УДК 51(019)
ББК 22.1г
М23

Манин Ю. И.

М23 Математика как метафора. — М.: МЦНМО, 2008. — 400 с.

ISBN 978-5-94057-287-9

В книге Ю. И. Манина собраны написанные и опубликованные в разные годы очерки по истории и философии математики и физики, теории культуры и языка, а также впервые публикуемые отрывки из воспоминаний, стихи и стихотворные переводы.

ББК 22.1г

Оформление обложки: *Михаил Панов*
Эскиз обложки: *Михаил Лаптев*
Фото на вклейке: *Ксения Семёнова*

На с. 377 воспроизведен рисунок С. Ю. Аракелова в конспекте курса Ю. И. Манина «Абелевы многообразия»

Манин Юрий Иванович

МАТЕМАТИКА КАК МЕТАФОРА

Подписано в печать 11.02.2008 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 25. Тираж 2000 экз. Заказ № 292

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495)–241–74–83.

ISBN 978-5-94057-287-9

Оглавление

Литература

1. *Atiyah M. F.* Topological quantum field theories // Publ. Math. IHES. 1989. Vol. 68. P. 175—186.
2. *Blanchet C., Habegger N., Massbaum G., Vogel P.* Topological quantum field theories derived from the Kaufman bracket // Topology. 1995. Vol. 34, № 4. P. 883—927.
3. *Bourbaki N.* Éléments d'histoire des mathématiquess. Hermann; Paris, 1974. [Русский перевод более раннего издания: *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: Наука, 1963.]
4. *Candelas P., de la Ossa X., Green P., Parkes L.* A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory // Nuclear Phys. 1991. Vol. 359. P. 21—74.
5. *Dyson F.* Missed opportunities // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78. P. 635—652. [Русский перевод: *Дайсон Ф. Дж.* Упущенные возможности // Успехи математических наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 171—191.]
6. *Feynman R. P.* The space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. Vol. 20. P. 367—387.
7. *Feynman R. P.* QED. The Strange Theory of Light and Matter. Princeton Univ. Press, 1988. [Русский перевод: *Фейнман Р.* КЭД — странная теория света и вещества. М.: Наука, 1988.]
8. *Glimm J., Jaffe A.* Quantum physics. A functional integral point of view. Springer, 1981.
9. *Grant H.* What is modern about 'modern' mathematics? // Math. Intelligencer. 1995. Vol. 17, № 3. P. 62—66.
10. *Hardy G. H.* Mathematical proof // Mind. 1929. XXXVIII-149. P. 1—25.
11. *Jaffe A., Quinn F.* Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 29, № 1. P. 1—13.
12. Responses to 'Theoretical mathematics etc.' by A. Jaffe and F. Quinn // Bull. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 30. P. 161—177.
13. *Reshetikhin N., Turaev V.* Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups // Inv. math. 1991. Vol. 103. P. 547—597.
14. *Witten E.* Quantum fiels theory and the Jones polynomial // Comm. Math. Phys. 1989. Vol. 121. P. 351—399.

Размышления об арифметической физике

Александру Гротендику к шестидесятилетию

> Есть и такие, кто при виде всего этого всего лишь недоверчиво пожмут плечами и скажут, что ничего, кроме фантазий, из этого не получится. Эти люди забывают или не знают, что наша наука, как и всякая другая, мало чего бы достигла, если бы с самого начала она не питалась мечтами и видениями тех, кто отдается ей со всей страстью.
>
> *А. Гротендик* [0, с. 18]

Развитие теоретической физики в последней четверти XX века определяется весьма романтической системой ценностей. Стремясь описать фундаментальные процессы в планковском масштабе, физики склонны терять какую бы то ни было прямую связь с наблюдаемым миром. В этом социальном контексте изощренная математика, появляющаяся в теории квантовых струн, перестает быть исключительно техническим инструментом, необходимым для вычисления каких-то измеримых эффектов, но становится делом принципа.

