиков к этой теории. Обе взяты из выступлений президентов Британской Ассоциации, бывшей в то время, как и сейчас, руководящей организацией содействия единству науки в Великобритании. Первая принадлежит самому Максвеллу: выступление 1870 г., посвященное связи математики и физики.

«Согласно теории электричества, успешно развиваемой в Германии, две заряженные частицы непосредственно взаимодействуют на расстоянии; сила взаимодействия, согласно Веберу, зависит от их относительной скорости, а согласно теории, намеченной Гауссом и развитой Риманом, Лоренцом и Нейманом, эта сила возникает не мгновенно, а с запаздыванием, зависящим от расстояния. Нужно изучить эту теорию, чтобы оценить по достоинству ее мощь, позволившую столь выдающимся умам объяснить всевозможные электрические явления. Другая теория электричества, которая мне кажется предпочтительнее, отрицает действие на расстоянии и приписывает электрическое дйствие натяжению и сжатию всепроникающей среды, напряжения которой принадлежат хорошо известному инженерному типу, а сама среда тождественна той, в которой, как полагают, распространяется свет.»

Читая доклад Максвелла, нельзя не поражаться исключительной скромности, с какой он представляет сделанное 9-ю годами ранее эпохальное открытие, всего лишь «как другую теорию электричества, которая кажется предпочтительней». Как отличается его стиль от стиля Ньютона, написавшего в начале третьей книги своих «Математических начал натуральной философии» [15]. «...Мне остается лишь из тех же самых принципов вывести Основы Мироздания.» Поскольку сам Максвелл говорил без особого убеждения, неудивительно, что он не побудил математиков забросить свои модные формы и коварианты ради изучения его уравнений.

Вторая цитата взята из выступления оксфордского математика Генри Смита, состоявшегося три года спустя перед той же аудиторией [16]. За несколько месяцев до его выступления, в 1873 г., вышел великий трактат Максвелла об электричестве и магнетизме [17]. «В текущем году профессор Максвелл опубликовал трактат по теории электричества, предлагающий полное математическое обоснование этой науки. Любой математик, пролиставший трактат, не может не прийти к убеждению, что в нем содержатся первые наброски, и даже более, чем первые наброски теории, уже добавившей многое к методам и возможностям чистой математики и, по-видимому, способной оказать этой абстрактной науке со временем услугу не меньшую, чем в свое время оказала астрономия. Электричество теперь, подобно астрономии в прошлом, поставило перед математиками совершенно новую совокупность вопросов, требующую появления совсем новых методов их решения... Представляется большой удачей для математиков, что такое обширное поле деятельности в области приложений математики к физике открывается в настоящее время, когда интерес к классической математической астрономии снижается...».

Эти слова показывают, что по крайней мере один математик понял историческое значение вызова, брошенного математикам работой Максвелла. Оценка Смита тем более ценна, так как он был чистым математиком, а его наиболее известные работы относились к аналитической теории чисел. К сожалению, ему было уже 46 лет, слишком много, чтобы стать пионером в новой области. Несомненно, он ограничился тем, что «пролистал страницы этого трактата» и вернулся к своим уютным тернарным формам. Молодые люди, способные увлечься словами о создании новых разделов математики, не услышали его. Герман Минковский и Жак Адамар, призванные осуществить в 20-м веке часть пророчеств Смита, были в это время мальчиками 9 и 8 лет, Эли Картану было 3 года, Герман Вейль, Жан Лере и Хариш-Чандра еще не появились на свет. Спустя 35 лет, Герману Минковскому было что сказать о возможности, упущенной математиками, выступая перед немецкой научной ассоциацией, соответсвующей Британской, через 3 года после создания Эйнштейном специальной теории относительности. Он отметил, что математически открытие Эйнштейна основано на несовместимости двух групп преобразований пространства-времени.

С одной стороны, уравнения ньютоновской механики инвариантны относительно группы G_∞, которую физики теперь называют группой Галилея. Группа G_∞ — шестимерна. Она порождается тремя вращениями в пространстве координат и тремя движениями с постоянной скоростью вида

$$x \to x - ut, \quad t \to t. \tag{4}$$

С другой стороны, уравнения Максвелла в вакууме инвариантны относительно группы G_c, которую физики называют группой Лоренца. Группа G_c тоже шестимерна. Она порождается, как и G_∞, тремя вращениями вместе с тремя преобразованиями Лоренца вида

$$\begin{cases} x \to \beta(x - ut), & t \to \beta(t - (ux)c^2), \\ \beta = (1 - (u/c)^2)^{-1/2}, \end{cases} \tag{5}$$

где c — скорость света.

С чисто математической точки зрения G_c устроена проще, чем G_∞. В частности, G_c — вещественная некомпактная форма полупростой алгебры Ли $A_1 \times A_1$, тогда как G_∞ не полупроста.

Я приведу выдержку из лекции Минковского 1908 г. [2] «Группа G_c в пределе $c = \infty$ превращается в G_∞ — полную группу симметрий ньютоновской механики. Поскольку это так и поскольку группа G_c математически предпочтительнее, чем G_∞, свободное воображение могло бы навести какого-нибудь математика на мысль, что явления природы на самом деле инвариантны не относительно группы G_∞, а относительно группы G_c, где c — конечная и вполне определенная константа, только очень большая в обычных единицах измерения. Такое предвидение было бы невероятным триумфом чистой математики. Ну, что же, хотя математика и оказалась мудра лишь задним числом, она может утешаться и этой мудростью, а ее счастливое прошлое и острота зрения, отточенного дальними горизонтами, позволяют ей немедленно уяснить далекие последствия таких изменений в нашем понимании природы.»

Почему же математики конца 19-го века оказались слепы к тем возможностям, которые Смит так ясно предвидел? Этому много причин. Если бы Максвелл писал также ясно и уверенно, как Ньютон, математики, возможно, отнеслись бы к нему более серьезно. Другое основание безразличия математиков связано с тем, что уравнения Максвелла, в общем, не были признаны физиками даже через 20 лет после их опубликования. Пока Герц в 1885 г. не показал существования радиоволн, большинство физиков рассматривало теорию Максвелла как умозрительную гипотезу[1]). Математики, потерявшие контакт с физикой, не могли составить собственного мнения о значимости теории. Последняя и, может быть, самая важная причина невнимания к работе Максвелла связана с путями развития математики конца 19-го столетия. Математики занимались теорией функций комплексных переменных, аналитической теорией чисел, алгебраическими формами и теорией инвариантов. Расцвет этих разделов определил вкусы и эстетические стандарты, к которым нелегко было приспособить новую физику Максвелла.

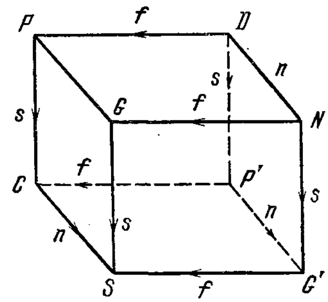
4. Кинематические группы. Постскриптумом к истории с уравнениями Максвелла может стать еще одна упущенная чистыми математиками возможность, правда, не столь значительная, как потеря 1873 г. Никто не заметил, что Минковский в лекции 1908 г. не довел свои аргументы до логического завершения. Он не обратил внимания на инвариантность уравнений Максвелла относительно тривиальной абелевой группы T_4, — сдвигов координат пространства-времени. Естественная группа инвариантности теории Максвелла — не шестимерная группа Лоренца, а десятимерная группа Пуанкаре P — полупрямое произведение G_c и T_4. Соответственно, группа симметрий ньютоновской механики — не шестимерная группа G_∞, а десятимерная группа Галилея G — полупрямое произведение G_∞ и T_4, Ни P, ни G не являются полупростыми группами.

