Август 1992 г. Том 162, №8

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

539.12.01

ТЕОРИЯ СТРУН — ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

А.Ю. Морозов

(Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

Благополучно пройдя через периоды энтузиазма, неоправданных надежд и неизбежного разочарования, теория струн вступила в полосу спокойного развития и продолжает привлекать внимание теоретиков. Хотя струнная программа объединения фундаментальных взаимодействий отнюдь не утратила своей актуальности, все шире осознается, что она есть скорее приложение, чем содержание струнной теории. Многие, если не большинство, из задач, решаемых в этой области, имеют разве что косвенное отношение к проблемам физики элементарных частиц. Развитие ее все в большей степени диктуется своей внутренней логикой, а не потребностями того или иного приложения. Постепенно, как это и должно быть в полноценной теории, эта внутренняя логика, а не трудности альтернативных подходов, становится обоснованием струнного сценария объединения. Более того, следуя этой логике, в орбиту теории струн вовлекаются все более разнообразные области физики и математики, и это приводит к образованию новой несущей конструкции в здании современного естествознания, внося новые штрихи в наше понимание структуры и взаимосвязей различных наук.

Если пытаться кратко охарактеризовать предмет теории струн в его современном понимании, то придется признать, что это не столько конкретная теория или схема, сколько *большая совокупность идей и методов*, призванных дать широкое обобщение стандартного формализма квантовой теории поля и открыть для нее множество новых возможностей и приложений. В этом смысле теория струн — раздел математической физики, имеющий самостоятельную ценность, независимую от успеха конкретных попыток построить на ее основе модель того или иного физического явления. Здесь уместно вспомнить, что нередко наиболее плодотворными оказываются приложения математического формализма, о которых никто и не подозревал при его создании. Более того, даже идеи, казавшиеся главным источником разработки такого формализма, могут в итоге оказаться отброшенными как ложные (достаточно вспомнить идею эфира и ее роль в открытии уравнений Максвелла). По этим соображениям, на наш взгляд, не стоит преувеличивать, а тем более абсолютизировать значение тех или иных физических идей или сценариев, используемых в процессе создания струнной теории, в лучшем случае их придется еще не раз модифицировать, а в худшем — заменить на нечто совершенно непредвиденное. Значение подобных сценариев в том, что они указывают разумное направление мыслей и позволяют оценить относительную важность различных идей и соображений. Наличие такого рода критериев определяет ценность теоретической физики с точки зрения математики, — и теория струн с известным успехом играет свою роль в плане постановки новых математических задач, одновременно указывая возможные пути их решения.

Цель этих заметок — дать схематическое описание содержания современной теории струн, хотя бы в некоторой мере отражающее все многообразие вовлеченных в нее идей и предметов. Каждый пункт в этом перечне заслуживает написания отдельного большого обзора (в ряде случаев таковые уже существуют в литературе) и, по существу, является самозамкнутой отраслью знания.

Более того, специалисты во многих, из этих областей предпочитают вообще не пользоваться термином "теория струн". Это, однако, не может отменить тот факт, что существует точка зрения, позволяющая соединить все эти области в единое целое, и, как обычно, такой объединяющий подход не только интересен сам по себе, но и приносит конкретные плоды, полезные с точки зрения узких специалистов. (Для удобства при чтении статьи примечания автора печатаются петитом вслед за соответствующими местами текста. — *Ред.*)

Содержание обзора ограничено, с одной стороны, тем, что он посвящен только лишь зарождающейся области знания, где переоценки ценностей и смены вех, порою весьма кардинальные, происходят довольно часто, так что отбор материала и расстановка акцентов зависят не только от авторского произвола, но и от времени написания текста. С другой стороны, попытка охватить все содержание теории заставляет отказаться от любых подробностей, и все, что следует ниже, по смыслу и форме ближе всего к аннотированному оглавлению большой книги, написать которую вряд ли под силу одному человеку из-за слишком большого количества тем, в которых ему пришлось бы быть квалифицированным специалистом. В качестве неполноценной замены такой книги мы приводим некоторое количество ссылок на существующие книги и обзоры или на близкие по содержанию к обзорам оригинальные статьи, посвященные отдельным составляющим теории струн, а также краткий словарь специфических терминов, употребляемых в работах по теории струн (с. 135). Сам же данный текст, возможно, поможет приступающим к изучению предмета хоть как-то сориентироваться в океане статей и спекуляций, так или иначе связанных с этой популярной тематикой.

1. Зачем нужна теория струн

Возникновение теории струн в указанном выше широком смысле этого термина связано с необходимостью решения ряда задач, с завидным постоянством возникающих в различных разделах теоретической физики, и с осознанием того, что от необходимости решения этих задач вряд ли удастся уйти. Довольно условно эти задачи можно разделить на четыре класса:

А. Теория сильной связи и вообще теория нелинейных явлений. Для обозначения всего, что связано с нелинейными явлениями, в последние годы применяется слово "синергетика" [1]. По декларируемым целям синергетика весьма близка к теории струн, главное же отличие связано с существованием в последней более или менее конкретных методов анализа задач, за что, конечно, приходится платить меньшей универсальностью (хотя неизвестно, насколько существенными в конце концов окажутся эти ограничения). Чуть более конкретно: нелинейные явления, изучаемые в теории струн, выделены тем, что они обладают хотя бы некоторой, порою весьма неочевидной, симметрией: например, одно из достижений теории струн состоит в интерпретации ряда сложных нелинейных уравнений (в числе которых уравнения Эйнштейна и Янга—Миллса) как принципа симметрии некоторой квантовой теории поля (конформной симметрии двумерной сигма-модели) [2].

Вообще струнный подход к нелинейным задачам исходит из их кардинальной переформулировки в терминах, характерных для квантовой теории поля. Иногда такая переформулировка позволяет даже *решать* нелинейные уравнения (пример: теория "интегрируемых" систем [3 — 7]). Чаще же результатом является новый взгляд, выявляющий общие черты различных, на первый взгляд, задач, и установление новых критериев "близости" и "эквивалентности". Вообще, основным "выходом" будущей теории струн, по-видимому, станет теория классов универсальности, фрагментами которой являются современные "теория катастроф" [8 — 10] и теория фазовых переходов [11]. Последняя, точнее — задача о классификации фазовых переходов в 2- и 3-мерных системах, — один из непосредственных источников происхождения двух важных разделов струнной теории: науки о 2-мерных конформных моделях и исчисления случайных поверхностей.

Говоря о струнах в контексте проблемы сильной связи нельзя не упомянуть и "наивного" соотношения между ними: бывает, что в режиме сильной связи истинные возбуждения ("квазичастицы") устроены как одномерные натянутые нити. Более того, такая ситуация весьма обычна в нашем мире, что напрямую связано с трехмерностью пространства. Самый знаменитый пример такого рода — квантовая хромодинамика [12] — теория сильных взаимодействий: уместно вспомнить, что именно этой задаче теория струн обязана своим появлением на свет [13 — 17]. Мы еще будем иметь случай обсудить эти "наивные" проблемы чуть более подробно.

Б. Теория систем со многими фазами и межфазовыми флуктуациями. Этот круг проблем имеет тесною связь с предыдущим. В самом деле, проблема сильной связи, по крайней мере в тех случаях, когда мы умеем или хотя бы догадываемся, как се решать, сводится к нахождению точки зрения, с которой исследуемая система выглядит как слабо взаимодействующая. В физических терминах это означает, что в сильно взаимодействующей системе выделяются коллективные состояния (возбуждения, квазичастицы), взаимодействие которых друг с другом относительно невелико. На формальном языке речь идет о замене переменных, превращающих систему уравнений в линейную ("интегрируемый" случай) или слабо нелинейную. В последнем случае изменение параметров системы может снова превратить слабо нелинейную систему в сильно нелинейную; другими словами, в некоторой области изменения параметров взаимодействие квазичастиц вновь оказывается сильным. Тогда возникает необходимость в поиске других коллективных переменных, других квазичастиц, адекватных описанию этой области в пространстве параметров. Такая смена одного набора квазичастиц другим составляет основное содержание учения о фазовых состояниях и переходах между ними. Классический раздел теоретической физики, посвященный этому учению (статистическая физика), однако, ограничивается простыми ситуациями, когда у системы мало различных фазовых состояний, а переходы между ними достаточно отчетливы. В последнее время, однако, все больший интерес вызывают задачи, в которых дело обстоит более сложно. Прежде всего, открыты интереснейшие физические системы, в которых число фаз неограниченно велико; более того, велики и флуктуации между различными фазами, и содержательные классы универсальности для них должны определяться из каких-то иных соображений. Наиболее известные из таких систем — спиновые стекла и нейронные сети [18 — 20],

Собственно, сюда следует отнести любые аморфные состояния. Эволюцию аморфной среды можно рассматривать как прохождение через последовательность практически идентичных метастабильных фаз, не разделенных ни потенциальными барьерами, ни различием симметрии, ни какими-либо иными качественными характеристиками. Подчеркнем в этой связи, что хотя часто говорят об "аморфной фазе" или о "фазе спинового стекла" как о чем-то едином, они фактически являются наборами бесконечного числа фаз с различными конфигурациями фоновых полей.

Второй класс задач восходит к формальной статистической физике, изучающей соотношение между микро- и макроскопическим описанием. Понятие о фазах — это, разумеется, типично статистическое, приближенное понятие. В одной фазе всегда существуют флуктуации (квантовые ли, температурные ли), связанные с образованием виртуальных зародышей других фаз. Поэтому любая *точно* определенная величина в одной какой-то фазе неизбежно несет в себе информацию и о всех остальных фазах, и только в определенном приближении ею можно пренебречь. Дискуссии о роли и важности такой информации периодически вспыхивают по самым разным поводам (к этому кругу вопросов относятся, в частности, задачи о рассеянии на когерентных состояниях, вопрос о "точной ренормгруппе" и многие другие). Еще одну ситуацию (объединение взаимодействий), в которой необходимо изучать многофазные системы, мы обсудим несколько позже, в пункте В.

Подход к многофазным системам, подразумеваемый теорией струн, основан на уже упоминавшейся переформулировке различных нелинейных уравнений (например, уравнений состояния в различных фазах) в новых терминах, сглаживающих такие существенные различия между фазами и уравнениями, как число переменных, порядок и число уравнений, даже размерность пространства, в котором они записаны. После подобной переформулировки открывается возможность плавной интерполяции между совершенно разными типами уравнений, т.е. в точности то, что требуется при описании непрерывного перехода из одной фазы в другую. Сразу же следует сказать, что до практического использования открывающихся в этом направлении возможностей дело пока не дошло, изучение таких приложений теории струн только начинается.

В. Объединение фундаментальных взаимодействий. Эта проблема заслуживает отдельного обсуждения уже из-за своей особой роли в естествознании, но мы тем более не можем обойти ее вниманием, поскольку создание единой теории всех фундаментальных взаимодействий ("теории всего") — самый амбициозный из проектов, связанных со струнами [21, 22]. Фактически имеется целых два проекта, а не один, которые не исключают, а, скорее, дополняют друг друга. Однако каждый сценарий имеет смысл и сам по себе, и если один будет, в конце концов, признан неудачным, это не приведет к автоматическому исключению второго.

Первый сценарий, который можно считать наивным и прямолинейным приложением теории струн к проблеме объединения взаимодействий, приписывает струнам фундаментальную природу — элементарными объектами предполагается считать не точечные частицы, а одномерные протяженные объекты. С точки зрения стандартной теории элементарных частиц это равносильно гипотезе о существовании бесконечно большого многообразия частиц с определенным образом упорядоченными спектром масс, спинами и структурой взаимодействий. Замечательным образом такая гипотеза не только не приводит к противоречиям с существующими экспериментальными данными (большинство дополнительно введенных частиц имеет очень большие массы и практически ненаблюдаемо), она не ухудшает и "качества" теории как квантовой теории поля, несмотря на введение новой бесконечности (бесконечного числа частиц). Более того, такой ценой удается исходную теорию улучшить — новая бесконечность способна побороть старые ультрафиолетовые расходимости! Мало того, что на этом пути можно построить перенормируемую теорию квантовой гравитации, оказывается принципиально возможным отказаться и от самого (отравившего жизнь многим поколениям теоретиков) принципа перенормируемости — открывается возможность построить *конечную* фундаментальную теорию. Приятно также, что в рамках такого подхода находят естественное развитие идеи Калуцы—Клейна [23 — 26], позволяющие закодировать всю структуру модели объединения (калибровочные симметрии, состав полей, константы связи) в геометрических и даже топологических свойствах некоторого многообразия (это известно как формализм "компактификации"). Главным же недостатком, унаследованным, впрочем, от любых "дострунных" подходов к объединению взаимодействий, является отсутствие селективности: струнных моделей объединения оказывается ничуть не меньше, чем обычных, — сохраняется практически неограниченный произвол в выборе калибровочной группы, состава (струнных) полей и т.д. С другой стороны, основным стимулом поиска Великого объединения [27 — 32] является вера в существование истинно фундаментальной, единственно правильной "теории всего", свободной от какого-то ни было произвола (хотя с этим могут не согласиться, например, приверженцы антропного принципа [37]).

Обычная надежда "моделестроителей", занимающихся теорий объединения, состоит в том, что многие модели представляются им внутренне противоречивыми, например имеют аномалии [34, 35], или неперенормируемы, или страдают от проблемы "нуль-заряда" [36] и т.п. Более того, на некоторых этапах развития казалось, что придумать нетривиальную непротиворечивую теорию, которая содержала бы и стандартную модель, и квантовую гравитацию, просто невозможно, ну а если уж как-то и удастся, то вряд ли таких теорий будет слишком много.

Именно в такой ситуации возник "струнный бум" 1984 г., когда выяснилась обреченность синтеза теории Калуцы—Клейна с (D = 11)-супергравитацией (основного в то время претендента на роль "теории всего") и почти одновременно стало известно [37, 38], что существует некоторая струнная

модель ("$E_8 \times E_8$-суперструна" [38]), пригодная для роли непротиворечивой модели объединения [39]. Модель эта была выделена из известного в то время множества струнных теорий критериями безаномальности и конечности. Как это не раз случалось и в дострунную эпоху, дальнейший ход событий показал, что то, что в начальный момент казалось неодолимой патологией альтернативных теорий, на самом деле является патологией конкретного формализма, использовавшегося при их анализе (в частности, сегодня вряд ли надо убеждать теоретиков в существовании непротиворечивых теорий с аномалиями; *конечные* же модели в теории струн тоже, по-видимому, не очень большая редкость). Кроме того, неизмеримо возросло и число альтернативных струнных моделей (в том числе безаномальных и конечных). Тем самым взамен уникальной непротиворечивой модели получилось целое многообразие — порочная цепь не оборвалась на наивном струнном сценарии. Последняя надежда, которая остается у его приверженцев, — пока не проведенный до конца анализ непертурбативного поведения струн, который может выявить новые непредвиденные патологии большинства из остающихся моделей. Надежда эта кажется призрачной уже из общих соображений, но, хуже того, — она вряд ли согласуется даже с тем немногим, что уже известно о непертурбативной теории струн: как мы увидим, все свидетельствует скорее в пользу второго, "*не*наивного" сценария. В нем использованы идеи, возникшие никак не позже, чем предыдущий сценарий. Очевидно, альтернатива попыткам идентифицировать "теорию всего" с "единственной непротиворечивой" моделью квантовой теории поля или теории струн — это ее отождествление с каким-то *объединением* всех таких моделей. Иными словами, различные модели могут интерпретироваться как отвечающие различным *фазам* единой теории. (Возможно, имеет смысл упомянуть, как аналог подобного подхода в несколько ином контексте, концепцию "адронной демократии", или бутстрапа. Отметим заодно, что разработанный для более узких целей формализм "конформного бутстрапа" является даже весьма эффективной техникой вычислений.) Нелишне заметить также, что реализация подобной идеи об априорном равноправии всех мыслимых моделей теории поля (или теории струн) придала бы названиям "теория всего" и особенно "единая теория поля" совершенно буквальный смысл.

На практике оеализация такого сценария требует прежде всего единообразного описания самых разных моделей и погружения их в какое-то единое "конфигурационное" (или "фазовое") пространство "единой теории поля". Следующим шаром должно явиться задание какой-то динамики на этом пространстве. Наконец, эта динамика должна привести к выделенности отдельных точек (фаз) в этом конфигурационном пространстве в определенных условиях (например, при "низких энергиях"). Иными словами, в таком сценарии предполагается снабдить "теорию всего" сложной фазовой структурой, а конкретные известные нам свойства мироздания интерпретировать как следствие динамического отбора одной из многих a priori мыслимых моделей квантовой теории поля. Теория струн доставляет, по крайней мере, принципиальную возможность реализации подобного сценария [40, 41], хотя от этой возможности до практической реализации еще очень далеко (не говоря уже о том, что в ходе работы сам сценарий может сильно измениться). Замечательно, однако, что известно уже косвенное указание на адекватность подобных идей формализму теории струн: оказывается, что в непертурбативной области естественно происходит объединение ряда струнных моделей, различавшихся на пертурбативном уровне (так и должно быть, согласно нашему сценарию: если разные модели объединены в единое целое, то квантовые флуктуации, возможно, непертурбативные, обязаны их перемешивать).

Было бы преувеличением сказать, что второй сценарий (в отличие от первого) привлекает большое внимание теоретиков, но он, во-первых, существует, а во-вторых, больше отвечает самой природе теории струн, и популярность его (или какой-то модификации) среди тех, кто этой теорией занимается, наверняка будет возрастать.