Сегодня по крайней мере некоторые из нас снова испытывают древнее платонистское чувство, что математическим идеям каким-то образом суждено описывать физический мир, сколь бы отдаленными от реальности ни казались их истоки.

Если быть последовательным, придется принять неправдоподобную (?) идею, что самые глубокие приложения в физике получит теория чисел. И действительно, явственно различима тенденция по крайней мере допускать теорию чисел в мир идей современной теоретической физики.

Автор этих строк был удивлен и обрадован, когда обнаружил, что для нахождения меры Полякова в струнной теории можно воспользоваться результатами Фальтингса, вычислявшего специфическую теоретико-числовую функцию — так называемую высоту (см. [1, 2, 3]).

Reflections on arithmetical physics // Conformal Invariance and string theory. Poiana Brasov, 1987. Boston, MA: Academic Press, 1989. P. 293—303. *Перевод с английского С. М. Львовского.*

Потом Саша Поляков сказал мне, что после доклада Фальтингса на международном математическом конгрессе в Беркли Эд Виттен скупил все книги по теории чисел, которые нашел в магазине через дорогу. (Я не спрашивал у Эда, так ли это: se non è vero, è ben trovato).

Стало быть, сейчас самое время представить некоторые размышления профессионального теоретико-числовика и физика-любителя о таком противоречивом предмете, как арифметическая физика.

Спросим себя для начала, можно подсчитать что-нибудь физическое с помощью средств, являющихся бесспорно теоретико-числовыми? Я полагаю, что ответ должен быть утвердительным. Давайте посмотрим на одну из самых красивых формул Эйлера:

$$\pi^2/6=\prod_{p\ \text{простое}}(1-p^{-2})^{-1}. \tag{1}$$

Правая часть, без всяких сомнений, принадлежит теории чисел: простые числа $p=2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ — один из ее главных предметов изучения. Осмелюсь сказать, что левая часть, в которой участвует число π, является физической константой, хотя, видимо, чтобы убедить в этом читателя, потребуется какая-то аргументация. В самом деле, число π может быть (и было) измерено, так же, как температура кипения воды или длина земного экватора. Можно сказать, что евклидова геометрия, в которой π появляется как математическая константа, является на самом деле кинематикой идеальных твердых тел, работающей в макроскопическом приближении плоского гравитационного вакуума.

Чтобы лучше понять формулу (1), полезно вспомнить некоторые свойства простых чисел. Классически простое число p определяется как целое положительное число, не имеющее делителей, кроме самого себя и единицы. Каждое целое число можно единственным образом разложить в произведение простых; простых чисел бесконечно много; они распределены довольно нерегулярно; простейшая асимптотическая формула для количества простых чисел, не превосходящих N, имеет вид $N/\log N$. Это, однако, не тот подход, который нам сейчас нужен.

Современное объяснение роли простых чисел дается теоремой Островского: простыми числами описываются все разумные способы (в дополнение к традиционному) ввести понятие непрерывности на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Говоря более конкретно, определим функцию $|a|_p$ от числа $a\in\mathbb{Q}$ таким образом: $|a|_p=p^{-n}$, если $a=p^n cd^{-1}$, где c и d — целые числа, не делящиеся на p. Эта функция обладает обычными свойствами

нормы: $|ab|_p=|a|_p|b|_p$, $|a+b|_p\leqslant|a|_p+|b|_p$ (на самом деле даже $\leqslant\max(|a|_p,|b|_p)$ — так называемое неархимедово неравенство треугольника). Следовательно, эта норма определяет на $\mathbb{Q}$ топологию, в которой $a_i\to 0$, если $|a_i|_p\to 0$. Эта топология называется p-адической. Поскольку сложение и умножение p-адически непрерывны, можно стандартным образом определить фундаментальные последовательности и множество пределов таких последовательностей, называемых p-адическими числами.

