Февраль 1995 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 165, № 2*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Еще раз о принципе эквивалентности

В.Л. Гинзбург, Ю.Н. Ерошенко

Напоминается формулировка принципа эквивалентности, лежащего в основе общей теории относительности. Приводятся следствия этого принципа в применении к заряду, находящемуся в локально-однородном гравитационном поле или в равноускоренной системе отсчета (этот вопрос был в свое время освещен, в частности, в методической заметке [1]). *Показывается несостоятельность критики* [2] *содержащегося в* [1] *обычного понимания смысла принципа эквивалентности в электродинамике.*

PACS numbers: **04.20.–q**, 04.20.Cv

1. Принципу эквивалентности (ПЭ) и его роли в физике вообще и в общей теории относительности (ОТО) в частности посвящено огромное число публикаций. В настоящей заметке мы не собираемся сколько-нибудь подробно обсуждать ПЭ, а приведем лишь его формулировку и комментарии к ней из классической книги Паули [3, с. 196]:

"Для бесконечно малой области четырехмерного мира (т.е. для области столь малой, что пространственно-временными изменениями силы тяжести в ней можно пренебречь) всегда существует такая система координат K_0 (X_1, X_2, X_3, X_4), в которой сила тяжести не влияет ни на движение материальной точки, ни на любые другие физические процессы. Коротко говоря, в бесконечно малой области мира любое поле тяготения может быть уничтожено с помощью преобразования координат. Местная система координат K_0 может быть мысленно реализована в виде свободно парящего, достаточно малого ящика, на который не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяготения, в котором он свободно падает.

Очевидно, что указанное преобразование возможно только потому, что поле тяготения обладает фундаментальным свойством сообщать всем телам одинаковое ускорение, или, иначе говоря, потому, что тяжелая и инертная массы всегда равны. Это утверждение имеет очень надежный экспериментальный фундамент".

Мы остановились именно на этой формулировке ПЭ потому, что книга [3] была впервые издана еще в 1921 г. Таким образом, всего через несколько лет после завершения в 1915 г. создания ОТО физический смысл и локальный, так сказать, характер ПЭ были вполне ясны достаточно широким кругам физиков.

В литературе иногда различают (см., например, [4]) ньютоновский или слабый принцип эквивалентности (СПЭ) и сильный или эйнштейновский принцип эквивалентности (ЭПЭ). При этом под СПЭ понимают ПЭ в применении только к механике, т.е. утверждение о том, что в гравитационном поле все тела движутся с одинаковым ускорением. Отсюда следует, что для наблюдателя в лифте, свободно падающем в гравитационном поле (такой лифт часто называли лифтом Эйнштейна, сейчас его назвали бы спутником), эти тела не будут иметь ускорения. (Мы отвлекаемся от возможных приливных эффектов, обусловленных неоднородностью гравитационного поля; такие эффекты, очевидно, могут быть сделаны сколь угодно малыми при уменьшении размеров лифта.)

Переход к ЭПЭ, совершенный Эйнштейном, заключается в том, что не только механические законы, но и все законы физики, в частности электродинамические, в свободно падающем лифте такие же, как при отстутствии гравитации. Разумеется, приведенная в [3] формулировка ПЭ относится к ЭПЭ.

Поскольку в инертную массу тела вносят свой вклад сильное, электромагнитное и слабое взаимодействия, то экспериментальная проверка равенства инертной и гравитационной масс является проверкой не только СПЭ, но и ЭПЭ (см. [4]). Вклад гравитационного взаимодействия в значение инертной массы также не нарушает универсальности равенства инертной и гравитационной масс (см. [4, с. 162]).

В процессе построения ОТО и позже Эйнштейн использовал различные формулировки ЭПЭ и комментировал их (см. [2] и [5, с. 32]). При этом, однако, его высказывания никогда не противоречили приведенной в [3] формулировке ПЭ (см. выше).

Заметим, наконец, что мы не касаемся в настоящей заметке квантовых явлений. С учетом квантовых эффектов и, конкретно, нулевых колебаний полей в вакууме ПЭ справедлив, но, естественно, лишь при соответствующем выборе состояний вакуума [6].

В.Л. Гинзбург, Ю.Н. Ерошенко. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
117924 Москва, Ленинский просп. 53
Тел. (095) 135-85-70
Факс (095) 938 22-51

Статья поступила 24 октября 1994 г.

2. Остановимся на применении ПЭ к заряду e, находящемуся в гравитационном поле или в равноускоренной системе отсчета. Эта задача по ряду причин (в общем, ясным из дальнейшего) привлекла к себе внимание и обсуждается в ряде статей [7–10, 1, 2].

Будем рассматривать разные системы отсчета и различные ситуации, рассуждая при этом в известном смысле в рамках классической механики (ньютоновского приближения), когда физически определены понятия об инерциальной системе отсчета, внешнем гравитационном поле с ускорением свободного падения $\mathbf{g}$ и т.д.