Г. Квантование алгебро-геометрических структур. В физике актуальность таких проблем определяется задачей о квантовой гравитации. Хотя никакого серьезного оправдания стремлению совместить общую теорию относительности с квантовой механикой пока неизвестно, внимание к этой проблеме не ослабевает. Фактически в большинстве предпринимаемых попыток парадигма квантовой механики считается более ценной, чем идея о геометрии пространства-времени.

Вместо этой конкретной идеи считается важным ориентироваться на общий философский принцип Эйнштейна: правильность фундаментальной теории в значительной степени определяется ее математической красотой. От нее, несомненно, ждут алгебро-геометрического изящества, но не требуют, чтобы оно обязательно выразилось в терминах 4-мерной римановой геометрии.

В этом смысле струнный сценарий не является исключением; более того, в нем само пространство-время является не более чем эффективным объектом, возникающим в определенных обстоятельствах. Это свойство, видимо, следует считать естественным для любой теории, призванной описать все предполагаемые прелести квантовой гравитации, включая флуктуации с изменением топологии. Замечательно, что связь геометрии и динамики в теории струн становится еще более тесной и что естественным оказывается появление полей Янга—Миллса и их глубокая связь с гравитацией.

В совсем иной плоскости лежит связь струн и гравитации, продиктованная особой ролью *двумерной* гравитации в теории струн. Двумерная гравитация замечательна тем, что она всецело квантовая, и изучение ее (неизбежное при построении теории струн) проливает некоторый свет на то, как устроена квантовая гравитация вообще.

Наконец, нельзя не упомянуть математическую сторону дела. Многие струнные модели имеют богатые алгебраические и геометрические свойства. Фактически с любым алгебро-геометрическим объектом можно связать специальную струнную модель.

Если это многообразие с заданной метрикой, то по нему строится сигма-модель; если задана только топология, то — топологическая модель; если задано нечто промежуточное, скажем, комплексная структура, то надо анализировать только инстантонные флуктуации на мировом листе. Аналогично с алгеброй Ли ассоциируются струнные модели, для которых она является либо глобальной симметрии, либо киральной алгеброй, либо *полной* алгеброй симметрии, и т.п.

С другой стороны, теория струн — это квантовая теория, поэтому неудивительно, что во многих случаях исходная алгебро-геометрическая структура оказывается деформированной при учете флуктуаций и/или взаимодействий струн. На этом пути возникает естественное описание (или определение) квантовых групп, квантовых пространств и других объектов, представляющих большой интерес для современной математики. Выделенность теории струн среди других физических теорий в этом плане состоит в возможности, с одной стороны, просто связать самые разнообразные алгебро-геометрические объекты с динамикой (формой двумерного действия) каких-то струнных моделей, а с другой стороны, надежно оценить результат струнных взаимодействий —

большинство из задач теории струн допускает исчерпывающее решение за вполне конечное время.

Итак, мы попытались объяснить, кто и зачем мог бы интересоваться теорией струн и какого сорта результаты можно было бы, по-крайней мере в принципе, из нее извлечь. Теперь остается (еще более бегло) описать составные части этой теории и указать места, в которых следовало бы искать ответы на те или иные конкретные вопросы. Мы приведем это описание, следуя в основном историческому развитию, с тем, чтобы сделать более наглядной его внутреннюю логику. В какой-то степени понимание этой логики позволяет угадать направление дальнейшего движения, а прошлый опыт показывает, что нетривиальные задачи, диктуемые струнной программой, обычно находят свое решение, причем достаточно глубокое для того, чтобы породить новые проблемы, чье решение породит... Мы не знаем, сколь долго еще протянется эта счастливая цепочка и не оборвется ли она прежде, чем все вооружение обретет какие-то признаки завершенности, но пока что удача сопутствовала теории струн...

2. Струны как квазичастицы

Мы начнем с перечня ситуаций, в которых струны возникают "сами по себе", независимо от нашего желания и воли. Уже само существование подобных ситуаций делает необходимым построение и изучение теории струн, поэтому естественно предпослать их описание как более спекулятивным сценариям с участием струн в роли фундаментальных объектов, так и изложению формализма теории.

Струна в самом наивном смысле слова — это одномерный протяженный объект с натяжением, т.е. энергия   его растет с длиной L, $\partial \quad /\partial L > 0$. Струна из музыкальных инструментов (нерелятивистская струна), давшая свое имя всему предмету, имеет закон "дисперсии"

$$\mathscr{E} = \mathrm{const} + kL^2,$$

который для малых колебаний превращается в линейный, $\Delta \quad \sim \Delta L$, но, переписанный в терминах амплитуды A малых *поперечных* колебаний, снова становится квадратичным: $\Delta \quad \sim A^2$. Конечно, в теории музыкальных струн нас вряд ли ждет много неожиданностей, но не упомянуть их для полноты картины было бы нельзя. Другой важный пример нерелятивистских струн — полимеры, в том числе белковые молекулы.

Несколько более интересно появление струн в роли устойчивых квазичастиц, а также при изучении нетривиальных фазовых состояний и, в частности, при нарушениях симметрии. Возникновение струн в такой ситуации не только не редкость, а скорее закономерность: среди самых известных примеров вихри (смерчи) в ламинарных потоках, линии дислокации в кристаллических решетках, абрикосовские нити в сверхпроводниках, дираковские нити, связанные с монополями в калибровочных теориях, "космические струны" в разнообразных моделях со специфическим хигтсовским сектором и т.п. Причиной распространенности струноподобных образований в теориях, имеющих отношение к нашему миру, является *трехмерность* пространства. Чтобы ответить на вопрос, как устроены простейшие топологически устойчивые квазичастицы, надо знать, что следует выбросить из $\mathbf{R}^3$, чтобы сделать его неодносвязным. Ответ очевиден: *одномерные* линии. Это означает, что по-крайней мере в тех ситуациях, где имеется характеристика ("параметр порядка"), принимающая значения в *окружности,* можно гарантировать существование стабильных *струноподобных* квазичастиц.

Чаще всего это фаза фермионного поля или элемент группы U(1). Не для всех из приведенных выше примеров квазичастиц очевидно, как они укладываются в эту схему (например, вихри в жидкостях и пр.). Более универсальным критерием может показаться наличие переменных, подчиненных уравнению

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0.$$

Но на практике решение этого уравнения представляется в виде

$$\mathbf{A} = G^{-1}\mathrm{grad}\, G,$$

где G — элемент компактной U(l).

Более того, в подобных ситуациях очевидно, что энергия квазичастицы прямо пропорциональна ее длине: $\mathscr{E} \sim L$; это следует из равноправности всех фрагментов линии — постоянства плотности энергии. Такой закон дисперсии характерен для "релятивистских" струн, и мы видим, что релятивистские струны естественно возникают в совершенно нерелятивистских системах. *Динамика* струн, как и любых иных механических объектов, определяется не столько энергий, сколько действием — интегральной характеристикой мировой *двумерной* поверхности, заметаемой *одномерной* струной в процессе движения. Получить некоторое представление о форме действия можно, проинтегрировав энергию по времени, и уже на этом основании легко сообразить, что закон дисперсии $\mathscr{E} \sim L$ подразумевает, что действие окажется пропорциональным площади мировой поверхности, $\mathscr{A} \sim S$. Такая формула явно означает равноправие двух измерений — временного и пространственного — на мировой поверхности, — именно это является источником термина "релятивистская струна".

Собственно теория струн начинается с изучения квантовых релятивистских струн. Мы уже выяснили происхождение "релятивизма", теперь надо заняться квантованием. Разумеется, можно просто сказать, что нас интересует квантовая механика упомянутых выше квазичастиц. Тогда мы естественно придем к задаче о вычислении интеграла по их траекториям — (случайном) мировым поверхностям, взятых с весами $e^{i\mathscr{A}/h} = e^{i\beta S}$. Правда, в приведенных выше примерах эта задача представляет разве что академический интерес — квантовые эффекты в указанных ситуациях не слишком существенны. В них гораздо более важны другие — температурные — флуктуации, но, как известно, с формальной точки зрения разница между квантовыми и температурными флуктуациями практически отсутствует, достаточно заменить мнимую экспоненту в функциональном интеграле на вещественную.

Вернемся теперь на шаг и заметим, что помимо решения "уравнения" "$\mathbf{R}_3$ –? = неодносвязно" представляет интерес и ответ на вопрос "$\mathbf{R}^3$ – ? = = несвязно". Этот вопрос связан, например, с разделом различных фаз. Ответом на него, естественно, является "? = двумерная поверхность" — в трехмерном мире фазы разделены поверхностями. В *двумерном* мире $\mathbf{R}^2$ фазы разделялись бы линиями. Изучение этих линий полезно хотя бы потому, что в системах с фазовыми переходами второго рода плотности энергий различных фаз совпадают, и вся свободная энергия системы оказывается связанной с линиями фазового раздела. Более того, в системе с близкодействием энергия просто концентрируется вблизи линии раздела и фактически пропорциональна ее длине, т.е. мы возвращается к знакомому соотношению $\mathscr{E} \sim L$. Вычисление статсуммы теории после этого сводится к суммированию по произвольному (случайному) расположению линий раздела фаз с весами $e^{-\beta L}$ (в зависимости от конкретной модели следует разрешить или запретить самопересечения линий). Классический пример такой задачи — модель Изинга — одна из самых популярных моделей, рассматриваемых по разным поводам в теории струн. Возвращаясь к *трехмерному* миру $\mathbf{R}^3$, мы получим *поверхности* раздела, свободные энергии, пропорциональные площади, и суммы по случайным поверхностям с весами $e^{-\beta S}$.

Таким образом, задача о вычислении $\Sigma e^{-\beta L}$ возникает при изучении: 1) термодинамики (2 + 1)-мерных многофазных систем; 2) квантовой механики или термодинамики (релятивистских) точечных частиц. Из-за пункта 2) этот круг вопросов относится к ведению теории частиц, т.е. решается методами обычной квантовой теории поля. Аналогичным образом, задача о нахождении $\Sigma e^{-\beta S}$ связана с изучением 1) термодинамики (3 + 1)-мерных многофазных систем и 2) квантовой механики (термодинамики) релятивистских струн. Уже в этом смысле теория струн обобщает теорию частиц и обычную квантовую теорию поля (КТП).

В принципе иерархия может быть продолжена: имеет смысл стремиться к созданию теории мембран ((2 + 1)-мерных объектов) и общей теории p-бран ((p + 1)-мерных систем). Отметим, что в такой схеме обычный подход к исследованию нашего мира путем анализа (3 + 1)-мерных полевых теорий попадает в пункт 2) для 3-бран. Сила теории струн, однако, в наличии дополнительных возможностей: кое-какие вопросы из следующих уровней иерархии можно пытаться решить и на более низких уровнях. В частности, в следующих разделах мы еще вернемся к вопросу об исследовании весьма общих (p + 1)-мерных моделей КТП в терминах *струн*, а не p-бран. Такая возможность неудивительна: в принципе, любая локальная к ТП может быть описана и на языке точечных частиц — такое описание известно как формализм первичного квантования (или, что то же самое, техника фейнмановских диаграмм) , однако оно не слишком эффективно, за исключением некоторых специальных (хотя и очень важных!) случаев, когда можно ограничиться анализом пертурбативного режима. Замечательным образом эффективность такого формализма резко возрастает при переходе от частиц к струнам. Еще более замечательно, что этот формализм может по-прежнему быть применен к изучению обычных локальных КТП. Нетрудно поверить, что при переходе от струн к p-бранам с $p > 1$ сложности снова возрастают, и струны тем самым оказываются как бы "золотой серединой" — формализм уже достаточно сложен и богат, чтобы адекватно отразить важные черты изучаемых моделей, но еще достаточно прост, чтобы быть работоспособным.

Прежде чем перейти к следующим сюжетам, приведем еще несколько задач, в которых естественно возникают либо сами струны, либо какие-то иные важные объекты из теории струн. Начнем с того, что, обсуждая выше появление струн в роли квазичастиц, мы фактически ограничились "случаем общего положения", когда их выход на сцену диктуется надежными топологическими причинами.

Бывают, однако, и более сложные, а значит, и интересные мотивы — динамические. Самый важный пример здесь — фаза конфайнмента в (3 + 1)-мерных неабелевых калибровочных теориях, в том числе в КХД. В этой фазе силовые линии калибровочного поля за счет взаимного притяжения сжимаются в узкие трубки с практически постоянной линейной плотностью энергии, т.е. в качестве квазичастиц (адронов, если пользоваться языком КХД) в этой фазе возникают релятивистские струны. Во многом они напоминают абрикосовские нити в сверхпроводнике, но источник их возникновения на этот раз динамический: нельзя, как это делается в сверхпроводящей (хиггсовской) фазе, выделить промежуточный этап — образование конденсатов, приводящих к спонтанному "нарушению" калибровочной симметрии, а затем уже, по топологическим соображения, и к существованию струноподобных квазичастиц. В силу этой своей динамической природы, во-первых, струны в фазе конфайнмента существенно квантовые, а во-вторых, "толщина" их, регулирующая точность описания на языке теории струн, не является независимым параметром.

Второе обстоятельство — одна из главных трудностей применения теории струн в фазе конфайнмента: легко описываются только достаточно длинные (возбужденные) струны — адроны с высокими спинами и массами. Задача о струнах-адронах в КХД — это не просто пример применения теории струн к описанию режима сильной связи (которым является фаза конфайнмента с точки зрения янг-миллсовской формулировки КХД); это — задача, с которой теория струн начала свою жизнь. Попытка сформулировать КХД (теорию сильных взаимодействий) в терминах струн (так называемых дуально-резонансных моделей [13 — 17]) на несколько лет опередила формулировку в терминах полей Янга—Миллса.

В этом разделе уже упоминались статистические системы, их разные фазы и переходы между ними, особенно ситуации с фазовыми переходами второго рода. У переходов второго рода есть еще одна неожиданная связь с теорией струн. Дело в том, что в моменты таких переходов радиус корреляции обращается в бесконечность, и любые системы в точках фазового перехода второго рода приобретают дополнительную симметрию — конформную.

Конформная симметрия богата (бесконечномерна) лишь в дву(и одно)-мерной ситуации, и класс конформных теорий хорошо выделяется на фоне всевозможных 2-мерных моделей КТП. Более того, из-за бесконечного радиуса корреляции конформные статистические системы, как правило, a priori заданные на решетках, а не в непрерывном пространстве $\mathbf{R}^2$, прекрасно описываются в терминах *локальной* КТП. Задача о фазовых переходах второго рода в (2 + 1)-мерных системах, или, что то же, о двумерных конформных теориях, является одной из классических в современной теоретической физике, и про нее известно достаточно многое. С другой стороны, 2-мерные конформные теории — один из центральных объектов теории струн: в ней конформные модели задают форму действия струны на мировом листе (которое в простейшей ситуации, для бозонной струны, было просто площадью поверхности).

Особого упоминания, коль скоро зашла речь о двумерных статистических системах (т.е. физике тонких пленок), заслуживают теория квантового эффекта Холла и тесно связанная с нею теория анионов. По крайней мере, в первом случае имеет смысл описание в терминах многих фаз, переходы между которыми (переходы деконфайнмента) связаны, как обычно, с восстановлением конформной инвариантности. Особый интерес и известные трудности здесь представляет выход за пределы статического приближения, что описывается с помощью (2 + 1)-мерной модели Черна—Саймонса — еще одного важного персонажа теории струн. Этот круг проблем привлекает большое внимание из-за существования ярких качественных эффектов типа квантования холловской проводимости [42 — 44] и анионной сверхпроводимости [45].

Перечислим еще несколько разделов теоретической физики, ждущих своей (наверняка существующей) переформулировки в терминах теории струн. Прежде всего это теория полимеров и биологических мембран. В принципе, теория струн, в которой принято населять нити и поверхности всякими дополнительными объектами и изучать, что из этого получается, как будто специально создана для подобных приложений, однако серьезных попыток в этом направлении пока не предпринималось. Другой круг вопросов — теория хаоса [46 — 48]. Популярны усилия построить такую теорию на языке учения о фракталах [49], которое, в свою очередь, очень близко к квантовой гравитации, а значит, и к теории струн. Выяснение этих связей пойдет во многом параллельно исследованию параллелей между хаосом и квантовой теорией, что, собственно, составляет одну из главных задач исследователей хаоса. В определенной связи с предыдущими находятся уже упоминавшиеся проблемы многофазных систем типа спиновых стекол и нейронных сетей [18 — 20]. Хотя конкретная их связь с теорией струн пока неясна, отдельные параллели (например, *P*-адический формализм [18, 50, 51]) впечатляют.

Вообще, в перспективе теория струн может оказаться полезной для перевода самых разнообразных задач дискретной математики на язык непрерывной (аналитический) и наоборот. Первым успехом на этом пути была, конечно, сама квантовая механика, допускающая две эквивалентные формулировки — матричную (дискретную) и функциональную (непрерывную), лучшим выражением которой стал интеграл по путям Винера—Дирака—Фейнмана [52]. С этой точки зрения достижение теории струн состоит в предложении рассмотреть более богатый класс интегралов по путям — интегралы по случайным поверхностям (а не только линиям) — и тем самым резко расширить спектр задач, допускающих формулировку в таких терминах. Поскольку важность (и сложность) создания эффективной дискретной математики для дальнейшего прогресса естествознания (особенно в сферах биологии и искусственного интеллекта) вряд ли вызывает сомнения, одна эта перспектива способна поддержать интерес к теории струн.