Множество p-адических чисел, обозначаемое $\mathbb{Q}_p$, является новым аналогом множества действительных чисел $\mathbb{R}$, которое можно построить таким же способом с использованием обычной абсолютной величины, которую удобно обозначать через $|a|_\infty$. Теорема Островского утверждает, что всякая норма (говорят еще «нормирование») на $\mathbb{Q}$ задает ту же топологию, что $|\cdot|_\infty$ или $|\cdot|_p$ для некоторого простого p.

Разумеется, свойства $\mathbb{Q}_p$ во многих отношениях отличны от свойств $\mathbb{R}$. Главная причина в том, что $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{R}$ сильно отличаются топологически: p-адические числа образуют канторово множество, или «фрактал» [4]. Тем не менее, многие разделы классического анализа и геометрии удается развить над p-адическими числами; прекрасное введение можно найти в книге [5].

Как мы знаем, физический мир весьма эффективно описывается с помощью математики, основанной на $\mathbb{R}$ (и на его последующем расширении $\mathbb{C}$ — комплексных числах). Недавно было высказано предположение, что в планковских масштабах больше подходит p-адическая топология [6]. При этом, однако, возникает вопрос: почему какое-то одно p должно быть выделенным с физической точки зрения? Не разумнее ли верить в демократию и считать, что все имеющиеся топологии равноправны? (Или, по крайней мере, все p-адические топологии: $\mathbb{R}$, бесспорно, является «первым среди равных», так как оно задано с помощью единственной архимедовой нормы.)

Оказывается, что тождество Эйлера (1), так же как и целый ряд аналогичных фактов, можно объяснить способом, который подсказывает очень убедительную картину такой демократии.

Начнем с почти очевидной формулы $|a|_\infty=\prod_p|a|_p^{-1}$. Она означает, что знать обыкновенную абсолютную величину рационального числа — то же самое, что знать все его p-адические абсолютные величины. Или, если быть полностью демократичными, $\prod_v|a|_v=1$, где v равно ∞ или $p=2, 3, 5\ldots$ В теории чисел полно формул такого типа; они называются формулами произведения, законами взаимности и т. п.

В выписанной нами формуле произведения мы рассматривали рациональное число a по очереди как действительное, 2-адическое, 3-адическое и т. д. Введем, более общим образом, множество бесконечных векторов $(a_\infty, a_2, a_3, \ldots)$, где $a_\infty \in \mathbb{R}$ и $a_p \in \mathbb{Q}_p$. Такой вектор, с дополнительным условием, что $|a|_p \leqslant 1$ для всех достаточно больших p, называется аделем. Этот термин был изобретен Клодом Шевалле около 1940 года, вместе с термином «идель», означающим «обратимый адель» (т. е. $a_\nu \neq 0$ для всех ν и $|a_p|_p = 1$ для больших p). Этимология этих слов неясна; предположительно, «идель» происходит от слова «идеальный», а «адель» означает «аддитивный идель». Как бы то ни было, для современных теоретико-числовиков это стандартные термины.

Давайте теперь представим первые шаги математики, в которой действительные числа заменены на адели. У аделя $a = (a_\nu)$ имеются компоненты, вещественная a_∞ и p-адические компоненты a_p для всех p. Множество всех аделей образует топологическое кольцо $A_\mathbb{Q}$, с покомпонентными сложением и умножением. Его топология совмещает в себе архимедовы и фрактальные свойства. Рациональные числа $\mathbb{Q}$ вкладываются в $A_\mathbb{Q}$ диагонально: $a \equiv (a, a, a, \ldots)$. Простое, но важное наблюдение состоит в том, что $\mathbb{Q} \subset A_\mathbb{Q}$ — дискретная подгруппа, как $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Иными словами, последовательность рациональных чисел не может сходиться во всех ν-адических топологиях одновременно (если, например, она p-адически сходится к нулю для всех p, то она должна состоять из растущих до бесконечности целых чисел).