Задним числом легко видеть, что логика Минковского должна была привести кого-нибудь к мысли о существовании простой группы D, вырожденным пределом которой будет P, в точности так же, как у полупростой группы G_c вырожденным пределом является группа G_∞. Это группа де Ситтера D, вещественная некомпактная форма простой алгебры Ли B_2. Следуя аргументам Минковского, математики легко могли бы предположить в 1908 г., что истинной группой инвариантности мира должна быть группа D, а не P.

[1]) Физик Майкл Пупин в автобиографии [18] дает яркое описание трудностей, подстерегавших студента, желавшего в 1880-х годах изучить теорию Максвелла. Пупин отправился из Америки в Англию в тщетных поисках кого-либо, кто владел этой теорией. Наконец, ему удалось изучить ее у Гельмгольца в Берлине.

В действительности, D является группой симметрий расширяющейся Вселенной без материи, радиус кривизны которой R есть линейная функция времени. D вырождается в P в пределе плоского пространства $\lim R \to \infty$ так же, как G_c вырождается в G_∞ в ньютоновском пределе $c \to \infty$.

Предположим, кто-то в 1908 году был достаточно уверен в себе, чтобы принять эту идею всерьез. Тогда он смог бы правильно предсказать расширение Вселенной, открытой экспериментально Хабблом спустя 20 лет. Еще важнее, что это могло бы привести к постулированию кривизны пространства-времени и, следовательно, на много сократить путь к общей теории относительности. К счастью, Эйнштейн сформулировал принцип общей относительности, проделав тяжелый путь, который ему никто не облегчил. Де Ситтер в действительности открыл свою модель расширяющейся Вселенной через год после овладения теорией Эйнштейна.



Только спустя 60 лет была завершена логика аргументов Минковского. В прекрасной работе, опубликованной в 1968 г., Бакри и Леви-Леблон [19][1]), показали, что при некоторых естественных предположениях существует 8 кинематических групп. Кинематической они называют группу, которая может служить группой симметрии однородной и изотропной Вселенной в согласии с общими принципами квантовой механики. Среди этих 8 групп только D простая, остальные семь получаются из нее тремя предельными переходами во всевозможных комбинациях. Более точно, пусть f обозначает предел плоского пространства $R \to \infty$, h — ньютоновский предел $c \to \infty$ и s обозначает статический предел $c \to 0$. Все восемь групп тогда можно изобразить вершинами куба (рисунок).

D, $P = fD$ и $G = nfD$ — единственные кинематические группы, соответствующие ортодоксальным физическим мирам. Остальные пять групп, однако, с математической точки зрения ничем не хуже. Наиболее интересная из еретических групп—группа $N = nD$ и $C = sfD$. N описывает ньютоновскую вселенную в искривленном пространстве-времени. C описывает Вселенную с абсолютным пространством, в противоположность галилеевой группе G, где абсолютно время. Группу C открыл Леви-Леблон [20] и назвал ее группой Кэрролла. В мире Кэрролла у всех тел нулевая скорость, однако они могут иметь ненулевой импульс. Кэрролл был чистым математиком, предвидевшим эту возможность еще в 1871 г. [21].

«Медленная страна» — сказала королева,— «приходится, видишь ли, бежать со всех ног, чтобы оставаться на месте.» Но его математические коллеги опять совершили оплошность, не прислушавшись к нему всерьез.

5. Кватернионы и векторы. В гиббсовской лекции уместно упомянуть упущенную возможность, на которую сам Гиббс указал математикам своего времени. На свет она появилась за 40 лет до того, как Гиббс [22] в 1886 г. привлек к ней внимание. Прошло еще 40 лет, прежде чем математики полностью оценили ее.

В 1844 г. произошли два примечательных события. Гамильтон [23] опубликовал свое открытие кватернионов, а Грассман [24] издал книгу «Ausdehnungslehre». С запоздалой проницательностью мы видим, что работа Грассмана была более значительным вкладом в математику и содержала элементы многих концепций современной алгебры, включая, как частный

[1]) Для краткости я несколько огрубил их утверждение: каждая из групп D, P' и N может встречаться в двух различных формах, поэтому число возможностей, строго говоря, 11, а не 8.

случай, векторный анализ. Однако Грассман был простым школьным учителем в Штеттине, в то время как Гамильтон — всемирно известным математиком; одно лишь перечисление его званий и титулов в начале статьи 1844 г. занимало шесть строк. Можно лишь сожалеть, но не приходится удивляться, что кватернионы были провозглашены величайшим открытием, а Грассману пришлось ожидать 23 года, прежде чем его работа получила хоть какое-то признание среди профессиональных математиков. К тому времени, когда работа Грассмана, наконец, получила известность, математики были разделены на кватернионистов и антикватернионистов, и тратили больше сил на полемику за и против кватернионов, чем на попытки понять, как объединить идеи Грассмана и Гамильтона в более общей схеме. Таким образом, физику Гиббсу досталось в удел первому в лекции 1886 г. сопоставить идеи Гамильтона и Грассмана.

Последними словами его лекции были: «Мы начинаем с изучения многообразия алгебр, мы кончим, я думаю, *многообразной алгеброй*».

Не знаю, сколько чистых математиков слышали или читали лекцию Гиббса. Внимательное изучение лекции помогло бы им заметить, что Гиббсу на самом деле не удалось объединить понятия кватерниона и вектора. Напротив, обсудив параллельно эти два понятия, он показал их явную несопоставимость. Его лекция должна была заставить каждого вдумчивого математика спросить себя: «Чем объяснить, что свойства трехмерного пространства представляются одинаково хорошо двумя совершенно разными и несовместимыми алгебраическими структурами?». Будь такой вопрос однажды ясно поставлен, наверное, скоро бы нашелся ответ; и он неизбежно привел бы к полной теории однозначных и двузначных представлений группы трехмерных вращений. Векторы образуют простейшее нетривиальное однозначное представление, а кватернионы — простейшее двузначное представление. Кватернионы — прототипы спинорных представлений в современной терминологии. Развитие теории спинорных представлений, фактически начатое Эли Картаном в 1913 г., завершилось в основном в 30-е годы [25] при существенной помощи физиков Паули и Дирака; оно могло бы начаться приблизительно на 40 лет раньше. Невозможно предсказать действие этого ускоренного развития на другие разделы математики, но нетрудно предположить его важность.

6. Общая ковариантность. До сих пор я приводил примеры упущенных математических открытий, все же сделанных, хотя и с большим запозданием. В этих случаях возможности заведомо существовали, но только в прошлом. Теперь перейду к более трудной задаче — показать еще открытые возможности наших дней. Здесь нельзя уже быть совершенно уверенным в их реальности, но если они есть, то хороши тем, что существуют сейчас. Прошлые возможности, которые я обсуждал, имели одну общую черту. Во всех примерах мы замечали, что два разнородных или несовместимых математических понятия оказывались тесно связанными в описании некоторой конкретной ситуации. В приведенных четырех случаях такими парами были соответственно: модулярные функции и алгебры Ли, уравнения поля и динамика частиц, лоренц-инвариантность и галилеева инвариантность, алгебра кватернионов и алгебра Грассмана. Возможности, возникавшие перед математиками, заключались в создании более глубокой схемы, внутри которой эти пары существовали бы в гармоническом единстве. Я использую этот методологический принцип, чтобы поискать еще и теперь открытые возможности и рассмотрю ситуации, в которых соседство двух несовместимых концепций известно, но не объяснено. Самый кричащий пример несовместимости в современной физике — эйнштейновский принцип общей ковариантности и все современные схемы квантовомеханического описания природы. Эйнштейн основывал свою общую теорию относительности [26] на принципе, что Бог не навешивал никаких ярлыков на отдельные точки пространства-времени. Этот принцип требует инвариантности законов физики относительно группы Эйнштейна E, состоящей из взаимно однозначных и дважды дифференцируемых преобразований координат. Используя в полной мере инвариантность относительно группы E, Эйнштейн смог найти точную форму своего закона гравитации, исходя из общих требований математической простоты без каких-либо дополнительных предположений. Он смог также переформулировать всю классическую физику, электромагнетизм и гидродинамику в E-инвариантном виде и, таким образом, однозначно определить взаимодействие материи, излучения и гравитации, оставаясь в рамках классической физики. В физике нет более ясных математически и более удовлетворительных с эстетической точки зрения глав, чем классическая теория Эйнштейна, основанная на E-инвариантности.