На этом мы прервем рассказ о струнах, которые возникают "сами по себе" — в задачах, a priori не имеющих никакого к струнам отношения. Как мы видели, список таких задач не так уж мал. Перейдем теперь на более спекулятивный уровень — поговорим о *фундаментальных* струнах. В отличие от обсуждавшихся выше, фундаментальные струны — чисто гипотетический объект, и основания для гипотезы об их существовании чисто умозрительные. Более того, появление экспериментальных оснований в обозримом будущем даже не предполагается; лучшее, на что можно надеяться, — весьма косвенные свидетельства, которые, даже если и обнаружатся (что тоже не слишком вероятно) , вряд ли будут иметь доказательную силу. Сколь ни печальным является это обстоятельство, оно имеет слишком ясные причины: достижение поистине интересной (планковской) энергетической области, в которой только и могут в полной мере проявиться квантовые свойства гравитации, нашей цивилизации пока не по плечу (при традиционном подходе это потребует увеличения возможностей современных ускорителей на 16 порядков). Некоторым утешением может служить то, что мы еще не знаем вполне, что вышло бы, достигни мы этой области на практике: не стоит забывать, что в подобных условиях рождалась наша Вселенная, и кто знает, к чему приведет попытка эти условия воспроизвести.

Мысль об опасности подобных экспериментов неоднократно подчеркивалась Л.Б. Окунем в связи с обсуждением задачи о катализе распада ложного вакуума.

Так что не только недостаток материальных средств, но и здравый смысл заставляет в ближайшие десятилетия полагаться на силу разума, а не эксперимента при обсуждении основ мироздания. Пока что гипотеза о фундаментальных струнах — лучшее, что породил разум для этих целей, и нам не остается ничего иного, как перейти к описанию этой гипотезы.

3. Фундаментальные струны как модель фундаментальных взаимодействий

Разработка струнных сценариев объединения фундаментальных взаимодействий (электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного) вызвана, конечно, определенными проблемами более традиционных подходов. Чтобы понять эти проблемы, полезно вспомнить, что́ вообще известно о фундаментальных взаимодействиях. Мы знаем, что первые три из них (исключая гравитационное) замечательно описываются стандартной моделью [12, 27 — 32] — соединением модели Глэшоу—Вайнберга—Салама (ГВС) и квантовой хромодинамики (КХД).

Мы не будем вдаваться в обсуждение трудностей и неясностей стандартной модели. Упомянем лишь, что они бывают трех типов. Во-первых, в КХД есть проблема конфайнмента. Здесь слово "проблема" надо толковать как "задача": есть сложная задача об описании режима сильной связи, но ее нерешенность (или неполная решенность) ни в коей мере не ставит под сомнение адекватность КХД как теории сильных взаимодействий. Во-вторых, в модели ГВС есть проблема хиггсовского сектора: неясно, какой из многих возможных способов его устройства следует предпочесть. Мы не склонны считать это серьезной проблемой в том смысле, что будущие эксперименты отберут какую-то из этих предвидимых (и даже в известной мере *просчитанных*) возможностей, и вряд ли мы будем особенно удивлены этим выбором: мы все равно не понимаем, чем надо руководствоваться, чтобы предпочесть одну из многих альтернатив (фундаментальный или составной хиггсовский бозон или бозоны; если фундаментальный, то образует ли он супермультиплет с каким-нибудь из известных фермионов; если составной, то — из сильно взаимодействующих W- и Z-бозонов или из новых фундаментальных частиц и т.п.). Что, может быть, важнее — мы и не надеемся все это понять, не выйдя за рамки идей, заложенных в формулировку стандартной модели. В-третьих, в ГВС существует проблема нуль-заряда. Строго говоря, это тоже проблема сильной связи, но, в отличие от ситуации с конфайнментом, у нас нет уверенности, что она каким-то образом разрешается с учетом непертурбативных эффектов. Более дешевый (и почти наверняка правильный) выход из положения связан с гипотезой о Великом объединении — интерпретации стандартной модели как результата спонтанного нарушения более широкой калибровочной симметрии с простой калибровочной группой, например SU(5), SO(10) или даже $E_8 \times E_8$. Идея Великого объединения, правда, приносит новую "проблему" — так называемую проблему иерархии [22, 32], которая, в свою очередь, разрешается введением суперсимметрии. У сценария великого суперобъединения, по-видимому, проблем указанного характера уже нет, имеются даже косвенные экспериментальные свидетельства в его пользу (например, "удачное" соотношение между измеренными значениями констант трех взаимодействий [53] и высокая стабильность протона).

Про гравитацию мы знаем только, что есть *классическая* гравитация — общая теория относительности (ОТО) с действием Эйнштейна—Гильберта

$$M^2_{\mathrm{H}}\int \mathcal{R}\, \mathrm{d}^4x$$

и что наши экспериментальные возможности не позволяют наблюдать ни эффектов квантовой гравитации, ни поправки к действию типа

$$\int \mathcal{R}^2 \mathrm{d}^4x,$$

даже если они существуют. Иными словами, с точки зрения обычного физического метода царит полная гармония: имеющаяся теория соответствует имеющемуся эксперименту. Надо ждать новых экспериментов и надеяться, что они разойдутся с теорией: тогда появится необходимость теорию подправлять, и возникнет новая работа для теоретиков. Можно даже не ждать экспериментов, а заранее подумать, какие поправки *могут* потребоваться. Существует определенная уверенность, что все эти поправки сведутся к каким-то изменениям калибровочной группы, состава полей, введению новых иерархий масштабов нарушения симметрии.

С несколько меньшей уверенностью можно высказать более конкретную гипотезу, что место стандартной модели на более фундаментальном уровне займет какая-то суперсимметричная (?) модель Великого объединения. Нельзя пока совсем исключить и альтернативный вариант, что все или большинство полей стандартной модели окажутся чем-то типа адронов, составленных из полей какой-то иной более фундаментальной модели с конфайнментом. Можно даже предположить, что имеется целая иерархия таких моделей: при недостатке информации разрешенных вариантов великое множество. Важно, однако, что все эти прогнозируемые модификации не несут с собой никаких кардинально новых идей: они не выводят нас из класса *перенормируемых калибровочных* моделей, и это не случайно: перенормируемость — это максимум, что можно потребовать от *локальной* $(3+1)$-мерной теории, но и она недостижима (в виду наличия векторных бозонов) без калибровочной симметрии [27, 12].

На сегодня известен лишь один пример теории, которая, видимо, лучше перенормируемых: совсем свободна от ультрафиолетовых расходимостей $(N=4)$-суперсимметричная модель Янга—Миллса [54]. Построить с ее помощью хоть что-нибудь, совместное со стандартной моделью, по-видимому, не удается. Отметим символичную подробность: эта во многих отношениях замечательная $(N=4)$-модель была открыта как побочный результат в работе [55], посвященной определению модели суперструн.

Разумеется, наличие только переномируемости, а не конечности в ультрафиолетовой области не может вызвать большой энтузиазм, когда речь идет об истинно фундаментальной теории, призванной описать физический мир на сколь угодно малых расстояниях. Но вместо того, чтобы просто сожалеть по этому поводу, полезно задать себе вопрос: а почему стандартная модель *должна* быть перенормируемой и калибровочной? Если отбросить заведомо неконструктивный ответ, что нам не удается придумать ничего другого (такой ответ скорее указывал бы на ограниченность ума и неадекватность используемого формализма, чем на свойства мироздания), то остается только одно объяснение: стандартная модель — это *эффективная* низкоэнергетическая теория. Такой ответ действительно многое объясняет: эффективные теории всегда перенормируемы и всегда обладают специфическими, в том числе калибровочными, симметриями. Характерный пример эффективной теории — фононы в твердом теле. Конкретное устройство кристаллической решетки, ее взаимодействие с электронами может быть сколь угодно сложным; от всей этой сложности в фононном секторе остается след лишь в форме небольшого числа эффективных констант взаимодействия: что именно происходит на малых расстояниях (порядка длины кристаллической решетки), для фононной физики несущественно — это прямой аналог принципа перенормируемости. Ключевым для такой универсальности является отделенность фононного сектора от всех остальных — в длинноволновом (низкоэнергетическом) приближении бесщелевые (безмассовые) возбуждения — фононы — отщепляются от всех остальных (массивных). Остается, правда, объяснить, почему сложное взаимодействие на микроуровне не сказывается на самом существовании фононов, — почему они не смешиваются с другими возбуждениями и не становятся массивными. Причина — наличие *симметрии*, обеспечивающей безмассовость. В конкретном случае фононов — это трансляционная инвариантность, спонтанно нарушенная существованием кристаллической решетки: фононы — соответствующие голдстоуновские частицы. Другими (помимо спонтанно нарушенной глобальной) симметриями, способными обеспечить безмассовость, а значит, и само существование низкоэнергетического сектора, являются калибровочная, киральная и суперсимметрия. Как видим, список весьма ограничен, и встреча с какой-нибудь из указанных симметрии является серьезным указанием на то, что мы имеем дело с эффективной теорией. Более того, такой взгляд на стандартную модель позволяет естественно объяснить еще одно ее замечательное свойство: почему все ее уравнения — дифференциальные уравнения 2-го порядка. Это загадка (интригующая всякого, кто изучал курс общей физики) сразу исчезает, если признать, что такого *фундаментального* закона природы просто нет — это лишь свойство низкоэнергетического приближения.

Например, уравнение Максвелла — 2-го порядка потому, что действие устроено как $\int F_\mu^2$. Но на самом деле оно может иметь и вид

$$\int(F^2+\frac{a}{M^2}F^3+\frac{b}{M^4}F^4+\dots)\ ;$$

просто пока энергия и импульс малы по сравнению с M, все поправки к уравнениям движения с тремя, четырьмя и т.д. производными несущественны. Отметим, что при таком подходе не возникает и трудностей с числом начальных условий (которое формально зависит от порядка уравнения): лишь часть начальных условий (ровно столько, сколько нужно) совместна с требованием отсутствия массивных возбуждений.

Подводя итог этому умозрительному анализу, мы можем сказать, что сами ключевые свойства стандартной модели (как и любой из моделей Великого объединения) являются серьезнейшим указанием на ее нефундаментальность — фундаментальную "теорию всего" надо искать где-то в ином месте.

Указание на направление поисков дает анализ проблем гравитации. Как мы уже говорили, при этом предлагается исходить из абсолютной ценности квантовой парадигмы, т.е. стремиться к созданию квантовой гравитации. Это стремление можно оправдать хотя бы тем, что неизвестен последовательный способ совместить квантовую материю с классической гравитацией, по-крайней мере если материя способна испускать и поглощать гравитационные волны. Квантовая гравитация, в отличие от классической, имеет серьезные трудности. Первая из них — неограниченный рост взаимодействий виртуальных гравитонов с ростом их энергии, ведущий к неперенормируемости гравитации. Причина этого явления, отличающая гравитацию от иных (3 + 1)-мерных калибровочных моделей, в том, что роль заряда играет тензор энергии-импульса, и это приводит к дополнительному усилению взаимодействий с ростом энергии. Из-за неперенормируемости гравитация не может по-настоящему интерпретироваться как низкоэнергетическая эффективная теория: она не наделена способностью "забывать" подробности своего устройства на сверхмалых расстояниях. Поэтому, чтобы объяснить существование безмассовых калибровочных гравитонов, необходимо все-таки понять это устройство: нужно знать саму фундаментальную теорию.

Нечего и говорить, что из-за неустранимых ультрафиолетовых расходимостей сама ОТО, каким-то образом проквантованная, играть роль такой фундаментальной теории не сможет. Как известно, глубинная причина возникновения ультрафиолетовых расходимостей связана с желанием иметь *локаль-*

ную квантовую теорию поля, т.е. с точечностью частиц. Естественный (и, по-видимому, единственно приемлемый в случае гравитации) радикальный путь борьбы с расходимостями — отказ от приверженности локальности и допущения нелокальных моделей для роли фундаментальной теории. Проблема с такими теориями — в невнятности критериев причинности и унитарности, но главное — в отсутствие эффективной техники работы с ними. Фактически сегодня мы знаем только один класс реальных претендентов на роль нелокальной, но причинной фундаментальной теории, реально поддающийся анализу, — это струнные модели. Из всех известных нам теорий только они содержат поля, которые возможно интерпретировать как гравитоны, и при этом непротиворечимым образом обрезают расходимости вблизи планковской энергии. Еще раз подчеркнем, что без подобного обрезания квантовая гравитация является теорией сильной связи, которая если и не патологична, то, во всяком случае, вряд ли допускает существование безмассовых возбуждений — гравитонов: в такой сильно взаимодействующей теории почти наверняка реализуется топологическая, а не голдстоуновская фаза.

Калибровочная инвариатность способна обеспечить безмассовость полей с определенными нетривиальными (!) трансформационными свойствами лишь при условии, что таковые имеются — в противном случае симметрия не дает никакой полезной информации. В качестве примера достаточно вспомнить фазу конфайнмента — близкий аналог топологической, — там калибровочная симметрия КХД никак не ограничивает массы бесцветных адронов.

Вторая существенная проблема квантовой гравитации — наличие флуктуаций и переходов с изменением топологии, которые весьма проблематично описать в терминах гравитонов, т.е. в терминах наивного полевого подхода. На языке гравитонов изменение топологии (так же как и любое иное изменение фоновой геометрии подразумевает образование специфического конденсата гравитонов. Теория поля без особого труда способна описать один какой-нибудь конденсат, но дело усложняется, если надо обсуждать множество конденсатов и постоянные флуктуации между ними (вспомним уже упоминавшиеся многофазные системы!). Проблема здесь в чем-то напоминает попытки описать один конденсат в формализме первичного (а не вторичного) квантования для частиц: в принципе, возможно, но очень неразумно. Мораль, которую можно вывести из этой аналогии, состоит в целесообразности перехода от вторично квантованной теории поля к "третично квантованной" теории. Это один из характерных методов теории струн, попытка его непосредственного приложения к флуктуациям топологии в 4-мерной квантовой гравитации привела к теории *"дочерних вселенных"* (Baby-Universes).

Во избежании недоразумений подчеркнем, что это теория феноменологического типа — она изучает только вопрос о флуктуациях, абстрагируясь от остальных свойств и проблем квантовой гравитации, в том числе и от проблемы расходимостей. Поэтому и все выводы теории дочерних вселенных имеют лишь качественный и ненадежный характер — ценность подобных теорий в том, что они позволяют вообразить, что вообще могло бы произойти в данной ситуации. Окончательный ответ, конечно, остается за полноценной теорией квантовой гравитации, роль которой, возможно, предстоит сыграть самой теории струн, а не одному из ее технических методов.

К числу основных концептуальных следствий этой теории относится вывод о неизбежности эффективной природы как самих фундаментальных взаимодействий, так и их параметров (зарядов и масс), что подтверждает подозрения, возникшие у нас выше — еще до анализа квантово-гравитационных эффектов. Конечно, источники этих подозрений в двух случаях различны, но весьма естественно думать, что выход из положения должен быть общим, а главным критерием фундаментальной теории является ее способность преодолеть трудности квантовой гравитации.

Отвлекаясь на время от проблемы флуктуаций топологии, сконцентрируемся на устранении расходимостей. Как уже сказано, для этого разрешим рассматривать нелокальные модели, и в качестве источника таковых выберем теорию струн. Теперь надо ответить на несколько вопросов. Во-первых, каким образом и при каких условиях восстанавливается структура локальной квантовой теории поля; во-вторых, как разрешается противоречие между нелокальностью и причинностью; в-третьих, как устроена квантовая теория струн и в чем состоят ее скрытые достоинства или недостатки? Ответу на третий вопрос посвящены последующие разделы, но перед ними мы ответим на первые два.

Ключевым для существования *локального* низкоэнергетического предела является наличие у струн натяжения, ограничивающего их длины. Хотя *вся* энергия *релятивистских* струн приписывается их натяжению, так что абсолютному минимуму энергии отвечает сжатие в точку, из-за квантовых флуктуаций (принципа неопределенности) струны имеют некоторую характерную длину, которая в моделях объединения задается планковским масштабом M_{Pl}^{-1}.

Отметим, во избежание недоразумений, что фундаментальный параметр $M = M_{\mathrm{H}}$, определяющий коэффициент перед действием

$$M^2 \int G_{\mu\nu}(x) \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \ (\mu, \nu = 1, \ldots, D)$$

на мировой поверхности, о которой здесь фактически идет речь, может не совпадать со стандартной величиной

$$\hat{M}_{\mathrm{H}} \sim (\hbar c/\gamma)^{1/2} \sim 10^{19} \text{ГэВ}.$$

Например, в сценариях с механизмом компактификации имеется еще один параметр R_{comp} и

$$\hat{M}_{\mathrm{H}}^2 \sim M^{D-2} R_{\mathrm{comp}}^{D-4}$$

Однако высокое постоянство во времени параметров фундаментальных взаимодействий, а также динамический анализ струнных компактификации делают маловероятным сильное отклонение R_{comp} от $1/M$, хотя подобный сценарий с промежуточным масштабом (и даже не одним) не является полностью закрытым. Во избежание излишних подробностей мы не акцентируем всякий раз различие между M_{H} и $\hat{M}_{\mathrm{H}}$

При взгляде с больших (по сравнению с M_{Pl}^{-1}) расстояний, которые только и доступны нашим экспериментальным методам, такая струна неотличима от точки, ее протяженная структура практически не видна. По этой причине ничто не запрещает думать, что элементарные частицы, которые мы обычно принимаем за точечные, на самом деле являются протяженными струнами. В принципе, эта внутренняя структура должна была бы проявиться в том, что могут быть возбуждены внутренние колебания струны; скажем, при рассеянии на ней пробной частицы переданная энергия могла бы перейти в энергию такого возбуждения, а не изменить движение струны как целого или привести к рождению новых струн-частиц. К счастью, для подобного сценария в силу тех же квантовых эффектов реальный энергетический спектр внутренних возбуждений струны дискретен, а это означает, в соответствии с общей логикой теории элементарных частиц, что каждое возбуждение струны можно рассматривать как новую "элементарную" частицу и интерпретировать процесс рассеяния с возбуждением внутренних колебаний струны просто как превращение частицы одного сорта в частицу другого сорта. При этом разные типы внутренних колебаний идентифицируются с разными сортами частиц.