Вспоминая, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = U(1)$ является окружностью, мы приходим к понятию адельной окружности:

$$A_\mathbb{Q}/\mathbb{Q} = \Big(\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Z}_p\Big)/\mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\mathbb{Z}_p$ — множество p-адических целых чисел ($a \in \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow |a|_p \leqslant 1$). Из (2) видно, что адельная окружность — это смесь $U(1)$ и компактной топологической вполне несвязной группы, которую можно также описать как «предел решеточных приближений» для $U(1)$, т. е. как $\varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тем самым мы опять наблюдаем соединение архимедовых и фрактальных свойств в одном объекте. Фурье-анализ, основанный на $A_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ вместо $U(1)$, чрезвычайно изящно связывает воедино обычное и конечное преобразования Фурье. См. диссертацию Тэйта [7].

Если продвинуться еще на шаг дальше, можно определить простейшую некоммутативную адельную группу $SL_2(A_\mathbb{Q})$, являющуюся

по существу множеством бесконечных матричных векторов

$$\left\{\begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q}_\nu) : \nu = \infty, 2, 3, 5, \ldots\right\},$$

для которых (a_ν), (b_ν), (c_ν) и (d_ν) являются аделями. Подгруппа $SL_2(\mathbb{Q})$ также дискретна в $SL_2(A_\mathbb{Q})$. Пользуясь левоинвариантной дифференциальной формой на SL_2 и нормами $|a|_\nu$, можно определить левоинвариантную меру $dm = \prod_\nu dm_\nu$ на группе $SL_2(A_\mathbb{Q})$ так же, как на ее классической компоненте $SL_2(\mathbb{R})$. Если нормализовать dm с помощью условия $\int_{SL_2(A_\mathbb{Q})/SL_2(\mathbb{Q})} dm = 1$, а затем вычислить интеграл покомпонентно, то мы в конце концов придем к красивому объяснению формулы (1):

$$1 = \int\limits_{SL_2(A_\mathbb{Q})/SL_2(\mathbb{Q})} dm = \int\limits_{SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})} dm_\infty \times \prod_p \int\limits_{SL_2(\mathbb{Z}_p)} dm_p, \tag{3}$$

$$\int\limits_{SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})} dm_\infty = \pi^2/6, \qquad \int\limits_{SL_2(\mathbb{Z}_p)} dm_p = 1 - p^{-2}. \tag{4}$$

Здесь формула (3) устанавливается так же, как (2), архимедова часть формулы (4) доказывается с помощью трюка, основанного на формуле суммирования Пуассона, а p-часть формулы (4) следует из того факта, что SL_2 над конечным полем из p элементов состоит из $p^3 - p$ точек, так что относительное количество точек в $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ по отношению к $\mathbb{Z}_p^3$ равно $1 - p^{-2}$.

Теперь мы видим следующую закономерность:

- (по крайней мере некоторые) существенные понятия действительного и комплексного анализа и геометрии имеют адельные аналоги;
- адельные объекты имеют сильную тенденцию быть проще, чем их архимедовы компоненты; например, адельные фундаментальные области арифметических дискретных подгрупп в полупростых группах обычно имеют объем 1 (философия Зигеля—Тамагавы—Вейля, см. [15]);
- благодаря этому факту и «формулам произведения», воплощающим идею равноправия всех топологий, информация о вещественной компоненте адельного объекта может быть считана либо с самой этой вещественной компоненты, либо с произведения p-адических компонент для всех p.

Если теперь позволить себе несколько рискованное обобщение, то можно сформулировать основную гипотезу этого доклада.

На фундаментальном уровне наш мир не является ни вещественным, ни p-адическим: он адельный. По каким-то причинам, связанным с физической природой нашей разновидности живой материи (возможно, с тем, что мы состоим из массивных частиц), мы обычно проектируем адельную картину в вещественную сторону. С тем же успехом мы могли бы духовно проектировать ее в неархимедову сторону и вычислять наиболее важные вещи арифметически.