С другой стороны, все известные жизнеспособные формализмы квантовомеханического описания природы используют значительно меньшую группу инвариантности. Бакри и Леви-Леблон [19] проанализировали самые обширные квантовомеханические группы, пригодные к рассмотрению. Практически, все серьезные квантовомеханические теории основаны либо на группе Пуанкаре P, либо на группе Галилея G. Это значит, что класс предпочитаемых инерциальных систем координат постулируется априори, в явном противоречии с эйнштейновским принципом. Это противоречие внушает особенное беспокойство, поскольку эйнштейновский принцип общей инвариантности обладает притягательными чертами абсолютности. Интуиция физика подсказывает, что если этот принцип справедлив вообще, он, видимо, должен быть справедлив для всей физики, как для квантовой, так и для классической. Трудно понять глубокое проникновение Эйнштейна в тайны природы, если не верить в универсальность этого принципа, положенного им в основу.

Чтобы показать яснее несовместимость принципов, я сосредоточу свое внимание на одной из конкурирующих схем описания квантовомеханической вселенной. Я выбрал схему, авторы которой приложили все усилия, чтобы опираться на строгие математические определения и, в то же время, достаточно общую для включения широкого класса физических систем. Эта схема —«Алгебра локальных наблюдаемых» Хаага и Кастлера [27]. Шесть аксиом Хаага и Кастлера таковы:

1) Существование локальных наблюдаемых. Для каждой области B (т. е. открытого множества с компактным замыканием) в 4-мерном пространстве-времени существует C^*-алгебра $\mathcal{A}(B)$.

2) Изотония. Если $B_1 \supset B_2$, тогда $\mathcal{A}(B_1) \supset \mathcal{A}(B_2)$ и $y\mathcal{A}(B_1)$ и $\mathcal{A}(B_2)$ есть общая единица.

3) Существование квазилокальных наблюдаемых. Объединение всех $\mathcal{A}(B)$ есть нормированная $*$-алгебра, пополнение которой представляет собой C^*-алгебру $\mathcal{A}$ — алгебру квазилокальных наблюдаемых. Предполагается, что все физически измеримые величины являются элементами $\mathcal{A}$.

4) Пуанкаре-инвариантность. Каждому элементу L группы Пуанкаре соответствует автоморфизм α: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, где $\alpha(\mathcal{A}(B)) = \mathcal{A}(LB)$ для каждой области B.

5) Локальная коммутативность. Если две области B_1 и B_2 полностью взаимно пространственно подобны (т. е. B_2 лежит вне любого светового конуса с вершиной в B_1), то $\mathcal{A}(B_1)$ и $\mathcal{A}(B_2)$ коммутируют.

6) Примитивность. $\mathcal{A}$ допускает точное, алгебраически неприводимое представление.

Эти аксиомы вместе с аксиомами, определяющими C^*-алгебру [28], на абстрактном математическом языке выражают все общие установки, которые можно извлечь из физики микромира последних 50 лет. Они описывают очень изящную математическую структуру со свойствами, во многих отношениях соответствующими фактам, полученным экспериментальной физикой. В определенном смысле эти аксиомы представляют наиболее серьезную попытку точно определить понятия, которые физики выражают словами «наблюдаемость, причинность, локальность, релятивистская инвариантность», постоянно употребляемыми и злоупотребляемыми в повседневной речи.

Если взглянуть более внимательно на эти аксиомы, видно, что 1), 2), 3) и 6) согласуются с эйнштейновским принципом общей ковариантности, а 4) и 5) — нет. Аксиомы 4) и 5),— аксиомы Пуанкаре-инвариантности и локальной коммутативности, требуют включения группы Пуанкаре в структуру пространства-времени. При попытке заменить группу Пуанкаре группой Эйнштейна E, мы не сможем определить пространственно-подобную связь между двумя областями, и аксиома 5) потеряет смысл. Поэтому я предлагаю математикам важную нерешенную задачу — *построить математическую структуру, сохраняющую главные черты аксиом Хаага — Кастлера с включением E-инвариантности вместо P-инвариантности.*

Я хотел бы предупредить каждого математика, который действительно решит принять мой вызов, что его задача не будет легкой. Никакие формальные переформулировки аксиом Хаага — Кастлера не могут быть достаточными. Ведь мы знаем, что Эйнштейн смог построить свою инвариантную классическую теорию в 1916 г., только используя в полной мере риманову дифференцальную геометрию. Ему был необходим метрический тензор, чтобы придать своему пространству-времени структуру, не зависящую от системы координат. Поэтому E-инвариантная аксиома локальной коммутативности, заменяющая аксиому 5), должна по крайней мере содержать определение квантовомеханического аналога римановой геометрии. Некоторый аналог метрического тензора надо ввести для придания смысла разделению на пространственно-подобные области. Ответ на мой вызов должен содержать тонкое объединение понятий дифференциальной геометрии, функционального анализа и абстрактной алгебры. С этим предостережением я оставляю Вам эту проблему.

7. Фейнмановские интегралы [1]. Мой второй пример еще открытых возможностей также касается самых фундаментальных аспектов квантовой физики. 20 лет назад, еще до того как стали модными C^*-алгебры, Ричард Фейнман [29], [87], дал описание релятивистской квантовой теории в терминах наивной физической картины, которую назвал «суммирование по путям» [2]. Его описание было лишь качественным подходом к пониманию физических явлений, совершенно не корректным математически. Математическая строгость — последнее, о чем Фейнман когда-либо заботился.

Фейнмановское описание содержит следующие элементы. *Пусть H задается величиной* $\varphi_H(x)$ — классической векторо-значной функцией φ в каждой точке x — пространства-времени. *Пространственно-подобная поверхность* σ — это поверхность, разделяющая пространство-время на две части, прошлое и будущее, так, что каждые две точки на поверхности σ разделяются пространственно-подобным интервалом.

Состояние ψ_σ на σ — есть комплекснозначный функционал на функциях $\varphi(x)$ при x, принадлежащем σ. Состояния на σ образуют комплексное линейное пространство D_σ. Динамика мира задается *лагранжианом* $L(\varphi)$, являющимся действительнозначной функцией от φ и ее производных в точке x.

---

[1] В оригинале термин «sums». Мы употребляем более распространенный в русской литературе термин (прим. перев.).

[2] В оригинале — «sum over histories» (прим. перев.).

Классической локальной наблюдаемой A_B служит комплекснозначный функционал относительно функции $\varphi(x)$, где x принадлежит ограниченной области B. *Квантовая локальная наблюдаемая* $O(A_B)$ определяется как комплексная билинейная форма от D_σ и D_τ, где σ и τ — пространственно-подобные поверхности, причем B находится целиком в области будущего относительно σ и в прошлом относительно τ. Классическая наблюдаемая A_B определяет квантовую $O(A_B)$ по следующему правилу:

$$(6)\quad (\chi_\tau,\ O(A_B)\,\psi_\sigma) = \sum_H (\chi_\tau(\varphi_H))^* A_B(\varphi_H)\,\psi_\sigma(\varphi_H)\exp\left[i\int_\sigma^\tau L(\varphi_H(x))\,d_4x\right],$$

$\sum_H$ обозначает знаменитое «суммирование по путям», предположительно, распространенное на все возможные классические функции $\varphi_H(x)$, определенные на 4-мерной полоске пространства-времени между σ и τ. Буквальное определение (6) — математически бессмысленно. Важная проблема — найти математический аппарат для придания точного смысла определению (6).