Колебания *струны* различаются номером гармоники ("числом узлов"), поляризацией ("направлением") и амплитудой. Номер гармоники и (квантованная) амплитуда связаны с энергией колебаний; поскольку эта энергия *внутренних* колебаний струны, понятно, что она отвечает за массу покоя частицы: разные гармоники — разные массы.

Поляризация, очевидно, должна быть связана со спином частицы. Точнее, сама поляризация определяет направление спина, а его величина зависит от номера гармоники: нулевой (невозбужденный) уровень имеет спин 0, поляризация первой гармоники задается вектором (направлением колебаний) и отвечает спину 1, поляризация второй гармоники задается тензором 2-го ранга (спин 2) и т.п. Полуцелые спины появляются в более сложных струнных моделях, когда одномерная нить наделена дополнительными структурами. Таким образом, с точки зрения теории элементарных частиц невзаимодействующая струна устроена как коллекция частиц с различными спинами и массами. Спектр масс m в большинстве струнных моделей определяется (до учета взаимодействий) простой формулой

$$m^2 \sim M^2(\alpha_0 + N),$$

где N — неотрицательные целые числа. Это, правда, еще не полная характеристика спектра — в этом же "древесном" приближении имеется сильное вырождение, различные частицы имеют одинаковые массы. Полностью спектр удобно задать с помощью производящей функции

$$Z(t) \equiv \sum e^{-2\pi t(m/M)^2},$$

где сумма берется по всем возбуждениям струны. Поскольку эта функция содержит информацию о вырождении масс, из нее можно извлечь информацию и о спинах (особенно для низких уровней). Чтобы составить какое-то представление о виде производящих функций, приведем формулы для простейших классов струнных моделей — открытых (open) и замкнутых (closed) бозонных струн:

$$Z_{\mathrm{op}}(t) = [q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q)^n)]^{-(D-2)} Z_{\mathcal{L}}^{(D)}(t),$$
$$Z_{\mathrm{cl}}(t) = \int_{-1/2}^{+1/2} |Z_{\mathrm{op}}(t - is)|^2 \mathrm{d}s; \qquad (1)$$

здесь D — размерность пространства-времени, а $q \equiv e^{-2\pi t}$. Множитель $Z_{\mathcal{L}}$ отвечает за поправки, связанные с двумерным **полем Лиувилля** $x^0(\xi)$, **описывающим** *временну́ю* координату струны в пространстве-времени. Его главное отличие от других 2-мерных полей $x^i(\xi)(i = 1, ..., D - 1)$, описывающих пространственные координаты, — в знаке, с которым оно входит в формулу для двумерного действия на мировой поверхности

$$\mathcal{A} = M^2 \int G_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha x^\mu \partial_\alpha x^\nu \mathrm{d}^2\xi + \ldots; \qquad (2)$$

тензор $G_{\mu\nu}(x)$ (**пространственно-временна́я** метрика) имеет сигнатуру (–, +, +, ..., +).

В формализме Полякова поле Лиувилля интерпретируется как определяющее конформный фактор двумерной метрики

$$g_{ab}(\xi) = e^{\varphi(\xi)}\delta_{ab}$$

(ее единственную *не*калибровочную степень свободы). Наивное действие бозонной струны

$$\int G_{ij}(x)\partial_a x^i \partial_b x^j g^{ab}(\det g)^{1/2} d^2\xi$$

с положительно определенным G_{ij}, на первый взгляд, не зависит от x_0 но это иллюзия: из-за квантовых аномалий [56] правильное действие имеет вид (2) с *ненулевой* компонентой G_{00}, **и, вообще говоря,** G_{0i}. Более того, по-крайней мере пока $D \leq 26$, G_{00} **отрицательна.** Это автоматическое возникновение сигнатуры Минковского в а priori евклидовой теории — один из самых красивых эффектов теории струн с точки зрения теории фундаментальных взаимодействий: наличие сигнатуры Минковского в нашем мире интерпретируется как *квантовая аномалия*! Что касается подсчета числа динамических двумерных степеней свободы, то от общего числа D — 1 полей x^i надо отнять два (из-за инвариантности относительно репараметризаций 2-мерной мировой поверхности) и добавить один (поле Лиувилля) — получившееся число (D — 2) появляется в формулах для $Z(t)$. Отметим, что в формулах (1) и (3a) (см. ниже) в множители $Z_{\mathcal{L}}$ отнесены только эффекты, связанные с *отличием* поля x_0 от других x_i, но не с самим его присутствием: полный вклад поля Лиувилля в $Z(t)$ дается произведением $\eta(q)Z_{\mathcal{L}}(t)$.

Формула (1) предполагает, что $G_{ij} = \delta_{ij}$. Множитель $Z_{\mathcal{L}} \neq 1$, если происходит нарушение D-мерной лоренц-инвариантности за счет дополнительных членов, не выписанных явно в (2), — это одна из поправок к наивной картинке струн-частиц. По историческим причинам модели с $Z_{\mathcal{L}} = 1$ (а точнее, свободные от *любых* квантовых аномалий, как 2-мерные теории поля) называются моделями "критических" струн; как видно из уже разобранного примера, критические струны имеют более "наивные" и предсказуемые свойства. Как мы убедимся ниже, свойство критичности тесно связано с существованием у струнной модели содержательного низкоэнергетического предела, что предопределяет особую роль критических струн в теории объединения.

Из формулы (1) следует, что, во-первых, спектр частиц в модели открытых струн, содержит тахион — частицу с отрицательным m^2 при $D > 2$, а во-вторых, безмассовые ($m^2 = 0$) частицы появляются в нем только при $D = 2, 26, ...,$ причем при $D = 2$ безмассовая частица имеет спин 0, а при $D = 26$ — это ($24 = D - 2$)-компонентный вектор. Для теории объединения первоочередной интерес представляет строго *безмассовый* сектор струнной модели, все остальные струны-частицы имеют массы порядка планковской и не могут рождаться на современных ускорителях. Крошечные (в планковском масштабе) массы лептонов, кварков и хиггсовских бозонов в рамках такого подхода приписываются выходу за рамки древесного приближения и, скорее всего, даже *непертурбативным* эффектам взаимодействия струн. Поэтому из моделей открытых бозонных струн, чьи древесные характеристики заданы формулой (1), феноменологический интерес для целей объединения может представлять только случай $D = 26$ (анализ струнных моделей с $D > 26$ недоступен современным методам). Оказывается, что в этом случае можно положить $G_{0i} = 0$ в (2), тогда $Z_{\mathcal{L}} = 1$ в (1), и сделанный выше вывод о том, что безмассовый сектор представлен ($D - 2 = 24$)-компонентным вектором, не противоречит лоренц-инвариантности. Дело в том, что существование ($D - 2$)-компонентной векторной частицы совместно с D-мерной лоренц-симметрией, только если эта частица — *калибровочный* безмассовый бозон. Таким образом, начав с требования наличия безмассовых частиц в древесном приближении, как с условия существования непустого низкоэнергетического сектора, мы заключаем, что струна должна быть критической, при этом оказывается, что безмассовый сектор имеет дополнительную калибровочную симметрию, которая, в свою очередь, способна сохранить безмассовость частиц и после включения взаимодействий.

Модель открытых "суперструн" содержит дополнительные двумерные поля на мировой поверхности и задается более сложным принципом действия, чем (2). Оно обладает явной 2-мерной суперсимметрией. Один только принцип двумерной суперсимметрии определяет фермионные струны, "суперструна" выделяется дополнительным отбором состояний, так называемой GSO-проекцией. Производящая функция древесного спектра открытой "суперструны" имеет вид

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{op,\,su}}(t) = {} & (D-2)\Big[\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)(1-q^n)^{-1}\Big]^{D-2} Z^{(D)}_{\mathscr{L},1}(t) + \\ & + \frac{1}{2}\Big\{\Big[q^{-1/16}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-(1/2)})(1-q^n)^{-1}\Big]^{D-2} - \\ & - \Big[q^{-1/16}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-(1/2)})(1-q^n)^{-1}\Big]^{D-2}\Big\} Z^{(D)}_{\mathscr{L},2}(t). \end{aligned} \tag{3а}$$

Модель становится критической при $D = 10$. Тогда первая строка в (3а), описывающая *фермионный* сектор модели (сектор Рамона), совпадает со второй, описывающей *бозонный* сектор (Невье—Шварца).

Соотношение (3а) — тождество Якоби—Римана для эллиптических функций; кому-то из читателей оно может быть известно в виде

$$\vartheta^4_{10}(0,\tau) = \vartheta^4_{00}(0,\tau) - \vartheta^4_{01}(0,\tau).$$

Производящая функция сведется к

$$Z_{\mathrm{op,\,su}}(t) = 16\Big[\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)(1-q^n)^{-1}\Big]^8. \tag{3б}$$

Совпадение двух составляющих производящей функции является одним из проявлений пространственно-временной суперсимметрии критической суперструны. В отличие от 2-мерной суперсимметрии, **пространственно-временная** появляется только в критической размерности $D = 10$ и только после GSO-проекции. (Здесь мы сталкиваемся с распространенным свойством *критических* струн — своеобразной дуальностью свойств на мировой поверхности и в пространстве-времени; в данном примере в качестве такого свойства выступает суперсимметрия.) Как видно из (3б), в этой модели отсутствует тахион, а безмассовый сектор содержит 8-компонентный калибровочный бозон и его калибровочный партнер — 8-компонентное калибрино. Модель уже довольно близка к реальным претендентам на роль фундаментальной теории, однако пока свободна не ото всех квантовых аномалий (условие $D = 10$ необходимо, но не достаточно для этого). Настоящая *критическая* суперструна содержит большее количество полей, и на безмассовом уровне имеется неабелева калибровочная симметрия (SO (32) в одном из простейших примеров), а также и тензорные частицы, по своим свойствам идентичные гравитонам (последнее свойство — общее для *критических* моделей *замкнутых* струн). Ниже мы еще поговорим о различных струнных моделях, но прежде — несколько слов о *взаимодействии* струн друг с другом.

Характер взаимодействия струн имеет первоочередное значение для объединения причинности теории. Мы уже договорились, что невзаимодействующие струны могут рассматриваться как коллекция частиц различного сорта (причем в некритических моделях лоренц-симметрия может быть нарушена). Нелокальность теории проявилась пока только в бесконечном числе сортов частиц. Важно добиться теперь, чтобы этим дело и кончилось — чтобы *взаимодействия* также могли быть представлены как взаимодействия точечных частиц без всякого априорного дальнодействия, тогда никаких проблем с причинностью не возникнет, как их не возникает в обычной локальной КТП. В теории струн выбран простейший способ добиться этой цели: разрешено только *локальное* взаимодействие струн, в одной точке. В частности, струна может разделиться на две только путем разрыва в какой-то точке, но не путем расщепления по всей своей длине (или какому-то протяженному участку). Это очень сильное ограничение на выбор взаимодействия, его прямой аналог в теории частиц — запрет на расщепление частиц — есть на самом деле полный запрет на *всякие* их взаимодействия. В этом смысле *взаимодействующие* струны — прямой аналог *свободных* частиц, чем и обусловлены значительные упрощения, а зачастую и точная решаемость задач теории струн.

С более формальной точки зрения принцип локальности взаимодействий (гарантирующий причинность и резко выделяющий струны из общего ряда моделей нелокальной КТП) означает запрет мировым поверхностям ветвиться, мировая поверхность для взаимодействующих струн — это *гладкая* двумерная поверхность. Взаимодействие частиц, напротив, выглядит как ветвление их мировых линий, т.е. как нарушение гладкости — это еще одна формулировка аналогии со *свободными* частицами. Понятно, что с математической точки зрения с гладкими поверхностями работать гораздо лучше и *плодотворнее,* чем с сингулярными — в этом объяснение успехов математического аппарата теории струн. Здесь уместно отметить, что струны занимают уникальное положение и в ряду p-бран: с математическими целями естественно задать взаимодействие p-бран, ограничив его тем же требованием гладкости $(p+1)$-мерных мировых гиперповерхностей, но при $p>1$ этого уже недостаточно, чтобы обеспечить локальность взаимодействий (они сконцентрированы на подмногообразиях коразмерности 2, т.е. $(p-1)$-, а не 0-мерных, а значит, и физическую осмысленность теории.

В связи с обсуждением принципа локальности взаимодействий нельзя не отметить его роль в исключении ультрафиолетовых расходимостей: локальность взаимодействия в сочетании с протяженностью струны приводит к тому, что после того, как переданные импульс и энергия E превысили характерную величину M (обратный размер струны), во взаимодействии участвуют только *фрагменты* струны характерной длины $1/E$. Например, во взаимодействии с гравитоном после этого участвует лишь доля M/E от полной массы струны. Этим обеспечивается дополнительное подавление взаимодействий с ростом энергии и, в конце концов, конечность теории.

Важную роль в формализме теории струн играет описание специфического взаимодействия — испускания струной конкретного струнного возбуждения — частицы. Как обычно делается в КТП, для этого в действие, определяющее вес в континуальном интеграле (в данном случае — в двумерное действие, задающее веса в сумме по поверхностям), вводится дополнительный член с "источником". В случае струн он имеет вид интеграла от некоторого оператора (так называемого вершинного оператора), а "ток источника" может быть интерпретирован как D-мерное поле соответствующей частицы. Например, испусканию безмассового гравитона (когда он имеется в числе струнных возбуждений) отвечает вершинный оператор $\partial_a x^\mu \partial_a x^\nu$, а соответствующий член в действии имеет вид

$$\int h_{\mu\nu}(x)\partial_a x^\mu \partial_a x^\nu \mathrm{d}^2\xi.$$

Вспоминая, что в гравитации поле гравитона связано с D-мерной метрикой соотношением

$$G_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x),$$

приходим к выводу, что все действие 2) может рассматриваться как описывающее струну во внешнем гравитационном поле, заданном D-мерной метрикой $G_{\mu\nu}(x)$.

4. Струнная томография, или струна как преобразование Радона в пространстве КТП

Последнее замечание имеет очень важное значение для теории струн и особенно — для ее будущего развитая и приложений. Оно имеет очень широкое обобщение: каждой обычной полевой теории можно поставить в соответствие некоторую струнную модель. Для этого достаточно рассмотреть распространение *пробной* струны на фоне полей данной теории, рассматриваемых как внешние (фоновые). Некоторые интегральные характеристики фона оказываются в результате закодированными в свойствах распространения струны, т.е. в свойствах 2-мерной теории на ее мировой поверхности. Подобный метод широко применяется в различных областях естествознания, часто его называют томографией (когда по характеристикам рассеяния лучей, пропущенных через тело, судят о его внутренней структуре), или преобразованием Радона (интегральное преобразование общего вида, его простейший вариант — преобразование Фурье "испытывает" функцию усредненным взаимодействием с мнимой экспонентой).

Успех метода всецело определяется эффективностью отображения *интересных* свойств изучаемого объекта в *простые* свойства пробника. С этой точки зрения теория струн весьма перфективна для изучения КТП. В принципе, имеет смысл изучать теорию поля, рассматривая распространение в ней пробных *частиц*, а не струн. Однако если отнести к интересным свойствам полевой теории ее динамику, такой подход малоинформативен. В самом деле, выберем внешние поля так, чтобы они удовлетворяли своим (D-мерным) уравнениям движения — некоторому дифференциальному (или интегро-дифференциальному, разностному или еще какому угодно) уравнению. Конечно, если это решение имеет вид плоской волны (т.е. уравнение движения *линейно*), в распространении пробной частицы будут заметны резонансные явления, и содержательная информация (скажем, длина волны) будет получена. Однако когда исходное уравнение *нелинейно*, шансов на это остается очень мало: пробная (т.е. невзаимодействующая ни с чем, кроме внешнего поля) частица не может уследить за всеми связями, наложенными на внешнее поле в разных точках и никак не выстроенными в линию.