«Вещественная» и «арифметическая» картины мира находятся в отношении дополнительности, напоминающем отношение между сопряженными наблюдаемыми в квантовой механике.

Разумеется, никто не обязан принимать эту метафизику всерьез. Скептический читатель может тем не менее пользоваться ею как руководящим принципом при математическом исследовании структуры струнной теории.

Теперь я опишу некоторые работы, которые кажутся обещающими в этом отношении.

Для начала отметим, что реинтерпретация вычисления поляковской меры [1] показывает [3], что если взять точку пространства модулей M_g с алгебраическими координатами, то плотность данной меры по отношению к канонической будет равна обратному от архимедовой части функции, называемой высотой точки x.

Замечательное свойство высоты, совместимое с нашей философией, состоит в том, что она определяется как произведение множителей, соответствующих всем нормированиям поля, в котором лежат координаты точки x.

Я выдвигаю следующую гипотезу: *на пространстве адельных точек универсального пространства модулей можно определить адельную меру Полякова, архимедова компонента которой совпадает с обычной мерой Полякова; хочется надеяться, что соответствующий полный адельный объем будет вычислим как в* (3), (4) *и тем самым даст арифметическое выражение для струнной статистической суммы.*

Если эти надежды оправдаются, у нас будут некоторые основания говорить об адельных струнах. Разумеется, главное основание для веры в это — замечательное появление в теории струн алгебраических многообразий (пространства модулей) и мер на них (формы Мамфорда), инвариантно определенных над целыми числами, а не только над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Чтобы объяснить чуть подробнее, нам понадобится расширить картину, в рамках которой мы до сих пор работали. Теория чисел

изучает не только рациональные числа $\mathbb{Q}$, но и все алгебраические числа $\bar{\mathbb{Q}}$, т. е. корни многочленов с рациональными коэффициентами. Удобно работать с меньшими числовыми полями K, например с конечномерными $\mathbb{Q}$-подпространствами в $\bar{\mathbb{Q}}$, содержащими 1 и замкнутыми относительно умножения. Для каждого такого поля K можно доказать обобщение теоремы Островского, описывающее все нормирования поля K. Поскольку $\mathbb{Q} \subset K$, всякое такое нормирование w индуцирует на $\mathbb{Q}$ нормирование v, эквивалентное либо $|\cdot|_\infty$, либо какому-нибудь $|\cdot|_p$. Мы будем говорить, что w продолжает, или делит, нормирование v. Имеют место следующие факты: а) всякое нормирование поля $\mathbb{Q}$ продолжается до конечного числа нормирований поля K; б) нормирования, продолжающие $|\cdot|_\infty$, соответствуют различным вложениям K в комплексные числа. Коль скоро эта теорема доказана, можно определить w-адические числа K_w, адели A_K, идели J_K и другие объекты, которые мы ранее рассматривали «над $\mathbb{Q}$».

Пусть теперь у нас есть векторное пространство L над K, снабженное нормами $\|\cdot\|_w$ (по одной для каждого нормирования w на K) таким образом, что $\| al \|_w = |a|_w \| l \|_w$ при $a \in K$, $l \in L$, и $\| l \|_w = 1$ для почти всех w, если $l \neq 0$. Тогда можно определить высоту элемента $l \in L$ по формуле

$$h(l) = \prod_w \| l \|_w.$$

Из формулы произведения $\prod_w |a|_w = 1$ при $a \in K$ следует, что $h(l)$ зависит только от луча Kl в L, т. е. что высота — функция на проективном пространстве, ассоциированном с L.

Поскольку пространство модулей M_g по существу задается алгебраическими уравнениями с целыми коэффициентами, мы можем вложить M_g в такое проективное пространство. Если это вложение провести с помощью мамфордовских детерминантных векторных расслоений, то при этом получится высота, связанная с мерой Полякова.