В этой проблеме соприкосновение пары несовместимых математических элементов проявляется следующим образом. С одной стороны, формула (6), если с ней обращаться формально, не пытаясь дать строгое обоснование, дает всегда правильные ответы. Получаются, например, правильные лагранжевы уравнения поля, которым удовлетворяет квантовая наблюдаемая $O(\varphi(x))$, правильные коммутационные соотношения между наблюдаемыми $O(A_B)$ и генераторами группы Пуанкаре, правильные коммутационные соотношения Пайерлса [30] между двумя локальными наблюдаемыми и правильное определение матрицы рассеяния в пределе, когда σ задана в области «абсолютного прошлого», а τ—«абсолютного будущего» при $t = -\infty$ и $+\infty$ соответственно. С другой стороны, существующие теории нормированных векторных пространств накладывают сильные ограничения, которым, кажется, функциональные пространства Фейнмана, безнадежно не удовлетворяют.

Мы сталкиваемся с положением, неоднократно возникавшим в истории формирования новых математических теорий. Имеется метод, приводящий к правильным выводам, и строгая теория, запрещающая использование этого метода

В соответствии с (6), единичный оператор I связан со специальной билинейной формой:

$$(7)\qquad (\chi_\tau,\ \psi_\sigma) = \sum_H (\chi_\tau(\varphi_H))^*\,\psi_\sigma(\varphi_H)\exp\left[i\int_\sigma^\tau L(\varphi_H(x))\,d_4x\right],$$

отображающей D_τ на двойственное к D_σ пространство D'_σ. Обозначим это отображение через $I_{\tau\sigma}$ и предположим (разумеется, без доказательства), что существует обратное отображение $J_{\tau\sigma}$ пространства D'_σ на D_τ. Квантовая наблюдаемая $O(A_B)$ — также билинейная форма, отображающая D_τ на D'_σ. Поэтому произведение

$$Q(A_B) = J_{\tau\sigma}O(A_B)$$

есть линейное отображение D_τ на себя, т. е. линейный оператор на пространстве состояний. Итак, мы построили линейный оператор $Q(A_B)$, представляющий каждую квантовую локальную наблюдаемую. Сумей мы строго обосновать эту конструкцию, нам удалось бы определить норму ограниченных операторов $Q(A_B)$ и, следовательно, образовать C^*-алгебру $\mathcal{A}(B)$ из ограниченных локальных наблюдаемых, связанных с областью B. Если начать с лагранжиана $L(\varphi)$, инвариантного относительно группы Пуанкаре, можно было бы ожидать, что наша C^*-алгебра локальных наблюдаемых будет удовлетворять аксиомам Хаага — Кастлера. Мы получили бы тогда полностью конструктивное определение релятивистской квантовой теории поля.

Программа построения P-инвариантной квантовой теории поля с помощью фейнмановских интегралов может быть действительно проведена, когда L — квадратичная функция от φ и ее производных. Тогда «суммированию по путям» в (6) можно придать строгий смысл, как комплексному аналогу интеграла Винера [31][1]). Теория дает вполне удовлетворительное описание ансамбля квантовомеханических частиц, обладающих свойствами дуализма волны-частицы, как это наблюдается в природе. К сожалению, теряется одно важное свойство реальных частиц. В теории с квадратичным лагранжианом частицы не взаимодействуют. Квадратичный случай представляет математический интерес, но физически тривиален.

Большую работу проделали физики, используя модели лагранжианов вида $L = L_0 + L_1$, где L_0 — квадратичный лагранжиан, а L_1 — малая неквадратичная добавка. В этих моделях все можно вычислить по теории возмущений разложением по степеням L_1. В каждом конечном порядке по L_1 фейнмановским интегралам можно придать смысл. Эти модели описывают взаимодействующие частицы и приводят к результатам, хорошо воспроизводящим многие свойства реального мира. Трудно поверить в математическую бессмысленность этих моделей, столь удачных в рамках теории возмущений. Однако все попытки придать им строгое математическое обоснование ни к чему не привели. Благоприятные возможности, открытые для математиков в течение 20 лет, остаются открытыми и по сей день. *Они состоят в построении схемы, которая легализовала бы использование фейнмановских интегралов, аналогичных* (6), *с подходящими неквадратичными лагранжианами.* Тот, кто это сделает, создаст первую строгую теорию квантованных релятивистских частиц с локальным взаимодействием в 4-мерном пространстве-времени.

До сих пор я обсуждал фейнмановские интегралы лишь в связи с теориями, инвариантными относительно группы Пуанкаре. Но, в отличие от аксиом Хаага —Кастлера, фейнмановские интегралы определяются независимо от группы Пуанкаре. В частности, выбрав в качестве лагранжиана скалярную плотность, формально инвариантную относительно произвольных координатных преобразований, мы должны получить с помощью фейнмановских интегралов E-инвариантную квантовую теорию поля. Приходится признать, что E-инвариантные лагранжианы, вроде лагранжиана эйнштейновской теории тяготения, непривычны и патологичны во многих отношениях. Может оказаться, что даже если будет найден способ строгого определения фейнмановских интегралов в нетривиальных P-инвариантных теориях, E-инвариантные интегралы не поддадутся интерпретации. Поэтому я выделяю в качестве отдельной задачи для математиков, попытаться получить *строгое определение фейнмановских интегралов, инвариантных относительно общих координатных преобразований.* Удачное решение этой проблемы убило бы сразу двух зайцев: было бы показано существование нетривиальной реализации аксиом квантовой теории поля и совместимость этих аксиом с принципами общей теории относительности.

8. Заключение. Существует несколько других открытых возможностей, заслуживающих более подробного обсуждения при большем запасе времени. Вот одна из них: включить минимаксную теорему фон Неймана [34] в экономике в последовательную аналитическую структуру так же, как Гильберт включил классическую задачу на собственные значения в общую теорию

---

[1]) Существенный прогресс в обосновании фейнмановских интегралов в нерелятивистском случае достигнут совсем недавно в работах Э. Нельсона [32] и С. де Витт [33].

линейных операторов. Другая возможность открывается в вопросе о резонансах в теории планетных орбит; это было предметом гиббсовских лекций 44 года тому назад [35].

Понимание условий существования и устойчивости резонансов — проблема ньютоновской механики со времен Лапласа. Несмотря на героические усилия таких математиков, как Пуанкаре и Юрген Мозер, существование резонансов остается загадочным. Численный анализ [36] недавно показал устойчивый резонанс между планетами Нептуном и Плутоном; это явилось полной неожиданностью для теоретиков.

Несомненно, есть еще много неиспользуемых возможностей создания новых разделов чистой математики, исходя из старых задач прикладных наук. Но, я думаю, сказанного достаточно, чтобы оценить зерно истины в словах Адамара [37], которыми я начал эту лекцию. Сам Адамар, кстати, поступал согласно своей проповеди.

Примечание при корректуре[1]). Несколько человек, прослушавших эту лекцию, сообщили, что τ-функция не такая уж тихая заводь, как я предполагал. τ-функции появляются в современном контексте у Берча [38] и П. Делиня [39].

Новый подход к проблеме определения фейнмановских интегралов в общей теории относительности предложен Фаддеевым [40].

ПРИМЕЧАНИЕ ПЕРЕВОДЧИКА К СТАТЬЕ Ф. ДАЙСОНА «УПУЩЕННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ»

С момента появления лекции Дайсона прошло более шести лет. Некоторые из последних достижений математиков и физиков во многом обязаны их более тесным контактам. Цель этого приложения — кратко осветить некоторые из полученных результатов. Но вначале коснемся современного состояния одной проблемы, затронутой Дайсоном.