Первая из обсуждаемых систем — инерциальная система K без поля тяжести. Физически инерциальная система K может быть реализована где-то в межзвездном пространстве, достаточно далеко от всех масс. Свободный заряд e, находящийся в системе K, разумеется, не излучает. Это особенно ясно, если скорость заряда (относительно системы K) $\mathbf{v} = 0$. Тогда ему и "излучать нечего", его поле есть кулоновское поле. В остальных системах отсчета, которые рассматриваются ниже, скорость заряда в обсуждаемый момент времени также будет считаться равной нулю.

Теперь рассмотрим систему отсчета K_g — инерциальную систему отсчета, в которой имеется гравитационное поле с ускорением $\mathbf{g}$. В интересующей нас ограниченной области пространства поле $\mathbf{g}$ будем считать однородным и постоянным во времени. Система K_g с некоторой погрешностью может быть реализована в сравнительно небольшой области вблизи любой массы, например вблизи поверхности Земли. Свободный заряд в системе K_g будет, очевидно, двигаться, с постоянным ускорением $\mathbf{g}$.

Вопрос об излучении при таком и более общем равноускоренном движении явился объектом длительной дискуссии (см. [1, 3, 7–11] и указанную там литературу). При этом выяснилось, что равноускоренный заряд излучает в том смысле, что поток вектора Пойнтинга через окружающую заряд поверхность отличен от нуля:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}\, w^2, \tag{1}$$

где $w^2/c^4 = -w^i w_i$, w^i — четырехмерный вектор ускорения заряда, c — скорость света (подробнее см. [1] и [11, гл. 3]). Если скорость заряда v в момент излучения мала по сравнению со скоростью света c, то $w^2 = (\dot{\mathbf{v}})^2$ и в данном случае в системе K_g поток вектора Пойнтинга

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}\, g^2. \tag{2}$$

Наконец, рассмотрим систему отсчета K_a — систему без гравитационного поля, но имеющую ускорение $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$ относительно системы K. Свободный заряд, находящийся в системе K_a (в лифте), согласно ПЭ должен вести себя совершенно так же, как в системе K_g, в частности он должен излучать энергию (2).

В [1] упоминается также система K_{ga}, свободно падающая в системе K_g, т.е. обладающая относительно нее ускорением $\mathbf{g}$. Очевидно, система K_{ga} — локально-инерциальная система отсчета и в ней заряд не излучает. Система K_{ga} — это есть система K_0, упоминаемая в процитированной выше формулировке ПЭ из [3].

Наличие излучения в системе K_a на первый взгляд парадоксально: ведь заряд e относительно инерциальной системы K не ускорен и, казалось бы, не должен излучать. Этот парадокс, естественно, обсуждается в упомянутой литературе и, в частности, в [1].

Дело здесь в том, что выражение (1) лоренц-ковариантно, т.е. одинаково в любой инерциальной системе. Однако это выражение отнюдь не должно сохраняться и фактически не сохраняется при переходе в неинерциальные системы и, в частности, в равноускоренную систему отсчета K_a.

Ситуация аналогична той, которая, как хорошо известно, имеет место в отношении электромагнитного поля в разных инерциальных системах. Если в системе отсчета K, в которой заряд покоится, присутствует лишь кулоновское поле заряда, то в инерциальных системах K', равномерно движущихся относительно системы K, имеется также поперечное электрическое поле и магнитное поле. Аналогично, при переходе от системы отсчета K к системе K_a поле заряда изменяется, и если в K энергия $P = 0$, то в K_a уже $P \neq 0$.

Еще один парадокс видят в том, что изменением системы отсчета можно "создать излучение" — сделать неравной нулю энергию P. Между тем переход от системы отсчета K к системе K_a не может породить новые частицы: электроны, адроны, фотоны и т.п.

Разрешение этого парадокса состоит в том, что отличие от нуля энергии P отнюдь не эквивалентно наличию фотонов — свободных решений уравнений электромагнитного поля. Подробнее об этом речь идет, например, в [1].

В статье А.А. Логунова, М.А. Мествиришвили и Ю.В. Чугреева [2] сказанное в [1] и выше отрицается. Например, авторы пишут [2]: "... утверждение В.Л. Гинзбурга, что заряд в системе K_a излучает, просто неверно, ... неправильно также утверждение В.Л. Гинзбурга, что заряд в системе K_{ga} не излучает. Ведь если бы это было так, то это означало бы, что излучение можно уничтожить выбором системы отсчета, что физически невозможно".

В целом, по сути дела, А.А. Логунов и др. [2] отрицают справедливость ПЭ или, точнее, эйнштейновского ПЭ, противопоставляя его слабому ПЭ. Так, они пишут [2]: "... принцип эквивалентности в принятой выше формулировке справедлив для механических процессов и не имеет места для электродинамических. Это означает, что с помощью измерений внутри системы можно установить, является ли система отсчета инерциальной или она свободно падает в однородном поле тяжести". Или то же самое в другом месте [2]: "... инерциальная система отсчета со статическим однородным гравитационным полем физически неэквивалентна равномерно ускоренной системе отсчета без поля тяготения. Следовательно, принцип эквивалентности не выполняется для электромагнитных явлений".