Совсем иное дело — струна. Мало того, что она протяженная и потому легко чувствует как градиенты внешнего поля, так и его изменение на *конечных* расстояниях (чем стирается грань между решениями дифференциальных и разностных уравнений), пробная струна еще и умеет разделяться на много струн — она взаимодействующая! Это позволяет сохранить информацию о нелинейных соотношениях; скажем, если конфигурация внешнего поля отвечала распаду волны на две и их последующему соединению, то пробная струна может в точности проследить эту эволюцию. Опять же, в принципе, этого можно было бы достичь и с помощью "пробных" частиц, разрешив им взаимодействовать друг с другом. Однако тогда проблема перенесется в другую область — как определить само преобразование, как задать взаимодействие взаимодействующих частиц с внешним полем? Простой геометрический способ это сделать, существующий для свободных частиц (и формулируемый в терминах геометрии гладких линий — траекторий в пространстве с заданными внешними полями), исчезает для частиц взаимодействующих: неясно, как определить влияние внешних полей на вершину взаимодействия. Фактически единственный реальный способ использовать взаимодействующие пробные частицы — взять их из самой изучаемой теории. Такой подход, объединяющий методы внешнего поля и первичного квантования, зачастую полезен, но *не универсален*: для каждой теории вводятся свои собственные пробные частицы. Не так обстоит дело для струн: поскольку взаимодействие струн не нарушает гладкости, оно не приносит никаких специальных проблем при определении взаимодействий с внешними полями, или, если угодно, спектр возбуждений во всем многообразии струнных моделей достаточно богат, чтобы включить в себя практически любые мыслимые КТП.

Как бы то ни было, перевод на язык струн действительно содержателен: многие уравнения движения для внешних полей превращаются после такого перевода в принципы симметрии! Обычно роль этой симметрии играет конформная. Вернемся к нашему исходному примеру — струне в гравитационном поле. Внешнему полю $G_{\mu\nu}(x)$ сопоставляется струнная модель с действием (2). Условие конформной инвариантности (нуль бета-функции) 2-мерной теории имеет вид

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{A}\mathcal{R}/M^2$$

($\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\rho}$ — тензор кривизны, построенный по метрике $G_{\mu\nu}$) и в длинноволновом приближении сводится к уравнению Эйнштейна $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ для внешнего поля $G_{\mu\nu}$. Аналогичным образом могут быть интерпретированы уравнения Янга—Миллса, Лапласа и другие.

Легко понять, что с большинством струнных моделей оказываются связаны уравнения низкого порядка, чаще всего второго, что, конечно, хорошо для философии моделей объединения. Однако если иметь в виду цель изучения абстрактных уравнений, то, в принципе, можно подобрать струнные модели и с более хитрыми низкоэнергетическими пределами. Отметим еще, что в качестве побочного результата теория струн дает решение старой задачи о задании уравнений принципом симметрии. Калибровочная инвариантность, вопреки распространенному заблуждению, эту задачу не решает: без привлечения *не*симметрийного принципа минимальности нельзя объяснить, почему отбрасываются поправки типа tr F^3 к действию Янга—Миллса tr F^2. Принцип минимальности естествен при рассмотрении перенормируемых и/или эффективных низкоэнергетических моделей, но он не очень уместен при разговоре о фундаментальной теории. В струнной интерпретации уравнения интерпретируются как конформная симметрия совершенно неочевидного объекта — 2-мерной теории на мировом листе пробной струны. Произвол в выборе поправок к уравнению, конечно, сохраняется и превращается в произвол в выборе струнной модели, но для фиксированной модели связь между уравнением и симметрией однозначна.

Достоинством любого томографического метода является ого неспецифичность: один и тот же прибор может быть использован для исследования разных людей, разных органов и т.п., а результаты будут представлены в совершенно одинаковой форме. Аналогично обстоит дело и со струнами: в низкоэнергетическом пределе могут фигурировать гравитационные и янг-миллсовские поля, абелевы и неабелевы калибровочные группы, бозоны и фермионы, суперсимметрия может возникать и нарушаться, пространство-время может иметь 4 или 15 измерений, его может даже вовсе не существовать, топология его может быть простой и сложной; короче говоря, низкоэнергетические теории могут принадлежать совершенно различным классам и могут отсутствовать какие-либо очевидные пути плавно перейти от одной из них к другой, но после перевода на струнный язык все они превращаются в какие-то 2-мерные полевые теории, классификация и интерполяция между которыми представляется уже значительно более обозримой задачей. Этим обусловливается перспективность теории струн для целей не только "наивного" сценария объединения фундаментальных взаимодействий, но и для более претенциозного сценария "единой теории поля", упоминавшегося в вводной части этой статьи (и вообще для приложений к многофазным системам).

Струнный подход к реализации такого сценария состоит в следующем. Для начала заменим всевозможные модели теории поля (фазы в многофазной системе) на соответствующие им модели *двумерной* квантовой теории поля (т.е. используем распространение пробных струн для задания отображения из множества всех теорий в множество 2-мерных). Множество 2-мерных моделей хорошо уже тем, что на него не накладывается серьезных ограничений, связанных с перенормируемостью, — набор хорошо определенных моделей 2-мерной КТП достаточно богат. Строго говоря, сомнительно, чтобы выбор *всего* пространства 2-мерных теорий в качестве универсального конфигурационного (фазового) пространства оказался оптимальным — *произвольные* 2-мерные модели слишком неструктурированы, не имеют никаких замечательных алгебро-геометрических свойств. Что не подлежит сомнению, так это необходимость включить в число точек фазового пространства всевозможные 2-мерные конформные модели (связанные, как мы видели, с разнообразными дифференциальными и пр. уравнениями). Это поистине замечательное множество, с неожиданно глубокими свойствами и многочисленными структурами. Оно, однако, не является даже связным ни в какой разумной топологии. Это, конечно, отражает несвязность исходного пространства всевозможных уравнений, полевых теорий и т.д. Но для того-то мы и искали отображение в множество 2-мерных моделей, чтобы иметь разумные интерполяции, т.е. *связное* пространство.

Связность может быть достигнута уже добавлением ко всем 2-мерным конформным моделям всех интегрируемых. Получившееся пространство интегрируемых 2-мерных теорий не менее замечательно, чем его подмножество, состоящее только из конформных. Оно уже связно, но больше напоминает сеть, чем нормальное пространство; в частности, его фундаментальная группа, по-видимому, очень сложна в разумных топологиях. Почти наверняка это пространство необходимо дальше пополнять, но сохраняя алгебро-геометрические структуры, и, видимо, дальнейшее разумное пополнение выводит за рамки 2-мерных теорий. Скорее всего, оно будет продиктовано алгеброй (двойных?) петель, но с этого места представления разных исследователей начинают расходиться, и мы воздержимся от обсуждения вариантов в области, где пока далеко до достижения консенсуса. (Один из возможных вариантов указан в [40, 41].) Отметим только, что определение конфигурационного пространства — первый, но не последний шаг.

Необходимо еще понимание, какие динамические принципы могут быть естественно заданы на этом пространстве и какие динамические структуры в результате возникают. Ответ на этот вопрос, разумеется, неотделим от вопроса о самом пространстве — геометрия и особенно алгебра, определяя пространство, обычно диктуют и все остальное (в этом состоит центральная идея геометрического квантования). Так что и здесь пока область догадок. А в числе главных объектов систематического изучения на сегодня — пространство интегрируемых теорий. Поняв его устройство, мы наверняка найдем и правильные обобщения.

5. Конформная теория поля

Наша очередная задача — сообщить какую-то информацию о 2-мерных конформных моделях, чью роль в теории струн и ее приложениях мы только что проанализировали. Начнем с основ общей теории, затем обсудим наиболее важные классы конформных моделей. Двумерное пространство считается евклидовым; как мы видели выше, это не противоречит наличию сигнатуры Минковского в реальном D-мерном пространстве-времени. Кроме того, в этом разделе мы не будем специально следить за зависимостью от 2-мерной метрики g_{ab}: учет этой зависимости — главное, что следует сделать при переходе от конформных моделей к струнным, и этим вопросом мы займемся позднее.

Главными свойствами конформной симметрии в *двух* измерениях являются ее бесконечномерность и интерпретация в *комплексно-аналитических* терминах. Первое означает, что условие конформной инвариантности весьма ограничительно, а значит, и содержательно; второе открывает широкие возможности для разработки эффективного математического аппарата (как знает каждый, кто изучал ТФКП, комплексный анализ гораздо мощнее вещественного). Первым шагом на пути формализации является введение комплексных координат $(z,\bar{z})$ на 2-мерной поверхности. Удобно считать "временем" в 2-мерном пространстве координату $\bar{z}$, это избавляет от излишнего усложнения терминологии. Конформная инвариантность означает, что тензор энергии—импульса без следов,

$$T_a^a = T_{z\bar{z}} = 0.$$

Тогда закон сохранения $\partial_a T^{ab} = 0$ (из которого обычно следует только сохранение полных энергии и импульса, $(\partial + \bar{\partial})\int T_{0b} = 0)$ превращается в условия голоморфности

$$\bar{\partial} T = 0, \quad \partial \bar{T} = 0 \quad (T \equiv T_{zz}, \bar{T} \equiv \bar{T}_{\bar{z}\bar{z}}),$$

подразумевающее сохранение $(\bar{\partial} L[f] = 0)$ бесконечного набора величин

$$L[f] = \oint f(z) T(z) \mathrm{d}z$$

с любыми голоморфными векторными полями $f(z)$. $L[f]$ образуют набор генераторов бесконечномерной алгебры Ли (конформной симметрии рассматриваемой модели). Разумный выбор базиса в пространстве голоморфных векторных полей зависит от глобальных свойств 2-мерного пространства; например, если оно имеет топологию римановой сферы с одной или двумя выколотыми точками, разумно взять $f_n^0(z) = z^{n+1}/\mathrm{d}z$, где n — любое целое число во втором и неотрицательное целое в первом случае. Соответствующие генераторы

$$L_n \equiv L[f_n^0] = \int z^{n+1} T(z)\mathrm{d}z$$

образуют алгебру Вирасоро:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}cn(n^2-1)\delta_{n+m,0}.$$

Для поверхностей более сложной топологии базис $f_n^{kn}(z)$ зависит от выбора комплексной структуры и задается более сложными формулами (требование состоит в том, чтобы полюса голоморфного поля находились только в выколотых точках), соответствующие генераторы $L[f_n^{kn}]$ образуют модификацию алгебры Вирасоро, известную как алгебра Кричевера—Новикова [57]. Операторное разложение $T(z)T(z')$ локально и, естественно, не зависит от выбора базиса векторных полей. Соответственно генераторы $L[f_n^{kn}]$ могут быть представлены как *формальные* линейные комбинации L_n, однако некоторые когомологии алгебр зависят от выбора базиса, что позволяет говорить об их неизоморфности; это обычное явление в теории бесконечномерных алгебр.

В терминах самих операторов $T(z)$ коммутационное соотношение удобно записать в форме **операторного разложения**:

$$T(z)T(z') \sim \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{T(z+z'/2)}{(z-z')^2} + \mathrm{reg}.$$

Параметр c называется центральным зарядом алгебры Вирасоро и является важной характеристикой конформной модели. Из-за требования голоморфности векторных полей, задающих законы сохранения, конформные модели занимают промежуточное положение между всевозможными 2-мерными теориями (где на эту роль допускается лишь конечное число векторов Киллинга) и топологическими моделями (где есть по закону сохранения для любого векторного поля). Струнные модели относятся к классу топологических, они получаются из конформных в результате введения поля Лиувилля и репараметризационных духов (что не нарушает конформной инвариантности, но позволяет обратить полный центральный заряд $c + c_{\text{ghost}} + c_{\mathcal{L}}$ в нуль) и последующей факторизации по действию конформной группы (совокупность этих действий можно интерпретировать как интегрирование по 2-мерным метрикам). Сами конформные модели по числу законов сохранения (однопараметрический набор) ближе всего к интегрируемым моделям и выделяются среди последних особенно простой структурой сохраняющихся величин, которые можно выбрать линейными по тензору энергии-импульса и напрямую связанных с комплексной структурой 2-мерного пространства-времени (в случае 2-мерной интегрируемой модели общего вида такую же роль играет комплексная структура некоторой *вспомогательной* (спектральной) 2-мерной поверхности.

Все состояния конформной модели (по понятным из предыдущего раздела причинам соответствующие операторы, рождающие их из "вакуума", часто называются "вершинными") могут быть разбиты на представления алгебры Вирасоро. При этом надо иметь в виду, что алгебра Вирасоро, связанная с голоморфным $T(z)$, действует только на киральные составляющие вершинных операторов, зависящие от голоморфных полей. Каждый вершинный оператор является билинейной комбинацией киральных и антикиральных операторов. Классифицировать по представлениям алгебры Вирасоро имеет смысл именно киральные операторы, что и подразумевается при дальнейшем обсуждении. Наиболее изучены представления старшего веса, связанные с так называемыми модулями Верма. Модуль Верма строится по первичному полю, удовлетворяющему соотношению

$$T(z)V(0) \sim \frac{\Delta}{z^2}V(0) + \frac{1}{z}\partial V(0) + \text{reg}.$$

Подобно операторному разложению $T(z)T(z')$, задающему алгебру Вирасоро, эта формула отражает физический смысл тензора энергии-импульса как генератора инфинитезимальных преобразований координат. Кроме того, из нее следует, что

$$[L_n, V] = 0$$

для всех $n > 0$, так что *первичное* поле действительно является старшим весом по отношению к алгебре Вирасоро. (Заметим, что при ненулевом центральном заряде сам тензор энергии-импульса первичным полем не является.) Далее

$$[L_0, V] = \Delta V;$$

параметр Δ называется *размерностью* V. Для киральных операторов размерность оператора совпадает с его спином, спин полного вершинного оператора — разность "левой" и "правой" (киральной и антикиральной) размерностей. Модуль Верма — это орбита универсальной обертывающей алгебры Вирасоро, проходящая через V, т.е. совокупность всевозможных полей вида $[L_{-n_1}, [L_{-n_2}, \ldots [L_{-n_k}, V]\ldots]]$ с размерностями $\Delta + n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ и их линейных комбинаций — "вирасоровских потомков". Целое число $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ называется *уровнем* оператора в модуле. По самому своему определению модуль Верма является представлением старшего веса, но, возможно, приводимым. Он и в самом деле приводим, когда на каком-то ненулевом уровне в модуле имеется новое *первичное* поле. Его называют нуль-вектором, порожденный им модуль Верма является подмодулем исходного и должен быть исключен при построении *неприводимого* представления (т.е.надо найти фактор модуля по отношению эквивалентности "нуль вектор ~ 0"; отсюда и название "нуль-вектор" — норма этого поля равна нулю). Фактически существуют три возможности: 1) нуль-векторов нет вообще, 2) каждый следующий подмодуль вложен в предыдущий, 3) все нуль-векторы каждого модуля расположены в одном из двух пересекающихся подмодулей.

Если изображать модули Верма конусами, то картинки расположения подмодулей выглядят следующим образом — рис. 1 (случаи 1 — 3).

Случай 1) — случай общего положения, случай 2) также встречается

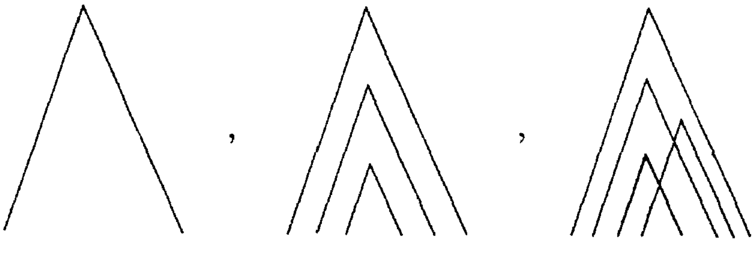

Рис. 1

довольно часто. Ситуация 3) для алгебры Вирасоро реализуется только при определенных значениях центрального заряда:

$$c = 1 - [6(p - q)^2/pq],$$

с целыми взаимно простыми p, $q \geq 3$ (минимальная серия представлений).

Простейшая классификация конформных моделей — по составу представлений алгебры Вирасоро, образуемых вершинными операторами. Набор вершинных операторов ограничен требованием замкнутости операторной алгебры и на практике не может свестись к одному представлению алгебры Вирасоро, однако существуют примеры, когда операторное разложение замыкается на *конечном* числе неприводимых представлений; соответствующие конформные модели называются **рациональными**. Простейший пример рациональных теорий — **(p, q)-минимальные модели** [58 — 61]; они содержат конечное число представлений из упомянутой выше минимальной серии. Все эти минимальные модели имеют $c < 1$, но имеется множество рациональных теорий с $c > 1$, причем значения c не обязательно рациональны. Другая важная характеристика конформной модели — двумерная **унитарность**, т.е. положительность норм вершинных операторов. Исключение нуль-векторов (чьи нормы равны нулю), т.е. ограничение неприводимыми представлениями, — необходимое условие унитарности, но далеко недостаточное; многие поля из модуля Верма могут иметь отрицательные нормы и *не* исключаться при отбрасывании нуль-векторов. В частности, из минимальных моделей унитарна только одна серия $(p, q) = (p, p + 1)$. Простейший представитель этой серии $(p, q) = (3, 4)$ — конформная модель Изинга (т.е. модель Изинга в точке фазового перехода). Значимость 2-мерной унитарности для *струнных* моделей остается пока не вполне ясной из-за того, что унитарность может быть восстановлена при интегрировании по метрикам.

Операторное разложение произведений вершинных операторов задает **сплетающие операторы** различных представлений [62]. Сплетающий оператор в конформной модели, трилинейное соотношение между тройками голоморфных вершинных операторов, — частный пример более общих — полилинейных — соотношений, называемых **конформными блоками**. Конформный блок — это голоморфный аналог корреляционной функции. Сами корреляционные функции полных (некиральных) вершинных операторов в конформной теории представляется как билинейная комбинация конформных блоков и их комплексно сопряженных. В то время как коррелятор — вещественная и однозначная функция координат вершинных операторов, конформный блок голоморфный и не обязательно однозначный, т.е. может иметь как полюсы, так и ветвления. В рациональных теориях существенных особенностей у конформных блоков не бывает, и они целиком определяются порядками полюсов и свойствами монодромии.