I. Модулярные формы и алгебры Ли. Изучение свойств τ-функции Харди назвал «тихой заводью в математике». В настоящее время изучение модулярных форм и их преобразований Мелина (в частности, $\tau(n)$-функции) находится в центре внимания математиков многих специальностей благодаря открывшимся новым связям с алгебраической геометрией, теорией представлений и теорией L-функций алгебраических многообразий. Так, весьма общую формулу для коэффициентов модулярных форм, включая τ-функцию, получил Ю. И. Манин [41].

Полное представление о современном состоянии предмета можно получить из шести выпусков лекций по модулярным формам [42] и обзора [43]. Один из наиболее ярких результатов — доказательство Делинем гипотезы Рамануджана о точной оценке коэффициентов Фурье модулярной параболической формы веса 12 [39]))[2].

Гипотеза Рамануджана. Рассмотрим параболическую форму $\Delta(z)$

$$(2\pi)^{-12}\,\Delta(z)=x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}=\sum\tau_n x^n,\qquad x=\exp(2\pi i z).$$

Тогда $|\tau_p|\leqslant 2p^{11/2}$ для всех простых p.

Перейдем теперь к тождествам для степеней η-функции Дедекинда. В работе Макдональда [3] формулы для степеней $\eta(x)$-функций были получены с помощью следующей конструкции.

Рассмотрим тождество Г. Вейля для полупростой алгебры Ли:

$$\sum_{\omega\in W(R)}\varepsilon(\omega)\,e^{-s(\omega)}=\prod_{\alpha>0}(1-e^{-\alpha}).\tag{8}$$

---

[1]) В оригинальном издании. (*Прим. ред.*)

[2]) Подробное доказательство, по словам самого Делиня, могло бы занять около 2000 страниц. Учитывая краткость формулировки, оно являлось бы, вероятно, самым длинным доказательством, известным в математике.

Здесь R — приведенная система корней α в вещественном векторном пространстве V, $\dim V = \operatorname{rang} \mathfrak{P} = l$, $W(R)$ — группа Вейля системы R, $\varepsilon(\omega)$—определитель элемента ω, $\omega \in W(R)$, $\varepsilon(\omega) = \pm 1$, $s(\omega)$ — сумма положительных корней α таких, что $\omega^{-1}\alpha$ — отрицательно.

Макдональд показал, что аналогом формулы (8) для аффинной системы корней S (определение см. в [3]) будет следующее тождество:

$$(9) \qquad \sum_{\omega \in W(S)} \varepsilon(\omega)\, e^{-s(\omega)} = P(X) \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}),$$

$X = \prod_{i=0}^{l} \exp(-n_i\alpha_i)$; α_i $(i = 1, \ldots, l)$ — положительные аффинные корни, обращающиеся в нуль на стенках фиксированной камеры Вейля, n_i—целые положительные взаимно простые числа. Для аффинной системы корней на V, $P(X) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n)^l$. Из формулы (9) можно получить выражение в виде степенного ряда для $\eta^d(x)$, где $d = \dim \mathfrak{P}$.

Точную формулу см. в [3]. В простейшем случае алгебры Ли группы SU(2) (схема корней A_1). Из формулы (9) вытекает классическое тождество Якоби для θ-функции:

$$(10) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n)(1 - X^n e^{\alpha})(1 = X^{n-1} e^{-\alpha}) = \sum (-1)^m X^{m(m-1)/2} e^{-m\alpha}.$$

В работе Макдональда оставалось неясным происхождение дополнительных множителей $P(X)$. Как показано в работе [44], формула Макдональда (9) получается из тождества Вейля для бесконечномерной контраградиентной алгебры конечного роста $\mathfrak{P}(A)$. При этом множители $P(X)$ соответствуют мнимым корням этой алгебры.

Новые тождества для $\eta(x)$ функций удалось получить, обобщив тождество Макдональда (9) на суперalгебры Ли [44]. Определение супералгебр Ли будет дано в следующем параграфе. В настоящее время обнаружено много других интересных связей между теорией модулярных форм, алгебрами и супералгебрами Ли (см. литературу, приведенную в [44]).

Более тщательное изучение работы Макдональда показывает, что тождество для 26-й степени $\eta(x)$ не столь уж загадочно. Оно связано с исключительной группой $F_4(\dim F_4 = 52)$, а также с тем фактом, что пространство дуальных корней F_4^V не совпадает с пространством корней F_4. Отсюда вытекают два различных тождества, связанных с алгеброй F_4; одно для $\eta^{52}(x)$, а другое для $\eta^{26}(x)$. Аналогичная ситуация у алгебры $G_2(\dim G_2 = 14)$. Существуют тождества для $\eta^{14}(x)$ и $\eta^7(x)$; при этом тождества для $\eta^{26}(x)$ и $\eta^7(x)$ значительно сложнее.

II. Суперсимметрии. Прекрасной иллюстрацией к словам Вигнера «о непостижимой эффективности приложений математики» может служить история возникновения теории суперсимметрий.

В физике суперсимметрии возникли в связи с попыткой рассмотрения симметрий, которые бы объединяли частицы с различной статистикой: бозоны — частицы с целым спином и фермионы — частицы с полуцелым спином. Обычные симметрии пространства-времени: связанные с группой Пуанкаре и изотопические симметрии сохраняют спин и поэтому не обладают такими свойствами.

Физики нашли решение этой задачи, используя несколько различных подходов. Один из них [45] связан со спинорным расширением группы Пуанкаре. Метод, предложенный в работе [46], есть обобщение «суперкалибровочного» преобразования в дуальных моделях. См. также обзоры [47], [48].

В математике суперсимметрии существуют давно. Супералгебры — не что иное, как Z_2 градуированные алгебры, снабженные дополнительной структурой-коммутатором Якоби. Эта операция согласована с градуировкой. Они давно возникали в теории деформаций и топологии (алгебры Хопфа). В связи с математическими вопросами метода вторичного квантования супералгебры Ли подробно рассмотрены в статье [49].

Другие примеры супералгебр можно найти в [47].

Интересная задача — дать классификацию супералгебр Ли; Для физических приложений важен случай, когда четная часть включает группу Пуанкаре. Наиболее полные результаты получены при классификации полупростых алгебр Ли; четная часть — полупростая алгебра Ли.

В [50] была дана полная классификация полупростых супералгебр Ли. Она сводится к классификации простых супералгебр Ли, но помимо серий, соответствующих обычной картановской классификации, существует несколько «странных» серий и алгебр, не имеющих классических аналогов.

С точки зрения физических приложений теорию суперсимметрий характеризуют три особенности.

1. Достоинство. Модели с суперсимметрическими лагранжианами обладают свойством «сверхперенормируемости», т. е. число перенормировочных констант, необходимых для устранения расходимостей, значительно меньше, чем в обычных теориях [48].

2. Трудности. Из основных свойств теории поля следует, что частицы, соответствующие одному представлению, находящиеся в одном мультиплете, должны иметь одинаковую массу. В то же время известно, что бозоны и фермионы сильно различаются по массе; поэтому необходимо построить модель, вводящую расщепление по массе, например, с помощью механизма нарушения симметрии [48].

3. Надежды. Наибольшие надежды связывают с попыткой объединить суперсимметрии с калибровочными теориями поля. Активно обсуждается возможность построения теории супергравитации — суперсимметрического обобщения теории Эйнштейна [51].

III. Поля Янга — Миллса. В 1954 г. Янгом и Миллсом была введена теория калибровочного поля с неабелевой группой симметрии SU(2). Поля Янга — Миллса стали фундаментом для построения двух различных теорий: теории сильных взаимодействий и теории слабых и электромагнитных взаимодействий.