Полная высота, в отличие от ее архимедовой части, определена только для точек с алгебраическими координатами, которые хоть и плотны в M_g, но с физической точки зрения не выглядят особенно привлекательными. Тем не менее, в недавней работе [8] было установлено, что именно эти точки появляются естественным образом как точки решетки в струнной схеме решеточного приближения.

Ситуация выглядит следующим образом. При струнном решеточном приближении риманова поверхность, т. е. струнный мировой лист с метрикой ds^2, заменяется на триангулированную метрическую поверхность, по существу задающуюся комбинаторными данными, состоящими, например, из списка вершин и длин дуг, соединяющих некоторые вершины. Это — двумерный аналог исчисления Редже в общей теории относительности.

Рассмотрим теперь компактную ориентированную поверхность, разбитую на равносторонние треугольники, у которых длины всех сторон равны 1 (если заменить эту длину на другую, конформный класс поверхности не изменится). Легко доказывается, что такая поверхность снабжена комплексной структурой, совместимой с метрикой (сначала надо удалить вершины, а затем продолжить получающуюся комплексную структуру, что возможно, так как сумма углов при каждой вершине равна $\pi n/3$ для некоторого целого n). Следовательно, такая поверхность задает точку на M_g. Основная теорема работы [8], которую предвидел Гротендик [0], утверждает, что таким образом мы получаем в точности все алгебраические точки. Стало быть, теоретико-числовая картина хорошо отражает комбинаторно-метрическую картину. Важная проблема — установить дальнейшие связи между этими двумя описаниями, в частности, вычислить высоту в метрических терминах.

Теперь мы переходим к заключительной части нашего обсуждения.

Наиболее широкие обобщения формулы Эйлера (1) связаны с вычислением адельного объема однородных пространств вида $H(A_K)/H(K)$, где H — полупростая алгебраическая группа, а K — алгебраически замкнутое поле (мы вкратце остановились на случае $H = SL_2$). Аналогичные вычисления для других типов алгебраических многообразий, например, для M_g, связаны с серьезными трудностями. Почему же тогда мы надеемся, что с M_g удастся работать арифметически?

Возможный выход замечательным образом связан с новым подходом к другому поразительному свойству поляковской статсуммы, а именно, с тем, что она по сути является разложением теории возмущений. Несколько авторов предложили работать не с M_g, а с чем-то вроде универсального пространства модулей $\bar{M}$, включающего в себя все M_g (и кое-что еще).

В работе [9], руководствуясь этой идеей и операторным подходом, я высказал гипотезу, что это $\bar{M}$ должно быть однородным пространством относительно алгебры Вирасоро.

Эта гипотеза была недавно доказана четырьмя группами авторов (см. работы [10]–[13]). Во всех этих работах используется одна и та же основная конструкция, принадлежащая Сато и Сегалу—Уилсону. В этой конструкции $\bar{M}$ является бесконечным грассманианом, а «модульная часть» пространства $\bar{M}$ параметризует тройки (X, p, z), где X — комплексная риманова поверхность, p — точка на X и z — локальная координата в этой точке. Если удастся определить непертурбативный фейнмановский интеграл как интеграл по $\bar{M}$, то он вполне может стать вычислимым арифметически. Для этого нам понадобится обобщение теории Тамагавы—Вейля на бесконечномерные группы, наподобие групп Каца—Муди и $GL(\infty)$. (Заметим в скобках, что $\mathrm{vol}(SL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{Z})) = \zeta(2)\ldots\zeta(n)$ имеет корректно определенный предел при $n\to\infty$. Можно ли получить его как объем при $n=\infty$?)

В заключение я очень кратко опишу некоторые вопросы, волнующие теоретико-числовиков, которые могут иметь отношение к программе арифметизации физики.