Хотя общей симметрией всех конформных моделей является алгебра Вирасоро, представляют интерес специальные классы теорий с более широкими бесконечномерными симметриями. Потребуем по-прежнему, чтобы симметрия была связана с какими-то сохраняющимися, т.е. голоморфными токами. Из-за голоморфности такую симметрию принято называть киральной алгеброй модели. Итак, киральная алгебра всегда содержит алгебру Вирасоро (точнее, ее универсальную обертывающую), но может быть и шире. Весьма богатой киральной алгеброй является симметрия Каца—Муди.

Понятие киральной алгебры является довольно расплывчатым. В самом широком смысле (голоморфной) "симметрией" конформной модели является операторная алгебра всех (киральных) вершинных операторов (как первичных по отношению к $T(z)$, так и потомков). Отождествление ее с киральной алгеброй возможно (в *струнных* моделях, где все вирасоровские потомки исключаются, это даже весьма разумно, а в полной теории струн и вообще необходимо), но тем не менее такое толкование пока не очень распространено в литературе. Обычно понятие киральной алгебры используется в одном из двух контекстов: либо для специфических редукций модели (ВЗНВ, WZNW) (см. ниже), когда киральная алгебра считается порожденной ненарушенной подалгеброй в универсальной обертывающей исходной алгебры Кана—Муди либо когда имеется в виду впоследствии *прокалибровать* симметрию, заданную киральной алгеброй (алгебру Вирасоро—в струнных моделях, W— алгебру в моделях W-струн, всю алгебру Каца—Муди — при построеннии простейших *топологических* моделей). Отметим, что такое ограниченное толкование содержит определенную уступку общему: не требуется, чтобы киральная алгебра была алгеброй Ли (например, W-алгебры квадратичны). Более существенно, что построение полной теории струн подразумевает, что *вся* алгебра вершинных операторов будет прокалибрована: соответствующие калибровочные поля — не что иное, как D-мерные поля, описывающие частицы — струны с пространственно-временной (а не 2-мерной) точки зрения. Пока столь узкая задача не стоит в повестке дня, общий термин часто используется в более узком смысле.

Алгебра Каца—Муди — квантовый аналог алгебры петель со значениями в алгебре Ли G и сама является алгеброй Ли (не путать с квантовой *деформацией* — квантовой группой, которая алгеброй Ли не является). Генераторы $J^\alpha(z)$ помимо координаты z снабжены индексами α, нумерующими генераторы алгебры G, а коммутационные соотношения выражаются через ее структурные константы $f^{\alpha\beta}_\gamma$ и метрику Киллинга $h^{\alpha\beta}$:

$$J^\alpha(z)J^\beta(z') \sim \frac{kh^{\alpha\beta}}{(z-z')^2} + f^{\alpha\beta}_\gamma \frac{J^\gamma(z')}{(z-z')} + \text{reg.}$$

Параметр k называется центральным зарядом алгебры Каца—Муди $\hat{G}_k$. При наличии у конформной модели подобной симметрии киральной алгеброй является универсальная обертывающая $\mathcal{U}\bar{G}_k$ алгебры Каца—Муди, в частности тензор энергии-импульса, генерирующий алгебру Вирасоро, становится функцией токов J^α. Самый простой выбор здесь

$$T_G(z) = \frac{1}{2(k + C_G)}\mathrm{Tr}\, J^2(z)$$

— получающаяся таким образом конформная модель называется **моделью Весса—Зумино—Новикова—Виттена** (МВЗНВ, MWZNW), а указанное вложение алгебры Вирасоро в обвертывающую алгебру Каца—Муди — **формулой Сугавары** (при этом $c = k \dim G/(k + C_G)$; параметр C_G — дуальное число Кокстера алгебры G, например $C_{\mathrm{sl}(n)} = n$). Помимо квадратичного следа полезно выделить в универсальной обвертывающей также другие операторы близкого типа:

$$\hat{W}^{(n)}_G(z) = \mathrm{Tr}\, J^n(z).$$

По отношению к оператору $T = W^{(2)}$ токи Каца—Муди имеют спин 1, а $W^{(n)}$-операторы — спин n. Состояния МВЗНВ полезно классифицировать по представлениям алгебры Каца—Муди, автоматически являющихся (приводимыми) представлениями сугаваровской алгебры Вирасоро.

Так же следует поступать при любой другой киральной алгебре. Структура представлений старшего веса всякой киральной алгебры похожа на описанную выше для случая Вирасоро: всегда есть модули Верма, нуль-векторы, минимальные серии представлений, рациональные и минимальные конформные модели, многие из которых неунитарны. Как и в случае алгебры Вирасоро, унитарность модели не требует рациональности и тем более — минимальности; достоинство минимальных моделей в том, что они наиболее полно отражают структуру киральной алгебры и потому особенно полезны для математических целей — для изучения структуры алгебры и ее представлений. Минимальные модели для алгебр Каца—Муди, связанных с *простыми* конечномерными алгебрами Ли, возникают при целых положительных значениях k, рациональны, унитарны и при этом допускают простую лагранжеву формулировку с действием

$$\mathscr{A}_{\mathrm{WZNW}} \sim k[\int \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_a g g^{-1}\partial_a g)\mathrm{d}^2\xi + i\varepsilon^{abc}\int \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_a g g^{-1}\partial_b g g^{-1}\partial_c g)\mathrm{d}^3\xi].$$

Поле $g(\xi) = g(z, \bar{z})$ задает отображение 2-мерной поверхности в *группу* G. Второе слагаемое (весс-зуминовский член) в действии представлено в форме интеграла по 3-мерному многообразию, границей которого является рассматриваемая 2-мерная поверхность. Из-за произвола в выборе 3-мерного продолжения действие определено с точностью до целого кратного $2\pi ik$, что (при целых k) не сказывается на функциональном интеграле $\int \mathscr{D}g e^{-\mathscr{A}}$. Уравнения движения для этого нелокального действия локальны: $\partial J = 0$, где $J = g^{-1}\partial g$. *а* одновременные коммутационные соотношения таковы, что токи $J(z)$ образуют алгебру Каца—Муди $\hat{G}_k$. Обратный переход — от алгебры Каца—Муди к действию $\mathscr{A}_{\mathrm{WZNW}}$ — также возможен и приводит к еще одной замечательной его интерпретации [63]: это действие связано (оператором d^{-1}) с **формой Кириллова—Костанта** алгебры Каца—Муди. Последняя однозначно строится по любой алгебре Ли и ее **коприсоединенной орбите**; в этом смысле модель ВЗНВ совершенно *алгебраична*: достаточно сказать "алгебра Каца—Муди" — и каноническая процедура приведет нас к континуальному интегралу

$$\int \mathscr{D}g \exp(-\mathscr{A}_{\mathrm{WZNW}}).$$

Конформные блоки в модели ВЗНВ тесно связаны с представлениями **квантовых групп:** как уже говорилось, операторное разложение (определяющее конформные блоки) имеет интерпретацию в терминах сплетающих операторов, т.е. задает величины типа $3j$-символов и других коэффициентов Рака. Строго говоря, чтобы получить при этом что-то, относящееся к характеристикам исходной алгебры G, надо исключить из операторных разложений все поля-потомки и оставить только первичные поля. Совершенно законная процедура такого типа ведет к *струнным* моделям (см. ниже); оставаясь же в рамках конформной модели, надо использовать что-то типа проекции операторной алгебры (фактически — отбрасывать вклады потомков). Соответствующая техника известна как **правила слияния** (fusion rules) [62], при этом из-за ненулевых центральных зарядов фактически получаются характеристики не самой алгебры G, а ее деформации — квантовой группы: структура алгебры Ли нарушается при проецировании.

Другая линия рассуждений, ведущая от модели ВЗНВ, развивает идею о весс-зуминовском члене в действии. Оказывается, что все действие, а не только его часть, можно представить как весс-зуминовский член — трехмерный интеграл **Черна—Саймонса:**

$$k\int \mathrm{Tr}(A\mathrm{d}A + \frac{2}{3}A^3)\mathrm{d}^3\xi.$$

Зависимость функционального интеграла, определяющего эту 3-мерную топологическую теорию, от граничных условий на 2-мерной границе 3-мерного пространства, снова дается выражением $\exp(-\mathcal{A}_{\mathrm{WZNW}})$, а функциональный интеграл МВЗНВ — это интеграл по граничным условиям [64]. Отсюда прямой путь к топологическим теориям [65] вообще и к задаче о топологии 3-мерных многообразий (**теории узлов** [66]) в частности; с другой стороны, действие Черна—Саймонса тесно связано с еще более замечательной 4-мерной топологической теорией $\int \mathrm{Tr}\ F\tilde{F}\mathrm{d}^4\xi$; далее член Черна—Саймонса играет известную роль в теории квантовых аномалий и физике $(2 + 1)$-мерных систем (например, **дробный квантовый эффект Холла, теория анионов**). Все это делает изучение 3-мерной интерпретации МВЗНВ весьма популярным занятием.

В принципе, понятно, что с любой d-мерной теорией должна быть связана какая-то $(d + 1)$-мерная топологическая модель, зависящая только от граничных условий в коразмерности 1. Пример МВЗНВ показывает, что при $d = 2$ *конформные* модели связаны таким соотношением с *локальными* 3-мерными топологическими моделями. Если они к тому же должны строиться в терминах алгебр Ли, то запас таких теорий явно исчерпывается моделями типа Черна—Саймонса, которые в свою очередь связаны с МВЗНВ. Этот не вполне прямой аргумент, пожалуй, — простейшее из существующих объяснений веры в то, что многие 2-мерные конформные модели должны быть связаны с МВЗНВ, а универсальные обертывающие алгебр Каца—Муди содержат в себе все мыслимые лиевские киральные алгебры.

Бывает, что помимо генераторов обычной симметрии, порождающих киральную алгебру Ли, в конформной модели имеется совокупность операторов, образующих другую выделенную алгебраическую структуру — коммутативное кольцо (ground ring). Если включать его в состав киральной алгебры, она, очевидно, не будет алгеброй Ли. В определенном смысле это кольцо следует относить к "топологическому" сектору модели, а ее "симметрией" (а тогда и киральной алгеброй) считать лиевскую структуру. В конформных моделях общего вида оправдание такого разделения требует более глубокого анализа.

Более точная формулировка утверждения о "связи" некоторой конформной теории с МВЗНВ должна состоять в том, что первая является редукцией второй, т.е. получается выделением некоторого подмножества в пространстве состояний, инвариантного относительно динамических потоков (уравнений движения). Чтобы такое выделение стало возможным, динамика (т.е. тензор энергии-импульса) должна быть изменена так, чтобы допустить существование инвариантной системы связей, которые можно было бы наложить на состояние. Для начала (хотя это не является необходимым) можно сохранить билинейное соотношение между $T(z)$ и токами $J(z)$:

$$T(z) = \int\int C_{ab}(z, z', z'')J^a(z')J^b(z'')\mathrm{d}z'\mathrm{d}z'' + \int d_a(z, z')J^a(z')\mathrm{d}z'.$$

На коэффициенты C_{ab} и d_a при этом наложены весьма ограничительные условия, обеспечивающие совместность коммутационных соотношений Каца—Муди для $J(z)$ и Вирасоро для $T(z)$. Однако даже при простейшем "локальном"' анзаце

$$C_{ab}(z, z', z'') = C_{ab}/(z - z')(z - z''), \quad d_a(z, z') = d_a/(z - z')^2$$

с постоянными C_{ab} и d_a [67, 68] набор вложений не ограничивается одним лишь сугаваровским. Наиболее интересны редукции **Годдарда—Кента—Олива** (GKO) и **Дринфельда—Соколова** (DS), строящиеся по подалгебрам $H \subset G$, но имеется и множество иных редукций [67 — 69].

Аналогично такой "обобщенной конструкции Сугавары" можно рассмотреть "обобщенные W-операторы" вида

$$\int dz_1 \ldots \int dz_n C_{a_1 \ldots a_n}(z, z_1, \ldots, z_n) J^{a_1}(z_1) \ldots J^{a_n}(z_n) + \ldots$$

Примеры, полученные в рамках "локального анзаца" см. в [70]; один пример нелокального типа возникает при анализе матричных моделей; см. [71].

Чтобы описать редукцию, надо задать *не*сугаваровский тензор $T(z)$, затем определить совместные с ним связи (условия редукции) и найти первичные поля по отношению к $T(z)$ (вообще говоря, они не обязаны быть первичными для исходной алгебры Каца—Муди). Если среди этих первичных полей найдутся операторы из универсальной обвертывающей $\mathcal{U}\hat{G}_k$, образующие замкнутую (но не обязательно линейную) подалгебру, то ее надлежит считать *тральной алгеброй* редуцированной теории (и, видимо, калибровать соответствующую симметрию при переходе к *струнной* модели.) Конечно, можно сразу начать с наложения произвольной системы связей, но тогда придется проверять, что этим не нарушается конформная симметрия, т.е. что коммутирующая со связями часть киральной алгебры по-прежнему содержит алгебру Вирасоро (генерируемую каким-то "деформированным" тензором энергии-импульса).

Самый простой тип редукции МВЗНВ — **косет-модели** или GKO-конструкция [72]. Исходным пунктом является задание подалгебры

$$\hat{H}_{k'} \subset \hat{G}_k;$$

мы разберем простейший вариант

$$H \subset G, \quad k' = k.$$

Многое интересные редакции возникают, когда G полупростая, а не обязательно простая алгебра, $G = \prod_i G_{i,k_i}$, и $k' = \sum_i k_i$. Тензор энергии-импульса GKO-модели

$$T_{G/H} = T_G - T_H,$$

центральный заряд

$$c_{G/H} = c_G - c_H.$$

Токи $J^{\alpha_{\|}}(z)$ с индексами $\alpha_{\|}$, попадающими в $\hat{H}$, имеют одинаковые коммутаторы с T_G и T_H (являются первичными полями размерности 1 по отношению к обоим этим тензорам) и потому коммутируют с $T_{G/H}$, так что GKO-редукция может быть задана условиями $J_+^{\alpha_{\|}}(z) = 0$. Как обычно, из-за наличия ненулевого центрального заряда k, можно наложить на состояния только половину условий — этот факт отражает индекс "+".

Первичные поля GKO-модели могут быть выделены из числа первичных полей исходной МВЗНВ (и потому GKO-модель автоматически рациональна и унитарна при целых значениях k, когда этими свойствами обладает редуцируемая МВЗНВ). Наиболее эффективное описание GKO-редукции достигается в формализме **свободных безмассовых полей** (см. ниже) — редукция в этом формализме сводится просто к отбрасыванию части невзаимодействующих полей; кроме того, в нем стирается различие между GKO- и любыми другими редукциями, что важно при построении *общей* теории струн (но зато менее удобно при анализе специфических, особенно рациональных и унитарных, косет-моделей). GKO-модели образуют довольно обширный и наиболее изученный класс конформных теорий. Многие из этих моделей содержат "случайные" глобальные и даже локальные симметрии (чье происхождение из "случайно ненарушенных" генераторов исходной киральной алгебры МВЗНВ в большинстве случаев нетрудно проследить). К этому классу относится уже знакомая нам *унитарная серия* $(p, p+1)$ вирасоровских минимальных $(p, p+1)$ моделей $(su(2)_1 \times su(2)_{p-2}/su(2)_{p-1})$, а также двумерно-суперсимметричная *унитарная* минимальная серия $(su(2)_2 \times su(2)_{p-2}/su(2)_p$; она минимальна для ($N = 1$)-супералгебры Вирасоро, рассматриваемой как киральная алгебра), а также *унитарные* минимальные $W_{sl(n)}$-модели $su(n)_1 \times su(n)_{p-2}/su(n)_{p-1}$; здесь киральной алгеброй является $W_{sl(n)}$-алгебра Замолодчикова [73 — 76] и многие другие (в том числе неминимальные, нерациональные и даже неунитарные; последние появляются, когда редуцируется МВЗНВ при не целом k).

Немного более сложный и поучительный пример — редукция Дринфельда—Соколова [77 — 79]. В этом случае в качестве H выбирается максимальная нильпотентная подалгебра (для sl(n) в обычном матричном представлении это верхние треугольные матрицы), однако не все ее генераторы полагаются равными нулю: генераторы первого уровня (отвечающие *простым* корням в случае sl(n) — это первая над главной диагональ) приравниваются единице. В принципе, ненулевое значение может быть приписано только постоянному во времени оператору, т.е. коммутирующему с тензором энергии-импульса. Однако из-за того, что это ненулевое значение *постоянно*, ограничение может быть ослаблено: достаточно, чтобы оператор был первичным полем размерности нуль (тогда в коммутаторе остается только член с производной, который равен нулю). Благодаря такой возможности редукция DS сохраняет конформную симметрию, но ненарушенной остается не сугаваровская, а несколько подправленная алгебра Вирасоро. (По отношению к T_G *все* токи имеют размерность 1, а не 0, адекватный тензор $T_{DS} = T_G - \partial H_{\vec{\rho}}$; точнее, — ограничение правой части на редуцированное гильбертово пространство; $H_{\vec{\rho}}(z)$ — ток, отвечающий картановскому элементу алгебры G, направленному вдоль вектора $\vec{\rho}$ на картановской плоскости; $\vec{\rho}$ — полусумма *всех* положительных корней.) Более того, в этой ситуации выживает даже более богатый фрагмент $\mathcal{U}G$, в частности соответствующим образом подправленные операторы $W^{(n)}_{\hat{G}}$. Они связаны с операторами Казимира конечномерной алгебры G (но не $\hat{G}$!) и подобно им не все независимы из-за ограниченности числа степеней свободы. Однако имеющиеся между ними соотношения нелинейны.