Напомним, что к сильно взаимодействующим относятся барионы, например, нейтроны, протоны, сигма-частицы, новые частицы J/ψ и мезоны, а к слабо взаимодействующим — лептоны — электрон, нейтрино. Поля Янга — Миллса оказались существенными для описания обеих теорий. Слабые взаимодействия включают взаимодействия лептонных полей и калибровочных полей — аналогов электромагнитного поля. Более точно, существует единая теория слабого и электромагнитного взаимодействия, включающая хорошо известную квантовую электродинамику. Особенностью этой теории является очень интересный механизм нарушения симметрии лагранжиана [52]. Мы вынуждены ограничиться лишь эскизным описанием математических достижений. Они в основном связаны с попыткой построения теории сильно взаимодействующих частиц. Для построения теории используются уравнения чисто калибровочного янг — миллсовского поля с компактной калибровочной группой G. Особо интересны частные случаи $G=\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SU}(3)$. Для определенности выпишем лагранжиан Янга — Миллса для калибровочной группы SU(2).

Лагранжиан L имеет вид:

$$L=-(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \tag{11}$$

где $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu, A_\nu]$, $A_\mu=\overset{a}{A_\mu}\tau_a$, τ_a — матрицы Паули; уравнение движения:

$$D_\mu F^{\mu\nu}=\partial_\mu F^{\mu\nu}+[A_\mu, F^{\mu\nu}]=0. \tag{12}$$

Для перехода к произвольной группе в уравнении (12) вместо базиса τ_a выбирается базис в присоединенном представлении группы G. С геометрической точки зрения поле Янга — Миллса есть аффинная связность на векторном расслоении. База — четырехмерное пространство-время M^4, G — структурная группа расслоения, поле $F_{\mu\nu}$ — тензор кривизны связности A_μ. Во многих расчетах оказывается полезным перейти от пространства Минковского M^4 к евклидову пространству R^4 (поворот Вика $t\to it$).

Одна из первостепенных задач теории — решение уравнения (12) — представляется исключительно сложной. Усилиями многих математиков и физиков были найдены некоторые классы решений уравнений (12).

Инстантоны.

В работе [53] были найдены решения уравнения (12) в R^4 со следующими свойствами.

1. Решения имеют конечное действие S.

(13) $$S(A)=1/2\int (F_{\mu\nu})^2\,d^4x.$$

2. $F_{\mu\nu}\to 0$ при $|x|\to\infty$.

3. Сохраняет величину $q=(1/16\pi^2)\int (F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu})\,d^4x$.

4. $q=1$.

Здесь $F^{*\mu\nu}=1/2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}F_{\lambda\delta}$ (на формах это обычная операция *), F^* — дуальная форма.

Можно показать, что выполняется неравенство

(14) $$S(A)\geqslant 8\pi^2\,|\,q\,|,$$

которое переходит в равенство при

(15) $$F_{\mu\nu}=F^*_{\mu\nu}\quad \text{(уравнение дуальности)}.$$

Решение, найденное в [53], удовлетворяет уравнению (15).

Поясним смысл решений (13).

Условие 1-конечности «квазиэнергии» (напомним, что мы рассматриваем евклидову теорию) естественно для существования любой псевдочастицы.

Поля $A_\mu(x)$, учитывая асимптотические свойства 2, задают отображение пространства S^3 в калибровочную группу $\mathrm{SU}(2)=S^3$, при этом поля, эквивалентные относительно калибровочного преобразования, принадлежат одному гомотопическому классу. Таким образом, возникает гомотопическая группа $\pi_3(\mathrm{SU}(2))=Z$, элементы которой можно представлять первым характеристическим классом Понтрягина $p_1=q$.

Решения уравнения (15) и уравнения антидуальности ($F_{\mu\nu}=-F^*_{\mu\nu}$) обладают нулевым «тензором энергии импульса».

(16) $$\theta_{\mu\nu}=\mathrm{tr}\,[(F_{\mu\lambda}-F^*_{\mu\lambda})(F_{\nu\lambda}+F^*_{\nu\lambda})]+\mathrm{tr}\,[(F_{\nu\lambda}-F^*_{\nu\lambda})(F_{\mu\lambda}+F^*_{\mu\lambda})].$$

Решения такого типа можно представить как переходы между различными топологическими вакуумами. Голландский физик Хоофт назвал соответствующие «псевдочастицы» инстантонами.

В последнее время были найдены решения уравнения (15) с произвольным значением топологического заряда q. Хороший обзор, содержащий все важнейшие ссылки — [54], физические приложения см. в [55] и [56].

Совсем недавно Атья и Уорд обнаружили, что нахождение решений уравнения дуальности можно свести к следующей алгебро-геометрической задаче [57].

Рассмотрим трехмерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^3$. Используя асимптотические условия и конформность теории, можно рассматривать янг — миллсовские поля как расслоения над сферой S^4. Основным результатом работы [57] является следующее соответствие.

Существует взаимно однозначное соответствие между а) самодуальными решениями уравнения Янга — Миллса с группой $\mathrm{SU}(2)$ на S^4 и б) классами двумерных алгебраических расслоений E над $\mathbb{C}P^3$, удовлетворяющих следующим условиям 1 и 2.

1. На E существует симплектическая структура.

2. Ограничение E на каждую действительную прямую в $\mathbb{C}P^3$ тривиально.

На этом пути можно получить явное описание q-инстантонных решений. Конструкция, сводящая задачу к линейной алгебре, принадлежит В. Г. Дринфельду, Ю. И. Манину, М. Атье и Н. Хитчину [57] — [60]. В этих работах рассмотрены уравнения дуальности с произвольной компактной классической группой. Развивая эту технику, в работах [61], [62] была решена задача о классификации алгебраических расслоений над $\mathbb{C}P^N$.

Недавняя работа Виттена позволяет надеяться, что на этом пути может быть решено полное уравнение Янга — Миллса [63]. Он сводит классификацию решений уравнения Янга — Миллса к классификации расслоений над прямым произведением $\mathbb{C}P^3\times\mathbb{C}P^3$, грубо говоря, строя некоторую комбинацию из решения уравнения дуальности и антидуальности. Здесь возникает ряд интереснейших вопросов. Например, построение явных решений в духе работ [57] — [60]. Построение вложения пространства Минковского в комплексное четырехмерное пространство связано с твисторным преобразованием Пенроуза, являющимся простейшим суперсимметрическим преобразованием конформной группы. Этот вопрос тесно связан с суперсимметрическим обобщением теории Янга — Миллса.

В теории калибровочных полей остается много нерешенных фундаментальных проблем, интересных для математиков.

Одна из них, о которой пишет Дайсон, связана с обоснованием фейнмановского метода интегрирования. Эта задача трудна даже в случае нерелятивистской квантовой механики. Для широкого класса потенциалов $V(x)$ (потенциалы $V(x)$, представимые в виде преобразования Фурье комплексной меры) фейнмановский интеграл строго обоснован в работах Альбеверио и Хоэг — Крона [64].

Особенно важна задача обоснования метода континуального интегрирования в теории калибровочных полей, где единственный известный способ квантования — континуальный интеграл. Здесь существует ряд интересных проблем, связанных с нетривиальной топологией функционального пространства полей Янга — Миллса [54], [65] — [67].

Решение классического уравнения Янга — Миллса оказалось тесно связанным с другим интересным направлением современной «физической» математики — теорией нелинейных интегрируемых систем [69], [71], [73]. В частности, методом обратной задачи рассеяния были найдены q-инстантонные решения уравнения дуальности [68].

Нелинейным интегрируемым системам, включающим классическое уравнение Кортевега — де Фриза $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ [70], посвящено несколько подробных обзоров, к которым мы и отсылаем читателя [71] — [76]. В частности, в обзорах [71], [72], [75] подробно обсуждается связь теории нелинейных интегрируемых систем с алгебраической геометрией.