Между тем справедливость ЭПЭ доказана с высокой степенью точности [4]. Например, равенство инертной и гравитационной масс имеет место с точностью, достигающей двенадцатого знака [4, 12]. Но независимо от такого аргумента рассуждения А.А. Логунова и др. [2] не выдерживают критики и сами по себе. О несправедливости отождествления энергии P (см. (1)) с энергией свободного электромагнитного излучения (совокупности фотонов) мы уже говорили. Поэтому возможность создать или уничтожить "излучение" P выбором системы отсчета ничему не противоречит. Ниже прямым расчетом будет показано, что в системе K_a, если перейти к ней из системы K корректным образом, заряд излучает, причем в точности энергию (2).

Подчеркнем, что мы вводим понятие об излучении и величине P в различных системах отсчета в силу того, что именно эта величина фигурирует в обсуждаемой литературе. В плане же применения ПЭ можно и даже целесообразно было бы ограничиться самими полями. Именно, из ПЭ следует, что электромагнитные поля заряда в системах отсчета K_g и K_a одинаковы. Отсюда уже автоматически следует, что и квадратичные по полю величины P в этих системах отсчета тоже одинаковы.

3. В любой физической теории существует проблема измерений, т.е. вопрос о методах измерения рассматриваемых физических величин, о приборах, с помощью которых проводятся измерения, об условиях сопоставления результатов измерений. Важность проблемы измерений особенно хорошо осознана в квантовой теории. В этом случае обсуждение остается актуальным и занимает видное место в текущей литературе.

Однако квантовой областью дело не ограничивается. Конкретно, когда речь идет об измерении пространственных расстояний и промежутков времени между событиями, нужно уточнять свойства используемых линеек и часов. Так, если сравниваются длины и промежутки времени в двух инерциальных системах отсчета K и K', движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью, то при получении заключений о сокращении движущихся линеек (стержней) и замедлении движущихся часов линейки и часы в обеих системах считаются одинаковыми. Говорят о жестких или стандартных линейках и стандартных или идеальных часах. Для обеспечения одинаковости линеек и часов в системах K и K' нужно, вообще говоря, иметь возможность переносить эти линейки и часы из одной системы в другую. Но это невозможно без ускорения линеек и часов, они должны быть нечувствительны к ускорению.

Далее, длина линеек и ход часов не должны зависеть от их местоположения в пространстве и во времени. Если эти требования не соблюдаются и, например, пользоваться часами, идущими по-разному в системах K и K', то преобразования Лоренца и известные следствия из них будут, вообще говоря, несправедливы.

Разумеется, сказанное относится и к нерелятивистской физике и, например, когда пишут преобразования Галилея, часы в системах K и K' тоже считаются одинаковыми. Видимо, поэтому вопрос считается известным и упомянутые требования к линейкам и часам в различных курсах (в частности, в [13]) просто подразумеваются без явного их упоминания. Конечно, так поступать можно, но, как нам кажется, во избежание недоразумений освещение проблемы измерений при изложении частной теории относительности отнюдь не является излишним. В качестве примера довольно подробного анализа требований, предъявляемых к линейкам и, особенно, к часам в теории относительности, укажем на книгу [14], посвященную "парадоксу близнецов".

В частной теории относительности (в инерциальной системе K или, как говорят, в пространстве Минковского) чаще всего используется декартова система координат $x^i = (ct, x, y, z)$, в которой квадрат интервала (пользуемся обозначениями, принятыми в [13])

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{3}$$

В такой системе упомянутое выше соглашение, касающееся линеек и часов, действительно представляется почти очевидным.

В ОТО используются, вообще говоря, криволинейные координаты $x^i = (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$, так что

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}(x^i)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k. \tag{4}$$

При этом связь между координатами x^i и "истинными" расстоянием и временем, измеряемыми стандартными линейками и часами, не столь очевидно. Этот вопрос освещен, например, в [13, § 84], где показано, что промежутки истинного или собственного времени $d\tau$ в данной точке пространства связаны с $\mathrm{d}x^0$ соотношением

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,\mathrm{d}x^0. \tag{5}$$

Для расстояния $\mathrm{d}l$ между двумя близкими точками имеем

$$\mathrm{d}l^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta. \tag{6}$$

В инерциальной системе K мы будем ниже пользоваться декартовыми координатами x^i с интервалом (3). При переходе к равноускоренной системе K_a для сравнения результатов измерений с результатами в системе K нужно выбрать не произвольные, а соответствующие координаты x'^i. Естественно, Эйнштейн ясно понимал это обстоятельство. Так, еще до завершения построения ОТО, в опубликованной в 1912 г. статье [15, с. 189], он замечает:

"Пусть система K (координаты $x,\ y,\ z$)[1] движется равномерно ускоренно в направлении оси X. Это ускорение является равномерным в смысле Борна: это означает, что ускорение начала координат этой системы относительно такой неускоренной системы, по отношению к которой точки системы K покоятся (точнее, имеют бесконечно малую скорость), постоянно. Такая система K согласно принципу эквивалентности в точности эквивалентна некоторой покоящейся системе, в которой действует свободное от масс гравитационное поле определенного вида (массы, создающие это поле, можно представить себе находящимися на бесконечности). Пространственные измерения в системе K осуществляются посредством масштабов, которые при их сравнении друг с другом в состоянии покоя и в определенном месте системы обладают одинаковыми длинами. Все геометрические свойства, равно как и соотношения между координатами $x,\ y,\ z$ и другими длинами, должны исследоваться такими масштабами. Эти правила не являются само собой разумеющимися; они содержат в себе некоторые физические предположения, которые иногда могут оказаться и неправильными... Масштабы, равно как и оси координат, следует представлять себе в виде абсолютно твердых стержней. Это можно делать, несмотря на то, что согласно теории относительности абсолютно твердые тела в действительности не могут существовать. В самом деле, абсолютно твердые измерительные стержни можно представить себе состоящими из большого числа тел, не являющихся абсолютно

[1] Обозначенная здесь через K система отсчета есть, очевидно, наша система K_a.

твердыми; они так связаны между собой, что не передают друг другу давление при остановке каждого из стержней. Время t в системе отсчета K мы будем измерять часами, установленными в пространственных точках системы K так, что измеряемый с их помощью промежуток времени, необходимый для прохождения луча света между какими-либо двумя точками A и B системы, не зависит от момента испускания луча света из A ...".

Далее Эйнштейн в той же статье рассматривает также систему K_g с гравитационным полем, но на этом мы здесь останавливаться не будем.

4. Итак, нашей задачей является построение в ускоренной системе отсчета K_a координат, удовлетворяющих указанным выше требованиям. Как мы увидим, к числу таких координат принадлежат координаты $x'^i(c\eta,\ \xi,\ \chi,\ \rho)$, описанные, например, в [16, § 18.6] и обычно называемые координатами Мёллера.

Связь координат Мёллера с координатами $x^i = (ct,\ x,\ y,\ z)$, уже использованными выше в инерциальной системе K, такова:

$$ct = \rho \sinh \frac{a\eta}{c}, \tag{7}$$

$$x = \xi, \tag{8}$$

$$y = \chi, \tag{9}$$

$$z = \rho \cosh \frac{a\eta}{c}, \tag{10}$$

причем $\rho \geqslant 0$. В [16] это преобразование введено путем рассмотрения системы K_a как непрерывного перехода между мгновенно сопутствующими системами.

Как легко видеть,

$$\mathrm{d}s^2 = g'_{ik}\ \mathrm{d}x'^i\ \mathrm{d}x'^k = \frac{a^2\rho^2}{c^2}\ \mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\rho^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \mathrm{d}\chi^2. \tag{11}$$

Согласно (7)–(10) и (6) в координатах Мёллера

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\chi^2, \tag{12}$$

т.е. физический элемент длины совпадает с координатным. Элемент $\mathrm{d}l$ не зависит от координат, и измерительные линейки можно считать жесткими (подробнее см., например, в [6, § 2.2]).

Далее, согласно (5) и (11), где $x^0 = c\eta$,

$$\mathrm{d}\tau = \frac{a\rho}{c^2}\ \mathrm{d}\eta, \tag{13}$$

причем переменная (координатное время) η является собственным временем в точке $\rho = c^2/a$.

Координаты Мёллера, как ясно из их определения (7)–(10), покрывают лишь часть пространства Минковского, в которой $z > c|t|$. В статье [2] это обстоятельство считается каким-то дефектом, ибо якобы "... с физической точки зрения переход в новую систему отсчета всегда должен обеспечивать преобразования всех точек пространства-времени исходной инерциальной системы отсчета". Мы ни в коей мере не согласны с таким утверждением, и фактически в ОТО далеко не всегда рассматриваются системы отсчета, носящие, так сказать, глобальный характер.

В интересующем нас случае речь идет по самому смыслу ПЭ о рассмотрении малых областей пространства-времени. Именно в них мы должны установить эквивалентность систем K_a и K_g. К этому можно добавить, что рассмотрение равноускоренного движения во все времена, т.е. на интервале $-\infty < t < \infty$, является совершенно нефизическим, как это обычно и подчеркивается, в частности в [1, 11]. Резюмируя, можно сказать, что переход для описания равноускоренной системы K_a к координатам Мёллера (7)–(10) отвечает всем необходимым требованиям [2].