После DS-редукции число алгебраически независимых W-операторов оказывается равным рангу G; более того, этот конечный набор операторов замкнут не только по отношению к скобке Пуассона, но, что далеко не очевидно, и по отношению к квантовому коммутатору. Иными словами, квантовые (т.е. адекватно подправленные) W-операторы образуют замкнутую *операторную* алгебру — W_G-алгебру Замолодчикова [73 — 76, 80, 81]. Эта алгебра становится алгеброй Ли только в (наивно взятом) пределе rank $G \to \infty$ [82 — 85]; при конечных рангах она в лучшем случае квадратична (существует такой базис). W-алгебры доставляют весьма нетривиальный пример киральных алгебр, а в вопросе о ее локализации (калибровании), т.е. построения соответствующих струнных моделей (так называемых W-струн [86 — 93]), пока

Теория DS-редукции довольно обширна, и в ней еще многое недоделано. Отдельно следует сказать, что при DS-редукции естественно возникают **конформные модели Тоды** [94] (простейшая из них — теория Лиувилля), которые, наряду со своими интегрируемыми аналогами, являются классическим объектом исследования в математической физике (самая простая из интегрируемых моделей Тоды — модель sine-Gordon 14]).

6. Топологические и струнные модели

Еще не обсуждавшийся способ описать любую редукцию состоит в том, чтобы *прокалибровать* алгебру связей (алгебру $\widehat{H}_k$, в случае GKO). Как всегда, это предполагает добавление к исходному действию (например, $\mathscr{A}_{\mathrm{WZNW}}$) условий связи, домноженных на калибровочные поля, и дополнительных членов, учитывающих неабелевость алгебры связей. Центральный заряд при этом задает коэффициент перед действием калибровочных полей; кроме того, квантовая мера содержит функциональный интеграл по духовным полям, содержащий взаимодействие духов с калибровочным полем в случае, когда алгебра связей неабелева, а также с полями исходной модели, когда эта алгебра — не алгебра Ли. (Последнее по определению исключено в случае GKO-модели, а также в теории Янга—Миллса и потому не отражено в обычных учебниках по физике элементарных частиц, но вполне возможно в иных ситуациях.) Состояния редуцированной теории определяются как классы **БРСР-когомологии** (это условие выделяет их из общего многообразия функций, зависящих от всех полей исходной модели, калибровочных полей и духов). Поскольку переход к *струнным моделям* от конформных подразумевает, что киральная алгебра должна быть прокалибрована, понятно, что **БРСТ-формализм** [95 — 98] занимает важное место в арсенале технических средств теории струн.

Применительно к редукциям модели ВЗНВ соответствующая техника развита в [99]. Особое место среди всех редукций этой модели занимает косет G/G, т.е. случай $H = G$. Хотя, по определению, почти все степени свободы при такой редукции исключаются, кое-что может все-таки остаться. Это особенно легко увидеть в БРСТ-формулировке. Дело в том, что она использует калибровочные поля, а значит, допускает нечто среднее между степенью свободы и ее отсутствием: возможны конфигурации с нулевой *напряженностью* поля, *не* являющиеся чисто калибровочными. Существование, число и свойства таких конфигураций зависят от *глобальной* структуры пространства, в котором задана теория (граничными условиями), поэтому об *эффектах такого рода* говорят как о топологических (или, правильнее, когомологических).

С формальной точки зрения существование подобных эффектов объясняется наличием производных в формулах для калибровочных преобразований (скажем, в абелевой теории $\delta A = \mathrm{d}\varepsilon$, но условие $dA = 0$ еще не означает, что ε существует, например, для $A = \mathrm{const}$ на окружности). Конечно, основные применения подобных явлений — математические, связаны с вычислением когомологий. Но и с физической точки зрения это интересные эффекты, нарушающие узкопонимаемую парадигму близкодействия: они выглядят как дальнодействие, не связанное с распространением частиц. Знаменитый пример — эффект Ааронова—Бома (а также, строго говоря, и статическое кулоновское взаимодействие). В обычной 4-мерной ситуации красота эффекта, однако, затемняется присутствием безмассового фотона. Поэтому более изящный пример — дальнодействие в 3-мерной массивной электродинамике, где безмассовых *частиц*, способных распространяться на большие расстояния, нет вообще [100]. См. также недавнее изложение "физического взгляда" на примере актуальной ("c = 1")-струнной модели [101]. Отметим, что в струнных задачах такие "когомологические" эффекты — общее место, они встречаются практически на каждом шагу.

Модель ВЗНВ с полностью откалиброванной симметрией Каца—Муди — характерный пример топологической теории, все наблюдаемые (корреляционные функции) которой описываются в терминах БРСТ-когомологий. Фактически они сводятся к когомологиям пространства модулей плоских G-связностей на 2-мерных поверхностях. Это пример описания топологии сложных пространств в терминах функциональных интегралов. Эффективность такого подхода к топологическим задачам связана как вообще с возможностью обратиться к физической интуиции, так и с существованием более конкретных методов анализа функциональных интегралов (например, квазиклассических вычислений). Более того, этот подход позволяет плавно переходить от изучения топологии к анализу более содержательных алгебро-геометрических структур того же пространства (просто путем неполного редуцирования исходной модели).

БРСТ-формализм, как известно, весьма близок к суперсимметрии, только по сравнению с обычной суперсимметрией Гольфанда—Лихтмана [102] число генераторов уменьшено наполовину (до одного в обсуждаемой 2-мерной ситуации) и нет никакой связи с генераторами сдвига, т.е. с тензором энергии-импульса. В обычных суперсимметричных теориях от тензора энергии-импульса можно абстрагироваться при рассмотрении вакуумных состояний, и вакуумный сектор описывается в терминах топологических моделей. Из-за сокращения квантовых поправок в других ситуациях, снимающих вырождение вакуумов, в суперсимметричных моделях этот сектор может быть достаточно сложен и часто содержит целые "долины" и "плато".

Суперсимметричные модели имеют еще одно свойство, делающее их изучение весьма перспективным: они несут информацию о *симплектических* структурах на пространствах петель (это относится, по крайней мере, к случаю, когда действие не более чем квадратично по фермионным полям [103]). В этом смысле суперсимметричные модели должны в перспективе играть такую же роль при изучении симплектической геометрии, какую конформные играют при анализе комплексной. Эта симплектическая природа квантовых суперсимметричных моделей имеет большое значение для применимости к ним теорем типа **Дустермаа—Хекмана** (о точности квазиклассического приближения) [104 — 108] и — в конечно счете — для их точной решаемости. К этому кругу вопросов относятся также важные случаи **теорем об индексе** и их яркие приложения [109 — 112], а также теория **преобразования Николаи** [113, 114].

Взамен преимуществ, доставляемых наличием алгебраической структуры в случае модели ВЗНВ, при построении топологических моделей по суперсимметричным имеется возможность варьировать форму действия, обычно — потенциал. Пока наиболее яркое распоряжение этой возможностью — установление связи топологических моделей (их классификации) с теорией катастроф [115, 116]. По-видимому, это один из простейших путей объяснить и (уже обнаруженную) их связь с интегрируемыми уравнениями.

Вообще-то, *топологическими* следовало бы называть модели теории поля, не содержащие зависимости от метрики и координат пространства-времени. Есть две возможности построить такую теорию (кстати, чем-то похожие на разбиравшиеся ранее два сценария объединения взаимодействий). Во-первых, можно строить модель, у которой уже классическое действие или хотя бы уравнения движения не зависят от метрики и координат (в частности, имеется **вейлевская** инвариантность относительно рескейлинга метрики, $g \to hg$), и далее требовать сокращения аномалий, т.е. стремиться не допустить возникновения такой зависимости за счет квантовых поправок. (В принципе, не запрещено требовать, чтобы поправки сокращались между различными порядками теории возмущений.) Такая возможность реализована как в уже упоминавшихся примерах, так и в более сложных примерах типа топологических моделей Черна—Саймонса [117, 118] в нечетном числе измерений D (с лагранжианом $\mathrm{d}^{-1}\mathrm{Tr}\,F^{(D+1)/2}$, например, $AdA + (2/3)A^3$ при $D = 3$) или топологических **θ-моделей** при четном D (название — в честь **θ-члена**; лагранжиан — $\mathrm{Tr}\,F^{D/2}$, например, $\mathrm{Tr}\,F\tilde{F}$ при $D = 4$). Вторая возможность — взять теорию, в которой имеется зависимость от метрики, и проинтегрировать по метрикам в случае, когда идет речь о двумерных моделях, — по двумерным метрикам. Связь с предыдущим вариантом имеется, по крайней мере, если исходная модель была конформной.

В конформной теории уравнениями движения являются условия голоморфности, и если бы не нетривиальные граничные условия (в том числе сингулярности), их решениями были бы только константы. Поэтому, для того чтобы сделать из конформной модели топологическую, многого не требуется: достаточно убрать источники сингулярностей и ветвлений — центральные заряды и ненулевые размерности. Этот вариант и обсуждается п тексте. Если говорить о *не*конформной модели, то эффективная теория, полученная из нее усреднением по метрикам, могла бы быть нетривиальной. Однако система решений уравнений движения этой эффективной теории должна оказаться инвариантной (а сами уравнения — ковариантными) относительно *произвольных* замен координат. Это утверждение относится не только к двум измерениям: таким свойством должна обладать квантовая гравитация в любом числе измерений. Обсуждение простых примеров таких эффективных ковариантных моделей см. в [119].

Как уже говорилось, интегрирование по двумерным метрикам может быть описано как: 1) введение новых полей — Лиувилля и репараметризованных духов, что можно рассматривать как модификацию модели, оставляющую ее конформной, но обращающую в нуль центральный заряд, а затем 2) калибрование алгебры Вирасоро. При такой интерпретации мы на последнем шаге имеем более или менее обычную процедуру редукции, и результатом является топологическая теория поля. Такая теория, однако, в одном отношении отличается от рассмотренных ранее. Различие это проявляется в тождествах Уорда, которые сохраняют память либо об исходных симметриях модели, либо об ее операторной алгебре (являются "проекцией" последней на топологический сектор; примеры таких **рекурсионных соотношений** см. в [120, 121]). Источник различия в том, что интеграл по метрикам (а значит, и по полю Лиувилля) не совсем обычен [101]: метрика ограничена условием *положительной определенности,* поэтому область интегрирования в пространстве метрик имеет границу, и эта граница может давать вклад в интеграл. На этой границе фактически изменяется *топология* 2-мерного пространства, и потому имеются рекурсионные соотношения, связывающие корреляторы на поверхностях различной топологии. Мы еще вернемся к этому вопросу в разделе 8, сейчас же напомним, откуда вообще взялся интеграл по метрикам в теории струн и как его следует вычислять.

7. Пертурбативная теория струн, или свободные безмассовые поля на римановых поверхностях

Вернемся на несколько шагов назад, к задаче о суммировании по поверхностям с весом e^{-M^2S}, где S — площадь поверхности, измеренная во внешней метрике $G_{ij}(x)$ ($D = 1$)-мерного пространства:

$$S = \int (\det{}_{(ab)} G_{ij}(x)\partial_a x^i \partial_b x^j)^{1/2} \mathrm{d}^2\xi. \tag{4}$$

Сумма по поверхностям подразумевает суммирование по всем гладким вложениям, в том числе различной топологии, — в картинке струн-частиц это означает, что введено взаимодействие и произведена "унитаризация". Согласованность вкладов различных топологий на этом этапе будет достигнута, если константу струнных взаимодействий (такой параметр a priori имеется в струнных моделях, хотя часто a posteriori он не представляет особого интереса из-за явлений типа размерной трансмутации) ввести как коэффициент перед эйлеровой характеристикой в двумерном действии (кроме этого надо согласовать "объемы" интегрирования для разных топологий, что является отдельной задачей, решаемой в рамках теории универсального пространства модулей). Сумму по поверхностям (фиксированной топологии) естественно понимать как функциональный интеграл двумерной теории поля. Действие в этом интеграле, как уже сказано, зависит только от вложения поверхности в $(D - 1)$-мерное пространство и не зависит ни от выбора координат ξ, **ни от метрики** $g_{ab}(\xi)$ на 2-*мерной* мировой поверхности. Репараметризационную инвариантность действия (сорт калибровочной симметрии) обычно не составляет труда сохранить при континуальном интегрировании, но с зависимостью от метрики дело обстоит иначе — вейлевская инвариантность практически всегда нарушается. Уже одна эта причина не позволяет использовать (4) в качестве разумного *эффективного* действия двумерной теории — оно должно зависеть **от** g_{ab}. Появление этой зависимости, в свою очередь, подразумевает, что в сумму по поверхностям должно войти суммирование не только по вложениям, но и по двумерным метрикам. Что касается действия, то формула (4) не годится и по причине сильной нелинейности — работать с таким действием все равно было бы невозможно. Формализм Полякова [56] в теории струн подразумевает, что в качестве замены действия (4) надо взять

$$\int G_{ij}(x)\partial_a x^i \partial_b x^j g^{ab}(\det g)^{1/2}d^2\xi. \tag{5}$$

По-крайней мере в принципе, мера в интеграле по метрикам должна определяться по норме [56]

$$\|\delta g\|^2 = \int \delta g_{ab}\delta g_{a'b'} g^{aa'} g^{bb'}(\det g)^{1/2}d^2\xi,$$

на практике часто используют более простые меры [122 — 125].

Кроме того, действия (4) и (5) буквально совпадают только на уравнениях движения для метрики g_{ab} а полное доказательство того, что интеграл по g_{ab} с указанной мерой действительно превращает (5) в (4), известно только для аналогичной 1-мерной задачи (теории релятивистских частиц). Проблема *доказательства* того, что разные варианты формализма дают результаты из одного класса эквивалентности, вообще слабое место теории струн; с другой стороны, более чем правдоподобные *гипотезы* о том, что такое совпадение имеет место, обычно подразумевают существование замечательных и не всегда понятых (пока) связей между весьма различными вещами. (Пример эквивалентности различных мер в интеграле по метрикам — приведенной выше [56], индуцированной редукцией Дринфельда—Соколова [122, 126] и просто свободной [123 — 125], — несмотря на свою важность, может казаться не очень впечатляющим. Намного более яркий пример — эквивалентность формализма Полякова и метода случайных матриц; см. ниже и [127].)

При вычислении функционального интеграла приходится фиксировать репараметризационную инвариантность и вводить соответствующие духовые коля (b, c) со спинами 2 и -1 соответственно [56]. У метрики остается одна настоящая степень свободы — поле Лиувилля $x_0(\xi)$:

$$g_{ab}(\xi) = g_{ab}^{(0)}(\xi)e^{Mx_0(\xi)},$$

и, как мы уже имели случай сказать, при интегрировании по полям x_i, b, c зависимость от x_0 появляется в эффективном квантовом действии (фактически из-за зависимости от x_0 детерминантов и функций Грина операторов Лапласа). Правильное квантовое действие, стабильное относительно квантовых поправок, имеет вид (2), причем автоматически возникает сигнатура Минковского (если $D \leq 26$).

Чтобы избежать возможных недоразумений, надо сказать, что в большинстве старых текстов говорится, что в случае $D = 26$ (и для других критических струн) интегралом по конформному множителю можно пренебречь. Такая точка зрения, однако, не вполне последовательна; современный взгляд на проблему изложен в тексте. Специфика критических струн в том, что для них поле Лиувилля x_0*неотличимо* (кроме сигнатуры, что тоже иногда важно!) от остальных полей x_i, но это не значит, что его нет!

Вместо многоточия в рассматриваемом нами в качестве простейшего примера **бозонной струны** надо поставить действие духов и ввести поправки, связанные с топологией и нарушающие, вообще говоря, D-мерную лоренц-инвариантность:

$$\mathcal{A}_{\text{bos}} \sim \int (M^2 G_{\mu\nu}(x)\partial_a x^\mu \partial_b x^\nu g^{ab}_{(0)} + \alpha M x^0 \mathcal{R}_{(0)} + \\ + b^{ab}\partial_a c_b)(\det \bar{g}_{(0)})^{1/2} d^2\xi + \ldots \tag{6}$$

По метрике $g^{(0)}_{ab}(\xi)$ уже не надо интегрировать, это "базовая" (reference) метрика, $\mathcal{R}_{(0)}$ — ее кривизна. В качестве простейшего можно было бы предложить выбор $g^{(0)}_{ab} = \delta_{ab}$, но тогда $\mathcal{R}_{(0)} = 0$, и отсюда ясно, что в большинстве случаев столы просто поступать нельзя: согласно теореме Гаусса—Бонне интеграл $\int \mathcal{R}_{(0)}(\det g_{(0)})^{1/2} d^2\xi$ пропорционален эйлеровой характеристике поверхности и отличен от нуля. Параметр α в (6) зависит от конкретной модели (в данном случае от D: $\alpha \sim (D - 26)$); многоточием обозначены поправки, они, во-первых, учитывают вклад границ 2-мерной поверхности (если таковые имеются) и, во-вторых, восстанавливают конформную инвариантность. (Иными словами, формула (6) точна, если 2-мерная поверхность замкнута и если *пространственно-временная* метрика $G_{\mu\nu}(x)$ выбрана таким образом, чтобы обеспечить обращение в нуль β-функции, например если $G_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$.)