IV. Заключительные замечания. Все рассмотренные примеры обладали одной особенностью — несомненной пользой для математиков от общения с физиками, причем в тех разделах, о которых такой патриот чистой математики, как Ж. Дьедонне, сказал: «Даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов человеческой деятельности, в ней достало бы на столетия пищи для размышления...» [77].

Подобное общение оказалось полезным и физикам. Я упомяну лишь несколько «деловых» разделов физики, где применение нестандартных математических методов было плодотворным.

1. Топология в физике твердого тела. Методы гомотопической топологии использовали при классификации линейных и точечных дефектов в кристаллах, в частности, при классификации нитевидных и слоистых структур в жидких кристаллах, вихрей в сверхтекучем гелии ^{3}He [78], [79], фаз в ^{3}He [80]. Ранее эти методы применяли в теории элементарных частиц (монополи Хоофта—Полякова) [81].

Интересно отметить, что первая физическая работа, где упоминаются гомотопические группы, появилась в 1959 г. Это статья Д. Финкельштейна и Ч. Мизнера по исследованию глобальной структуры пространства-времени [82]. Но следующие реальные применения возникли лишь через 15 лет.

Еще один пример упущенных возможностей для коллекции Дайсона.

2. Приложения теории многомерных динамических систем к исследованию сингулярностей в уравнениях Эйнштейна и колебательных режимов в газовой динамике, развитых О. И. Богоявленским и С. П. Новиковым [83].

Число примеров можно умножить.

Появление этой работы во многом обязано Ю. И. Манину. Чрезвычайно важными были его советы и предложения по переводу и приложению.

Я благодарен В. И. Арнольду, С. П. Новикову и Л. Д. Фаддееву, ознакомившимися с рукописью и сделавшими важные знамечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Hilbert. Mathematische Probleme.— Lecture to the second Intern. Congress of Math. (Paris, 1900).— Arch. Math. und Phys. (3) 1901, Bd. 1, S. 44—63, 213—237. English transl.:— Bull. Amer. Math. Soc. 1902, v. 8, p. 437—479. Русск. перев.: В кн.: Проблемы Гильберта.— М.: Наука, 1969.

[2] H. Minkowski. Raum und Zeit.— Lecture to the 80-th Assembly of Natural Scientists (Köln, 1907),— Phys. Z., 1909, Bd. 10, S. 104—111. English transl., The principle of Relativity, Aberdeen Univ. Press, Aberdeen, 1923.
[3] I. G. MacDonald. Affine root systems and Dedekind's η-function.—Invent. Math., 1972, v. 15, c. 91—143. Русск. перев.: Математика, 1972, т. 16, № 4, с. 3—49.
[4] G. H. Hardy. Ramanujan.— Cambridge Univ. Press, Cambridge; Macmillan, New York, 1940, p. 161.
[5] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions.— Transl. Cambridge Philos. Soc., 1916, v. 22, p. 159—184.
[6] L. J. Mordell. On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1917, v. 19, p. 117—124.
[7] E. Hecke. Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulescher Productenewicklung.— Math. Ann., 1937, v. 114, p. 1—28, 316—351.
[8] M. Newman. An identify for the coefficients of certain modular formas.— J. London math. Soc., 1955, v. 30, p. 488—493.
[9] R. C. Gunning. Lectures on modular forms. — Ann. of Math. Studies, v. 48, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1962
[10] L. Winquist. An elementary proof of $P(11m + 6) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 11)$.— J. Combinatorial Theory, 1969, v. 6, p. 56—59.
[11] C. G. J. Jacobi. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum.— Königsberg, 1826, v. 66, Eq. (5).
[12] F. Klein, R. Fricke. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Bd.12.— Leipzig: Teubner, 1892.
[13] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electronmagnetic field.— Philos. Trans. Roy. Soc. (London), 1865, v. 155, p. 459—512.
[14] J. C. Maxwell. Presidential-Address to section A (Mathematical and Physical Sciences) of the British Association.— Liverpool, 1870, Nature, 1870, v. 2, p. 419—422.
[15] I. Newton. Mathematical principles of natural philosophy. Translated into english by Andrew Motte in 1729, edited by F. Cajori.— Univ. of California Press, Berkley, Calif., 1946, p. 397. Русск. перев.: И. Ньютон. Математические начала натуральной философии. Перев. акад. А. Н. Крылова, Собр. тр. А. Н. Крылова, т. 7, М.: 1936.
[16] H. J. S. Smith. Presidental Address to section A (Mathematical and Physical Sciences) of the British Association.— Bradford, 1873, Nature, 1873, v. 8, p. 448—452.
[17] J. C. Maxwell. A treatise on electricity and Magnetism.— Oxford: Oxford Univ. Press, 1873.
[18] M. Pupin. From immigrant to inventor.— Charles Scribner's Sons, 1924.
[19] H. Bacry, J. M. Lévy-Leblond. Possible kinematics.— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1605—1614.
[20] J. M. Lévy-Leblond. Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincare.— Ann. Inst. H. Poincare Sect., 1965, v. A3, p. 1—12.
[21] L. Carroll. Through the looking-glass and what Alice found there.— London: Macmillan, 1871.
[22] J. W. Gibbs. On multiple algebra, Vice-presidential address to the section of mathematics and astronomy of the American association for the advancement of science.— Proc. Amer. Assoc. Adv. Sci., 1886, v. 35, p. 37—66.
[23] W. R. Hamilton. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. — Philos. Mag., 1844, v. 25, p. 10—13.
[24] H. Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. — Leipzig: Otto Wigand, 1844.
[25] R. Brauer, H. Weyl. Spinors in n-dimensions.— Amer. J. Math., 1935, v. 57, p. 425—449.
[26] A. Einstein. Die grundlage der allegemeinen Relativitätstheorie.— Ann. Phys., 1916, v. 49, p. 769—822. Русск. перев.: А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. I.— М.: Наука, 1965.