Если в системе K_a частица (заряд) покоится, то ее координаты ρ_A, ξ_A и χ_A постоянны, т.е. $\mathrm{d}\rho_A = \mathrm{d}\xi_A = \mathrm{d}\chi_A = 0$. В системе K эта частица совершает гиперболическое движение: для нее $z_A^2 - (ct_A)^2 = \rho_A^2$ (ниже мы индекс A опускаем). Скорость частицы v, ее ускорение и собственное время τ таковы:

$$\begin{gathered}
v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{a\rho}{c}\sinh\dfrac{a\eta}{c}\ \mathrm{d}\eta}{\dfrac{1}{c}\ \dfrac{a\rho}{c}\cosh\dfrac{a\eta}{c}\ \mathrm{d}\eta} = \\
= \frac{c\sinh\dfrac{a\eta}{c}}{\cosh\dfrac{a\eta}{c}} = \frac{c\,\dfrac{ct}{\eta}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{ct}{\rho}\right)^2}} = \frac{c^2 t}{z}, \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2\rho^2}{(\rho^2 + c^2t^2)^{3/2}} = \frac{c^2\rho^2}{z^3}, \\
\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ \mathrm{d}t = \frac{a\rho}{c^2}\ \eta.
\end{gathered} \tag{14}$$

Четырехмерные векторы скорости u^i, ускорения w^i и вектор $\mathrm{d}w^i/\,\mathrm{d}s$ для рассматриваемой частицы, выраженные через координаты $ct,\ \xi,\ \chi$ и ρ, имеют вид

$$\begin{gathered}
u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \left(\cosh\frac{a\eta}{c},\ 0,\ 0,\ \sinh\frac{a\eta}{c}\right), \\
w^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{1}{\rho}\sinh\frac{a\eta}{c},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{\rho}\cosh\frac{a\eta}{c}\right), \\
\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{1}{\rho^2}\cosh\frac{a\eta}{c},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{\rho^2}\sinh\frac{a\eta}{c}\right),
\end{gathered} \tag{15}$$

ибо, например,

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}(ct)}{\dfrac{a\rho}{c}\ \mathrm{d}\eta}, \qquad w^0 = \frac{\mathrm{d}\left(\cosh\dfrac{a\eta}{c}\right)}{\dfrac{a\rho}{c}\ \mathrm{d}\eta}.$$

Как известно (см., например, [11]), для равноускоренного движения

$$\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}s} + w^k w_k u^i = 0,$$

что и следует из (15), поскольку $w^k w_k = -1/\rho^2$. Таким образом, частица, покоящаяся в системе K_a, движется равноускоренно в системе K. Наоборот, если частица покоится в системе K, то в системе K_a при малой скорости она движется равноускоренно (подробнее см. [8]).

[2] Заметим, что в [10] указаны также координаты, обобщающие координаты Мёллера и покрывающие все пространство.\

5. Перейдем к доказательству того, что заряд, покоящийся в инерциальной системе K и, естественно, в ней не излучающий, в системе K_a излучает. Если в системе K заряд покоится в точке с координатами $x = y = 0$, $z = c^2/a$, то в этой системе его поле чисто кулоновское, т.е. тензор электромагнитного поля имеет вид (обозначения см. в [13, § 24]) [3]

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e}{r_0^3}\,x & -\frac{e}{r_0^3}\,y & -\frac{e}{r_0^3}\left(z-\frac{c^2}{a}\right) \\ \frac{e}{r_0^3}\,x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e}{r_0^3}\,y & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e}{r_0^3}\left(z-\frac{c^2}{a}\right) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где

$$r_0^2 = \rho_0^2 + \left(z - \frac{c^2}{a}\right)^2, \qquad \rho_0^2 = x^2 + y^2.$$

Тензор энергии-импульса поля (см. [13, § 33])

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^{k}{}_{l} + \frac{1}{4}\,g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right),$$

так что

$$\begin{aligned} &4\pi T^{00} = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{r_0^4}, \qquad T^{01} = T^{02} = T^{03} = 0,\\ &4\pi T^{12} = -\frac{e^2}{r_0^6}\,xy,\\ &4\pi T^{13} = -\frac{e^2}{r_0^6}\,x\left(z-\frac{c^2}{a}\right),\\ &4\pi T^{23} = -\frac{e^2}{r_0^6}\,y\left(z-\frac{c^2}{a}\right),\\ &4\pi T^{11} = -\frac{e^2}{r_0^4}\left(\frac{1}{r_0^2}\,x^2 - \frac{1}{2}\right),\\ &4\pi T^{22} = -\frac{e^2}{r_0^4}\left(\frac{1}{r_0^2}\,y^2 - \frac{1}{2}\right),\\ &4\pi T^{33} = -\frac{e^2}{r_0^2}\left[\frac{1}{r_0^2}\left(z-\frac{c^2}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Тензор T^{ik} симметричен.

Перейдем в систему K_a с координатами (7)–(10). В этой системе в момент $\eta = 0$ заряд имеет координаты $\xi = \chi = 0$, $\rho = c^2/a$. Его скорость

$$\frac{d\rho}{d\eta} = -\frac{az\sinh\dfrac{a\eta}{c}}{c\cosh^2\dfrac{a\eta}{c}} = -\frac{a\rho t}{z} = 0,$$

а ускорение

$$\frac{d^2\rho}{d\eta^2} = -\frac{a^2\rho}{c^2} = -a.$$

(Напомним, что в системе K заряд покоится, причем $z = c^2/a$.) Таким образом, в момент $\eta = t = 0$ заряд имеет в системе K_a ускорение $-a$. Так и должно быть в лифте, движущемся с ускорением $a = -g$. (Здесь g — ускорение свободного падения в системе K_g.)