У теории чисел есть своя группа большого объединения: это группа Галуа $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, состоящая из всех перестановок алгебраических чисел, сохраняющих алгебраические соотношения между ними с рациональными коэффициентами. Это бесконечная топологическая группа «фрактального» типа; ее структура очень сложна и, в некотором смысле, содержит в себе всю арифметику (если учесть также некоторые канонические центральные расширения ее подгрупп — так называемые группы Вейля). Для иллюстрации этого утверждения отметим только, что ее максимальная абелева факторгруппа G^{ab} изоморфна $\prod_p \mathbb{Z}_p^*$, так что простые числа появляются вновь, совершенно неожиданным образом — по существу как образующие G^{ab}. При изучении представлений G и ее замкнутых подгрупп теоретико-числовик встречается с автоморфными и модулярными функциями почти так же (точнее говоря, двойственным образом), как физик, изучающий представления алгебр Каца—Муди и Вирасоро. Серия глубоких гипотез, принадлежащих Ленглендсу [14], связывает теорию представлений группы G с теорией представлений групп $H(A_K)$, через модулярные формы и их преобразования Меллина.

Я искренне надеюсь, что столь замечательные совпадения не являются простой случайностью.

В заключение хочу сказать, что я с удовольствием и гордостью посвящаю эту заметку Александру Гротендику, чьи прозрения оказали огромное влияние на математику, а сейчас начинают влиять и на физику.

Литература

0. *Grothendieck A.* Esquisse d'un programme. Preprint. 1984. Опубликовано в кн.: Geometric Galois actions, 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. P. 5—48.
1. *Manin Yu. I.* The partition function of the Polyakov string can be expressed in terms of theta functions // Phys. Lett. 1986. Vol. B172. P. 184—186.

2. *Faltings G.* Calculus on arithmetic surfaces // Ann. Math. 1984. Vol. 119. P. 387—424.
3. *Smit D.-J.* String theory and algebraic geometry of moduli spaces // Comm. Math. Phys. 1988. Vol. 114, № 4. P. 645—685.
4. *Mandelbrot B.* Fractals. San Francisco: Freeman, 1977.
5. *Koblitz N.* p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions. Heidelberg; Springer-Verlag, 1977. [Имеется русский перевод: *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982. 192 с.]
6. *Volovich I. V.* a) Number theory as the ultimate physical theory. Preprint CERN-TH 4781/87; b) *Волович И. В.* p-адическое пространство-время и теории струн // ТМФ. 1987. Т. 71, № 3. С. 337—340.
7. *Tate J.* Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions // Algebraic number theory / Ed. by J. W. S. Cassels, A. Frölich. Academic press, 1967. P. 305—347.
8. *Воеводский В. А., Шабат Г. Б.* Равносторонние триангуляции римановых поверхностей и кривые над полями алгебраических чисел. Препринт. 1987.
9. *Манин Ю. И.* Критические размерности в струнных теориях и дуализирующий пучок на пространстве модулей (супер)кривых // Функц. анализ. 1986. Т. 20, № 3. С. 88—89.
10. *Концевич, М. Л.* Алгебра Вирасоро и пространства Тейхмюллера // Функц. анализ. 1987. Vol. 21, № 2. P. 78—79.
11. *Beilinson A., Schechtman V. V.* Determinant bundles and Virasoro algebras // Comm. Math. Phys. 1988. Vol. 118, № 4. P. 651—701.
13. *Arbarello E., De Concini C., Kac V., Procesi C.* Moduli spaces of curves and representation theory // Comm. Math. Phys. 1988. Vol. 117. № 1. P. 1—36.
14. *Langlands R. P.* L-functions and automorphic representations // Proc. ICM 1978. Helsinki, 1980. Vol. 1. P. 165—176.
15. *Kneser M.* Semi-simple algebraic groups // Algebraic number theory / Ed. by J. W. S. Cassels, A. Frölich. Academic press, 1967. P. 250—265 [Русский перевод в кн.: Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрёлиха. М.: Мир, 1969. С. 347—396.]

Часть III

Из ненаписанного