[27] R. H a a g, D. K a s t l e r. An elgebraic approach to quantum field theory.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 848—861.
[28] J. D i x m i e r. Les C^*-algebres et leurs representations.— Cahiers Scientifiques, fasc. 29, Gauthier-Villars, Paris, 1964. Русск. перев.: Ж. Д и к с м ь е, C^*-алгебры и их представления.— М.: Наука, 1974.
[29] R. P. F e y n m a n. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction.— Phys. Rev. (2), 1950, v. 80, p. 440—457.
[30] R. E. P e i e r l s. The commutation laws of relativistic field theory.— Proc. Roy. London, Ser. A., 1952, v. 214, p. 143—157.
[31] И. М. Г е л ь ф а н д, А. М. Я г л о м. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике.— УМН, 1956, т. 11, в. 1, с. 77—114.
[32] E. N e l s o n. Feynman integrals and the Schrödinger equation.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 332—343.
[33] C. M. D e w i t t. Feynman's path integral, definition without limiting procedure. — Commun. Math. Phys., 1972, v. 28, p. 47—55.
[34] J. v o n N e u m a n n. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Veralgemeinerung, des Brouwerschen Fixpunktsatzes.— Ergebnisse eines mathematischen Seminars. editted by K. Menger, Wien, 1938. English transl.: Rev. Economic Studies, 1945, v. 13, p. 1—9.
[35] E. W. B r o w n. Resonance in the solar system.— Bull. Amer. Soc., 1928, v. 34, p. 265—289.
[36] C. J. C o h e n, E. C. H u b b a r d. Libration of the close approaches of Pluto to Neptune.— Astronom. J., 1965, v. 70, p. 10—13.
[37] J. H a d a m a r d. The psychology oi invention in the mathematical field.— Princeton Univ. Press., Princeton, N.Y., 1945. Русск. перев.: Ж. А д а м а р, Исследование психологии процесса изобретения в области математики.— М.: Советское радио, 1970.
[38] B. J. B i r c h. How the number of points of an elliptic curve over a fixed prime field varies.— J. London, Math. Soc., 1968, v. 43, p. 57—60.
[39] P. D e l i g n e. Formes modulaires et representations l-adiques.— Seminaire Bourbaki 1968; № 355 (1969). Русск. перев.: П. Д е л и н ь. Модулярные формы и l-адические представления; приложение к книге: Ж. П. С е р р, Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые.— М.: Мир, 1973.
[40] L. D. F a d d e e v. Symplectic structure and quantization of the Einstein gravitation theory.— Proc. Internat. Math. Congress, Nice, 1970, E2 (157), p. 78—82.
[41] [1]) Ю. И. М а н и н. Периоды параболических форм и P-адические ряды Гекке.— Матем. сб., 1973, т. 92, в. 3, с. 378—401.
[42] Modular functions of one variable. 1, 2, 3, 4, 5, 6.— Lecture Notes in Math., 1973, № 320, № 349, № 350; 1975, № 476; 1977. № 601, № 627.
[43] О. М. Ф о м е н к о. Приложения теории модулярных форм к теории чисел. Алгебра, Геометрия, Топология, т. 15.— М.: ВИНИТИ, 1976, с. 5—91.
[44] V. G. K a c. Infinite-dimensional Algebras, Dedikind's η-function, classical Möbius function and the very strange formula.— Preprint MIT, 1977. Adv. in Math., 1978, v. 30, p. 85—136.
[45] Ю. А. Г о л ь ф а н д, Е. П. Л и х т м а н, Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности.— Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 452—455.
[46] J. W e s s, B. Z u m i n o. A lagrangian model invariant under supergauge transformations.— Phys. Lett., 1974, Bd. 49, p. 52—54.
[47] L. C ó r w i n, Y. N e' e m a n, S. S t e r n b e r g. Graded Lie algebras in mathematics and physics.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 573—603.
[48] В. И. О г и е в е ц к и й, А. М е з н и ч е с к у. Симметрии между бозонами и фермионами.— УФН: 1975, т. 117, с. 637—684.

[1]) Литературные ссылки на номера с [41] по [83] относятся к приложению переводчика.

[49] Ф. А. Березин, Г. И. Кац. Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими переменными.— Матем. сб., 1970, т. 82, в. 3, с. 343—358.
[50] V. G. Kac. Lie Superalgebras.— Adv. in Math., 1977, v. 26, p. 8—96.
[51] B. Zumino. Supersymmetry and supergravity.— CERN Preprint TH 2356, 1977.
[52] E. S. Abers, B. W. Lee, Gauge theories.— Phys. Rev., 1973, 9C. Русск. перев.: В кн.: Квантовая теория калибровочных полей.— М.: Мир, 1977.
[53] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Y. S. Tyupkin.— Pseudoparticle solutions of the Yang — Mills equations.— Phys. Lett., 1975, 59 B, p. 85—88.
[54] R. Jackiw, C. Nohl, C. Rebbi. Classical and semi-classical solutions of the Yang — Mills theory.— Preprint MIT № 675, 1977.
[55] A. M. Polyakov. Quark Confinement and Topology of Gauge groups.— Nucl. Phys., 1977, B 120, p. 429—458.
[56] G. 't Hooft. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle.— Phys. Rev., 1976, D 14, 3432—3435.
[57] M. F. Atiyah, R. S. Ward. Instantons and algebraic geometry.—Commun. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 117—124.
[58] В. Г. Дринфельд, Ю. И. Манин. Автодуальные поля Янга — Миллса над сферой.— Функц. анализ, 1978, т. 12, № 2, с. 78—79.
[59] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, Yu. I. Manin. Construction of instantons.— Phys. Lett., 1978, 65 A, p. 185—187.
[60] V. G. Drinfeld, Y. I. Manin. A description of instantons.—Preprint ITEP № 72, 1978; Comm. Math. Phys., 1978, v. 63, p. 177—192.
[61] И. Н. Бернштейн: С. И. Гельфанд, И. М. Гельфанд. Алгебраические расслоения над P^N и задачи линейной алгебры.— Функц. анализ, 1978, т. 12, № 3, с. 66—67.
[62] А. А. Бейлинсон, Когерентные пучки из P^N и проблемы линейной алгебры.— Функц. анализ, 1978, т. 12, № 3, с. 68—69.
[63] E. Witten. An Interpretation of classical Yang — Mills theory.— Phys. Lett., 1978, 77B, p. 394—398.
[64] S. A. Albeverio, R. J. Hoegh-Krohn. Mathematical theory of Feynman Path Integrals.— Lecture Notes in Math., 1976, № 523.
[65] В. Н. Грибов, Квантование калибровочных полей.— В кн.: Физика высоких энергий.— Труды ЛИЯФ, 1977, с. 64—91.
[66] В. Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической механике.— М.: Атомиздат, 1976.
[67] I. D. Faddeev. Introduction to functional method.— In «Method in field theory», Nor. Holland, 1976, S. 1—40.
[68] A. A. Belavin, V. E. Zakharov. Yang — Mills equations as inverse scaterring problem.— Phys. Lett., 1978, 73 B, p. 53—57.
[69] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, № 6.
[70] C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura. A method for solving the Korteweg de Vries equation.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1045—1098.
[71] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55—136.
[72] И. М. Кричевер. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, т. 33, в. 6, с. 183—208.
[73] Л. Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния.— Современные проблемы математики, т. 3.— М.: ВИНИТИ, 1974.
[74] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий. Асимптотика резольвенты Штурм — Лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза.— УМН, 1975, т. 30. № 5, с. 68—100.

[75] Ю. И. Манин. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений.— В кн.: Современные проблемы математики, т. II.— М., ВИНИТИ, 1978.
[76] В. Е. Захаров. Метод обратной задачи рассеяния.— Гл. V в кн.: И. А. Кунин. Теория упругих сред с микроструктурой.— М.: Наука, 1975.
[77] Ж. Дьедонне, Современное развитие математики.— Математика, 1966, т. 10, № 3, с. 3—11.
[78] Г. Е. Воловик, В. П. Минеев. Исследование особенностей в ^{3}He и жидких кристаллах.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 2256—2274.
[79] M. Kleman, L. Michel. On the classification of deffects in the smectic Phases.— J. de Phys. Lettres, 1978, v. 39, p. 129—132.
[80] V. L. Golo, M. I. Monastyrsky. Gauge groups and topological invariants of vaquum manifolds.— Ann. Inst. Henri Poincare (SEC A), 1978, v. 28, p. 75—89.
[81] P. Goddard, D. Olive. The developments in the theory of magnetic monopoles.— Rep. on Prog. Phys., 1978, v. 41, p. 1357—1438.
[82] D. Finkelstein, C. W. Misner. Some new concervation laws.— Ann. Phys., 1959, v. 6, p. 230—243.
[83] О. И. Богоявленский, С. П. Новиков. Однородные модели в общей теории относительности.— УМН, 1976, т. 31, в. 5, с. 33—48.
[84] R. V. Moody. Euclidean Lie algebras.— Canad. J. Math., 1969, v. 21, p. 1432—1455.
[85] A. O. L. Atkin. Ramanujan congruences for $p_{-k}(n)$.— Canad. J. Math., 1968, v. 20, p. 67—68, corrigendum, ibid., 1969, v. 21, p. 256.
[86] A. Ogg. Modular forms and Direchlet series.— New York; Benjamin, 1969.
[87] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mecanics.— Rev. Modern Phys., 1948, v. 20, p. 367—387. Русск. перев.: В кн.: Новейшее развитие электродинамики.— М.: ИЛ, 1954.