Коэффициенты $\partial x'^i/\partial x^l$ тензорного закона преобразования

$$T'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\,\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\,T^{lm} \tag{18}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(c\eta)}{\partial(ct)} = \frac{c^2}{a\rho}\cosh\frac{a\eta}{c},\\ &\frac{\partial(c\eta)}{\partial z} = -\frac{c^2}{a\rho}\sinh\frac{a\eta}{c},\\ &\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\chi}{dy} = 1,\\ &\frac{\partial\rho}{\partial(ct)} = -\sinh\frac{a\eta}{c},\\ &\frac{\partial\rho}{\partial z} = \cosh\frac{a\eta}{c}. \end{aligned} \tag{19}$$

Остальные коэффициенты равны нулю. При этом, конечно, нужно выразить координаты $(c\eta, \xi, \chi, \rho)$ через координаты (ct, x, y, z), используя связи (7)–(10), из которых следует, что $z^2 - c^2t^2 = \rho^2$.

С помощью (17)–(19) находим интересующие нас компоненты тензора энергии-импульса в системе K_a:

$$\begin{aligned} &T'^{01} = \frac{c^2}{\rho a}\,\frac{e^2}{4\pi r_0^6}\,x\left(z-\frac{c^2}{a}\right)\sinh\frac{a\eta}{c},\\ &T'^{02} = \frac{c^2}{\rho a}\,\frac{e^2}{4\pi r_0^6}\,y\left(z-\frac{c^2}{a}\right)\sinh\frac{a\eta}{c},\\ &T'^{03} = \frac{c^2}{\rho a}\,\frac{e^2}{4\pi r_0^4}\left[\frac{1}{r_0^2}\left(z-\frac{c^2}{a}\right)^2 - 1\right]\times\\ &\qquad\times\cosh\frac{a\eta}{c}\,\sinh\frac{a\eta}{c}. \end{aligned} \tag{20}$$

Найдем теперь поток энергии электромагнитного поля через поверхность сферы

$$\xi^2 + \chi^2 + \left(\rho - \frac{c^2}{a}\right)^2 = (c\eta)^2 \tag{21}$$

в момент времени η. Расчет будем вести с точностью до членов порядка $(a\eta/c)^2$, пренебрегая членами более высокого порядка: $O(a\eta/c)^3$ и т.д. Раскладывая все величины в ряды, имеем

$$\begin{aligned} z - \frac{c^2}{a} &= \rho\cosh\frac{a\eta}{c} - \frac{c^2}{a} = \\ &= \rho - \frac{c^2}{a} + \frac{\rho}{2}\left(\frac{a\eta}{c}\right)^2, \quad \sinh\frac{a\eta}{c} = \frac{a\eta}{c}. \end{aligned}$$

[3] Вычисления приводятся в деталях, ибо так поступают авторы критикуемой нами статьи [2], помещенной в журнале, предназначенном для оригинальных работ. В настоящей методической заметке, публикуемой в обзорном журнале, детали представляются тем более уместными.

На поверхности сферы (21) с той же точностью получаем

$$\frac{1}{\rho}=\left\{\rho+\frac{c^2}{a}-\frac{c^2}{a}\right\}^{-1}=$$
$$=\frac{a}{c^2}\left\{1+\frac{a}{c^2}\left(\rho-\frac{c^2}{a}\right)\right\}^{-1}=$$
$$=\frac{a}{c^2}\left(1-\frac{a}{c^2}\,c\eta\cos\theta\right),$$

$$r_0^2=\xi^2+\chi^2+\left(z-\frac{c^2}{a}\right)^2=$$
$$=c^2\eta^2+\frac{\rho}{2}\left(\frac{a\eta}{c}\right)^2 c\eta\,\cos\theta,$$

где координаты θ и φ введены так, что

$$\xi=c\eta\sin\theta\cos\theta,$$
$$\chi=c\eta\sin\theta\sin\varphi,$$
$$\rho-\frac{c^2}{a}=c\eta\cos\theta.$$

Поток вектора Пойнтинга $S^\alpha=cT^{0\alpha}$ через сферу (21)

$$P=c\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}(\cos\theta)c^2\eta^2\left\{T'^{01}\sin\theta\cos\varphi+\right.$$
$$\left.+T'^{02}\sin\theta\sin\varphi+T'^{03}\cos\theta\right\},\tag{22}$$

причем подынтегральное выражение берется на поверхности сферы (21) в момент времени η, а значения $T'^{0\alpha}$ приведены в (20).

Заметим, что поверхность сферы (21) не совпадает с поверхностью постоянной фазы электромагнитного поля. Дело в том, что координатные скорости света $\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}x_0$ в точках с $\rho<c^2/a$ и $\rho>c^2/a$ в системе K_a различны. Действительно, при

$$\mathrm{d}s^2=\frac{a^2\rho^2}{c^2}\,\mathrm{d}\eta^2-\mathrm{d}\rho^2-\mathrm{d}\xi^2-\mathrm{d}\chi^2=0$$

скорость

$$\frac{\sqrt{\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2}}{\mathrm{d}\eta}=\frac{a\rho}{c}.$$

Поэтому излучение, испущенное в момент $\eta=0$, доходит до различных точек сферы не одновременно. Однако, как можно показать, учет этого обстоятельства приводит к поправке следующего порядка малости по сравнению с учитываемым.

Дальнейшие вычисления P согласно (22) совершенно элементарны, но довольно громоздки. Выкладки нами произведены, но приводить их здесь мы считаем нецелесообразным, ибо, как и следовало ожидать, результат находится в соответствии с ПЭ, а именно:

$$P=\frac{2e^2}{3c^3}\,a^2,\tag{23}$$

что совпадает с (2), если положить $a^2=g^2$.

Тот факт, что расчет ведется в пренебрежении членами порядка $O(a\eta/c)^3$ и более высокими, не является каким-то дефектом, ибо в согласии с самим смыслом ПЭ нас интересуют малые пространственно-временные области, как это уже неоднократно подчеркивалось выше.

Расчет, аналогичный, в принципе, приведенному в [10], позволяет убедиться в том, что в системе K_{ga}, свободно падающей в системе K_g, заряд не излучает, хотя он, конечно, излучает в системе K_g.

Принцип эквивалентности лежит в основе ОТО. Поэтому, естественно, любые расчеты в рамках ОТО не могут противоречить ПЭ. Вместе с тем большая эвристическая сила ПЭ очевидна уже из проведенного рассмотрения излучения заряда в системе K_a. Результат (23), сразу же следующий из ПЭ, получается при использовании аппарата ОТО только в результате хотя и простых, но громоздких расчетов.

6. Приведем еще один пример того, как на основе ПЭ сразу же получается результат, отнюдь не очевидный без использования ПЭ. А именно, рассмотрим в нерелятивистском приближении некоторый объект (твердое тело, атом), движущийся с постоянным ускорением **a** относительно инерциальной системы отсчета K. Мы хотим описать этот объект в рамках нерелятивистской квантовой механики и, конкретно, выяснить характер движения электрона проводимости в равноускоренном металле [17, 18] или найти сдвиги уровней равноускоренного атома.

Если объект покоится, то для описания его поведения нужно использовать уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta+U(x,\,y,\,z)\right\}\Psi,\tag{24}$$

где $U(x,\,y,\,z)$ — потенциальная энергия электрона проводимости, электрона в атоме и т.п. Уравнение Шрёдингера (24) написано в инерциальной системе отсчета, что обычно даже не оговаривается. В условиях, когда тело или атом движутся ускоренно (для определенности, в направлении оси z с постоянным ускорением a), в (24) нужно заменить

$$U(x,\,y,\,z)\ \text{на}\ \ U\left(x,\,y,\,z-\frac{a}{2}\,t^2\right).\tag{25}$$

Перейдем в равноускоренную систему отсчета (связанную с телом, ядром атома и т.п.) путем преобразования

$$t'=t,\qquad x'=x,\qquad y'=y,\qquad z'=z-\frac{a}{2}\,t^2.\tag{26}$$

Вводя новую волновую функцию

$$\Psi=\Psi'\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[mat'z'+\frac{1}{6}\,ma^2t'^3\right]\right\},\tag{27}$$

для Ψ' из (24), (25) имеем

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi'}{\partial t'}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta'+U(x',\,y',\,z')+maz'\right\}\Psi'.\tag{28}$$

Таким образом, для функции Ψ' получается такое же уравнение, как и в инерциальной системе, но с добавлением потенциальной энергии maz'. Но этот результат сразу же следует [18] из ПЭ, ибо в однородном гравитационном поле с ускорением $g = -a$ потенциальная энергия как раз равна maz'. Такого же типа потенциал имеет место и в однородном электрическом поле. Поэтому выяснение влияния ускорения на ход атомных часов сводится к использованию известных результатов, касающихся штарк-эффекта в атомах.

7. Нам остается разъяснить, почему в статье А.А. Логунова и др. [2] получен результат, противоречащий ПЭ. В [2], как и выше, рассматривается заряд, покоящийся в инерциальной системе K, и вычисляется его излучение в некоторой неинерциальной системе отсчета K_{N}, которая считается равноускоренной. Далее, путем, аналогичным изложенному выше, доказывается, что в системе K_{N} заряд не излучает. Это действительно справедливо. Однако все дело в том, что система K_{N} радикально отличается от описанной выше системы K_a, которая отвечает равноускоренному движению и фигурирует при обсуждении ПЭ.

В самом деле, в [2] переходят к системе K_{N} с координатами

$$\eta = t, \qquad \xi = x, \qquad \chi = y, \qquad \rho = z - c\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + t^2}. \tag{29}$$

Во втором порядке по at/c координаты (29) соответствуют преобразованию Галилея

$$\eta = t, \quad \xi = x, \quad \chi = y, \quad \rho = z - \frac{c^2}{a} - \frac{at^2}{2} + O\left(\frac{at}{c}\right)^3. \tag{30}$$

Ясно, что при таком преобразовании релятивистские эффекты порядка $(v/c)^2$, т.е. порядка $(at/c)^2$ отсутствуют. Между тем все излучение (23) порядка $(a/c)^2$. Поэтому в системе K_a и пришлось вести расчет релятивистски, несмотря на сколь угодно малую скорость заряда. Кстати, учет релятивистских законов преобразования нужен уже при сколь угодно малых скоростях и, например, при рассмотрении прецессии Томаса [19].

Система отсчета K_{N} не является жесткой, поскольку для физического элемента длины $\mathrm{d}l$ имеем (см. (6))

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \mathrm{d}\rho^2 + g^2 t^2\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\rho, \tag{31}$$

т.е. $\mathrm{d}l$ зависит от времени.

Этот факт сразу же ясен из (30). Так, пусть концы стержня, покоящегося в K_{N}, имеют в этой системе координаты ρ_1 и ρ_2. Тогда в каждый момент времени t длина стержня $\rho_2 - \rho_1 = z_2 - z_1$, где z_2 и z_1 — координаты концов стержня в системе K. Но это означает, что в системе K отсутствует лоренцево сокращение длины стержня, покоящегося в системе K_{N}, и, следовательно, в системе K_{N} длина стержня непостоянна: она зависит от времени и при $t > 0$ увеличивается со временем. Таким образом, систему K_{N} при обсуждении ПЭ нельзя сравнивать с системой K_g.

Резюмируя, можно сказать, что содержащаяся в статье [2] критика заметки одного из авторов [1] совершенно необоснованна. Никаких ошибок в заметке [1] мы не обнаружили. Что же касается утверждения А.А. Логунова и др. [2] о несправедливости принципа эквивалентности в электродинамике, то оно неверно.

Список литературы

1. Гинзбург В Л *УФН* **98** 569 (1969)
2. Логунов А А, Мествиришвили М А, Чугреев Ю В, Препринт ИФВЭ 93-109 (Протвино, 1993); *Теор. и мат. физ.* **99** 121 (1994)
3. Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1991)
4. Уилл К *Теория и эксперимент в гравитационной физике* (М.: Энергоиздат, 1985)
5. Гинзбург В Л *О теории относительности* (М.: Наука, 1979)
6. Гинзбург В Л, Фролов В П *УФН* **153** 633 (1987); Тр. ФИАН **197** 8 (1989); в кн. *Эйнштейновский сборник 1986–1990* (М.: Наука, 1990) с. 190
7. Fulton T, Rohrlich F *Ann. Phys.* **9** 499 (1960)
8. Rohrlich F *Nuovo Cimento* **21** 811 (1961); *Ann. Phys.* **22** 169 (1963)
9. Rohrlich F *Classical charged particles* (N. Y.: Addison-Wesley Publ. Co., Reading, 1965)
10. Boulware F *Ann. Phys.* **124** 169 (1980)
11. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика* (М.: Наука, 1987)
12. Брагинский В Б, Панов В И *ЖЭТФ* **61** 873 (1971); *Sov. Phys. JETP* **34** 463 (1972)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
14. Скобельцын Д В *Парадокс близнецов в теории относительности* (М.: Наука, 1966)
15. Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. I (М.: Наука, 1965)
16. Мёллер К *Теория относительности* (М.: Атомиздат, 1975)
17. Darwin C G *Proc. Roy. Soc. A* **154** 61 (1936)
18. Гинзбург В Л, в кн. *Сборник памяти А А Андронова* (М.: Изд-во АН СССР, 1955) с. 622
19. Беллони Л, Рейна Ч, в кн. *Эйнштейновский сборник 1984–1985* (М.: Наука, 1988) с. 201

ONCE AGAIN ABOUT EQUIVALENCE PRINCIPLE

V. L. Ginzburg, Yu. N. Eroshenko
P. N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences
Leninskii prosp. 53, 117924 Moscow
Tel. (*7-095*) *135-85 70*
Fax (*7-095*) *938-22 51*

The formulation of equivalence principle is recalled. The conclusions stemming from this principle for the case of a charge placed in a locally uniform gravitational field or a uniformly accelerated reference system are formulated (this question was discussed earlier, for example, in the note [1]). The authors demonstrate that the criticism, contained in paper [2], of the conventional interpretation of the principle of equivalence in electrodynamics presented in note [1] is groundless.

PACS numbers: **04.20.−q**, 04.20.Cv

Bibliography — 19 references

Received 24 October 1994