Похожие рассуждения могут быть проведены и в более сложных случаях, чем модель бозонной струны (4). Исходное двумерное действие может быть более сложным, чем просто площадь поверхности; оно может даже с самого начала зависеть от двумерной метрики; в этом случае, правда, определение правильного квантового эффективного действия — 2-мерной конформной теории, аналога (6), — становится самостоятельной проблемой.

Помимо лиувиллиевской степени свободы у метрики остаются еще дискретные — топологические. Их существование связано с невозможностью привести с помощью репараметризаций поверхности все метрики к виду $g_{ab} = g^{(0)}_{ab} e^{Mx_0}$ с *одной и той же* $g^{(0)}_{ab}(\xi)$: классы эквивалентности метрик различаются выбором не только $x_0(\xi)$, но и $g^{(0)}_{ab}(\xi)$. Однакоб в то время как первый из этих произволен (*бесконсчномерен*: x_0 может быть любой функцией 2-мерных координат, практически все $g^{(0)}_{ab}(\xi)$ репараметризационно-эквивалентны: остается лишь конечно-параметрическое семейство базовых метрик $g^{(0)}_{ab}[y](\xi)$. Параметры y связаны с **модулями комплексной структуры** 2-мерной поверхности и образуют **пространство модулей**, их число (размерность пространства модулей) зависит от топологии. Интегрирование по всем метрикам включает в себя не только интеграл по полю Лиувилля, но и *конечномерный* интеграл по пространству модулей. Фактически, после введения поля Лиувилля и репараметризационных духов мы возвращаемся к ситуации, когда никакой метрики не было, но с рядом поправок; во-первых, теперь все сделано законно; во-вторых, действие (6) содержит лишние поля x_0, которых не было в (2); в-третьих, оно не содержит квадратного корня; в-четвертых, от метрики остался дополнительный след — зависимость от модулей комплексной структуры на поверхности.

Последнее обстоятельство означает, что при изучении струнных моделей мы фактически имеем дело с **римановыми поверхностями**, оно же подчеркивает роль конформных моделей, также привязанных, как мы видели в соответствующем разделе, к комплексной структуре. Итак, при фиксированной топологии интеграл по метрикам сводится к интегралу по пространству модулей от некоторой величины (коррелятора) в конформной теории. Понятно также, что интегрировать следует далеко не произвольный коррелятор: он не должен зависеть от координат на поверхности. Фактически это требование означает, что надо рассматривать либо корреляторы вершинных операторов нулевой размерности, либо интегралы от операторов размерности 1; несколько условно мы будем называть такие операторы "наблюдаемыми". Более формально, наблюдаемая должна являться элементом БРСТ-когомологии — мы возвращаемся к идее о том, что струнная модель получается из конформной калиброванием алгебры Вирасоро. В этой связи можно вспомнить, что прокалибрована может быть любая киральная алгебра и "наблюдаемые" в соответствующей "струнной модели" представимы в форме интегралов по соответствующим пространствам модулей. Иногда (как в случае пространства модулей плоских связностей, связанного с калиброванием симметрии Каца—Муди) такой подход не вызывает принципиальных затруднений, иногда (как в случае модулей, связанных с W-симметрией, т.е. задачи о **W-гравитации** [86 — 93]) до ясности еще далеко.

Пространство модулей замкнутых ориентированных римановых поверхностей с отмеченными точками само является комплексным *орбиобразием*: оно имеет дискретные особенности конусного типа в точках, отвечающих поверхностям с дополнительной дискретной симметрией. Кроме того, пространство модулей a priori некомпактно, его границы отвечают вырождению поверхностей: перетягиванию ручек, сближению выколотых точек и т.п. Оно имеет сложную топологию: на накрывающем **пространстве Тейхмюллера** [125, 35] имеются **модулярно эквивалентные области**. Модулярные преобразования позволяют рассматривать сближение отмеченных точек как эквивалент определенного перетягивания ручек и компактифицировать пространство модулей, пополняя его лишь сингулярными поверхностями с перетянутыми ручками (но без совпадения отмеченных точек). После такой **компактификации Делиня—Мамфорда** топология пространства модулей становится эквивалентной топологии пространства модулей ленточных графов и легко изучается [128, 129]. Комплексная размерность пространства модулей $\mathcal{M}_{p,n}$ **равна**

$3p-3+n$, где p — число ручек (род), а n — число отмеченных точек (исключения из этого правила — $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}_{0,n}=0$ при $n=0,1,2,3$ и $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}_{1,n}=1$ при $n=0,1$ — связаны с существованием *конформных киллингов* — всюду голоморфных векторных полей с нулями в отмеченных точках).

Задачей пертурбативной теории струн является построение выражений для "многопетлевых амплитуд" в различных струнных моделях. Реально это требует определения корреляторов вершинных операторов в произвольных конформных моделях на произвольных римановых поверхностях. Если эта задача решена, то останется отобрать специфический класс **наблюдаемых** — вершинных операторов, корреляторы которых устроены как *меры* на соответствующих пространствах модулей (причем отмеченные точки — это положения вертексов). Несколько избыточное решение задачи (нахождение *всех* корреляторов) — специфика *пертурбативной теории струн,* которая, с одной стороны, расширяет круг приложений, но с другой — делает ее менее адекватной специфической проблеме изучения *струнных* моделей, чем некоторые альтернативные методы (см. ниже раздел о "непертурбативных" подходах).

В основе пертурбативной теории струн лежит **формализм свободных безмассовых полей** [125, 130, 131], т.е. гауссова теория поля с действием

$$\int \partial_a\phi\partial_b\phi g^{ab}(\det g)^{1/2}\mathrm{d}^2\xi.$$

Поле ϕ — свободное в том смысле, что отсутствует самодействие (вершины типа ϕ^3, ϕ^4 и т.п.), однако из-за взаимодействия с фоновой метрикой g^{ab} теория не вполне тривиальна. Ее базовые объекты — детерминанты и функции Грина оператора Лапласа $\Delta=g^{ab}\partial_a\partial_b$ на римановой поверхности. Все они зависят от поля Лиувилля и от модулей комплексной структуры поверхности, причем можно выделить объекты, зависимость которых от модулей *аполитична* (согласована с комплексной структурой на пространстве модулей). Имеет смысл рассматривать операторы Лапласа Δ_j, определенные на полях любого спина j (иногда их называют *j-дифференциалами).* Детерминантная формула, например, устроена следующим образом:

$$\mathrm{Det}\,\Delta_j=e^{c_j\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}\det N_j\det N_{1-j}|\mathrm{Det}\,\bar\partial_j|^2; \tag{7}$$

здесь $c_j=2(6j^2-6j+1)$ — центральный заряд алгебры Вирасоро для j-дифференциалов,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{L}}\sim\int\partial_a x^0\partial_b x^0 g^{ab}_{(0)}(\det g_{(0)})^{1/2}\mathrm{d}^2\xi\ \sim\ \int\mathcal{R}\frac{1}{\Delta}\mathcal{R}$$

— действие Лиувилля, два конечномерных детерминанта $\det N$ учитывают вклад нулевых мод операторов $\bar\partial_j$ и $\bar\partial_j^{\dagger}$ (соответственно голоморфных j- и $(1-j)$-дифференциалов). Главная часть формулы — киральный детерминант $\mathrm{Det}\,\bar\partial_j$; он зависит голоморфным образом от комплексных координат на пространстве модулей, $\partial\,\mathrm{Det}\,\bar\partial_j/\partial\bar y=0$, и является сечением детерминантного расслоения на пространстве модулей. Оператор $\bar\partial_j$ действует из пространства j-дифферениалов в двойственное к пространству $(1-j)$-дифференциалов. Если поля (j-дифференциалы), по которым ведется интегрирование, в континуальном интеграле, неоднозначны на римановой поверхности, то $\mathrm{Det}\,\bar{\partial}_j$ становится также аналитической функцией граничных условий (фактически — сечением уже упоминавшегося расслоения плоских связностей над пространством модулей), а к действию Лиувилля добавляется дополнительный член (аномалия Квиллена [35, 130, 132]). Эта зависимость от граничных условий играет ключевую роль в теории интегрируемых систем. Явные формулы для $\mathrm{Det}\,\bar{\partial}_j$ выражают его в терминах специальных функций — **тета-функций Якоби и Римана** [133, 134]. Тета-функции Якоби определены как голоморфные функции на g-мерных комплексных торах, фазы которых сдвигаются при обходе вокруг нестягиваемых контуров на линейную функцию координат.

Обычно в справочниках по специальным функциям приводятся лишь *эллиптические* функции Якоби, отвечающие $g = 1$. Тета-функции при других значениях g — это более широкий класс функций, во многих отношениях похожих на эллиптические. В частности, они также представимы в форме гауссовых рядов (только многократных) и удовлетворяют специфическим уравнениям второго порядка (связывающим зависимости от точки на торе и от матрицы T). Еще один важный класс спецфункций, не включенных в обычные справочники, составляют *интегралы* от тета-функций. Их аналог для $g = 0$ — гипергеометрические функции (интегралы от степенных); для $g > 1$ эти функции особенно сложны, потому что определены (или, точнее, интересны) только для *римановых* тета-функций.

Торы различаются своими решетками, задаваемыми симметричными комплексными невырожденными матрицами T_{ij} $(i, j = 1, ..., g)$ с положительно определенными мнимыми частями; множество таких матриц образует верхнее полупространство Зигеля. Каждая замкнутая риманова поверхность рода g может быть вложена с помощью **отображения Якоби** в g-мерный комплексный тор, который называется ее **якобианом**, причем соответствующие T_{ij} голоморфно зависят от модулей поверхности и называются **матрицами периодов**. Вложение одной и той же поверхности не единственно, разные вложения отличаются модулярными преобразованиями

$$T \to \frac{AT + B}{CT + D},$$

образующими группу $\mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z})$. Полученные таким образом якобиевы тета-функций (т.е. когда аргумент является функцией точки на *поверхности,* а T — ее матрицей периодов) называются римановыми. Следует иметь в виду, что (при $g > 3$) *не все* зигелевские матрицы T являются матрицами периодов. Задача определения подмножества матриц периодов в пространстве Зигеля, а следовательно, и независимого определения римановых тета-функций известна как **проблема Шоттки**. У нее существует простое решение в форме трансцендентного уравнения при $g = 4$ (оно играет важную роль в модели суперструн [135, 136]), но эффективное общее решение пока не найдено. Неявное решение известно в форме (ныне доказанной) гипотезы Новикова [137 — 139], согласно которой *римановы* тета-функций характеризуются тем, что удовлетворяют системе нелинейных уравнений — фактически иерархии Кадомцева—Петвиашвили (KP) [3, 5]. Тета-функции Римана плюс определенная информация об их нулях на практике достаточны для построения функций Грина и любых иных величин в теории свободных полей.

Формула (7) обладает свойством голоморфной факторизации, уже встречавшимся нам при обсуждении конформных теорий: корреляторы представимы как билинейные комбинации голоморфных конформных блоков. Хотя интеграл (по пространству модулей) — тоже пример билинейной комбинации, иногда полезно говорить о голоморфной факторизации корреляторов *до* интегрирования по пространству модулей. Например, в случае рациональных конформных моделей именно до интегрирования билинейные комбинации содержат *конечное* число конформных блоков. Свойство голоморфной факторизации полезно для определения струнных моделей на открытых и неориентированных поверхностях. Соответствующие пространства модулей *не* являются комплексными, но с помощью техники дублей они могут быть вложены как вещественные подпространства половинной размерности в комплексные пространства модулей замкнутых поверхностей. Более того, меры на этих подпространствах задаются с помощью киральных компонент полной меры (см. [140 — 142]).

Одной из простейших величин в теории струн является мера на пространстве модулей, задающая статсумму (вакуумную амплитуду) 26-мерной бозонной струны; она называется **мерой Мамфорда** и довольно хорошо изучена при самых разных параметризациях пространства модулей.

О параметризациях стоит сказать отдельно, поскольку разные параметризации удобны для различных целей:

А) Для анализа модулярных свойств очень удобно пользоваться матрицами периодов (и теория модулярных форм — один из главных сюжетов классической теории *эллиптических* функций). К сожалению, из-за проблемы Шоттки этот путь весьма сложен для $g > 4$ (хотя теория для $g = 2, 3, 4$ тоже не очень развита; о струнных приложениях см. [143, 144]).

В) Чрезвычайно полезен подход, рассматривающий римановы поверхности как алгебраические многообразия. Проблема здесь в отсутствии простой и однозначной параметризации пространства модулей фиксированного рода. Важное исключение — род 2 (и 1), когда все римановы поверхности гиперэллиптичны. Формализм свободных полей для гиперэллиптических поверхностей (и вообще абелевых накрытий римановой сферы) особенно прост: все выражается через гиперэллиптические интегралы. Он очень часто используется для предварительного анализа эффектов сложной топологии при изучении новых моделей. Кроме того, к гиперэллиптическому формализму сводятся некоторые специальные задачи, например модель Эшкина—Теллера (см. [145]) или теория уравнения Кортевега-де Фриса [3]. Возвращаясь к *общей* проблеме представления римановых поверхностей как алгебраических, отметим, что задача описания детерминантов и функций Грина в терминах определяющих уравнений не решена. Есть две цели, к достижению которых можно стремиться на этом пути. Во-первых, такой взгляд должен быть удобен для единообразной трактовки всех родов и в конечном счете для целей суммирования по родам (см., например, гл. 12 в обзоре [130]). Во-вторых, алгебраические поверхности могут быть определены над произвольными числовыми полями, и на этом пути устанавливается связь теории струн с важными разделами алгебраической геометрии (ближайший из них — теория Аракелова; см. [146]); о связанной с этим кругом вопросов теории P-адических струн см. [51] (она, правда, еще очень плохо разработана).

С) Параметризовать пространство модулей можно также, выбрав какую-то поверхность, выколов на ней окрестность точки (или точек), "повернув" эту окрестность и вклеив ее обратно. Основанный на этой идее формализм называется **конструкцией Кричевера** [147, 148] и является на сегодняшний день наиболее полезным. Основной прием при его применении — анализ голоморфных сечений различных расслоений, продолжаемых или *не*продолжаемых внутрь или наружу выколотой окрестности. С пространствами модулей связаны обычно сечения, не продолжаемые ни внутрь, ни наружу [149]. Более того, в сходных терминах могут быть описаны и изменения топологии поверхности (например, операторы приклеивания ручки [150]). С конструкцией Кричевера связаны струнный операторный формализм [151 — 153], а также представление универсального пространства модулей [154 — 157] в форме бесконечномерного грассманиана [148]. Кострукция Кричевера играет также большую роль при анализе интегрируемых задач (собственно, для этой цели она и была первоначально предложена [147]).

Второй составляющей формализма свободных безмассовых полей является сведение разнообразных конформных моделей к наборам свободных полей с квадратичными действиями. Иногда эта процедура по историческим причинам называется бозонизацией. В принципе, эта задача — пример поиска переменных действие—угол; важно, однако что в случае двумерных конформных моделей переход к этим переменным практически локален. Представление свободных полей известно для модели ВЗНВ [158] и различных типов ее редукций [159, 79]. Особенно удобно оно для описания модулей Верма, и применительно к этому кругу задач его часто называют **формализмом Фейгина—Фукса—Доценко—Фатееева—Фельдера** [160— 163].

При описании в этих терминах неприводимых представлений, а следовательно, и рациональных конформных моделей используются операторы Фейгина—Фукса—Фельдера, или **экранирующие операторы**. Об их лагранжевой интерпретации см. [158]. Другой важный класс конформных теорий — (N= 2)-суперсимметричные сигма-модели [164, 165], — по-видимому, сводится к свободным полям с помощью **преобразований Николаи**; здесь, однако, еще много неясного (см. [166]). Другие примеры см. в [167,131]. Фактически применимость формализма свободных безмассовых полей (т.е. существование замены переменных) удобно считать *определением* конформной теории.

Несколько более тонкая связь существует между этим формализмом и двумерными **интегрируемыми теориями** [168]. Выше была упомянута зависимость кирального детерминанта $\mathrm{Det}\,\bar\partial$ от граничных условий, наложенных на поля на поверхности. Для замкнутой поверхности граничные условия параметризуются точками якобиана (в случае, когда поля — сечения линейного расслоения над поверхностью; для многомерных расслоений место якобиана занимает пространство отображения фундаментальной группы поверхности в структурную группу расслоения; следующие ниже рассуждения справедливы и в этой общей ситуации). Можно задать на якобиане набор коммутирующих динамических потоков, например просто равномерные прямолинейные движения (намотки) с различными направлениями и скоростями, и рассмотреть $\tau\{t\} = \mathrm{Det}\,\bar\partial$ как функцию соответствующих "времен" $\{t\}$. Эта **τ-функция** $[\tau F]$ удовлетворяет нелокальным билинейным **тождествам Хироты**, инфинитезимальная версия которых сводится к бесконечному набору совместных (из-за коммутативности исходных потоков) дифференциальных уравнений, образующих **интегрируемую иерархию** (Кадомцева—Петвиашвили или интегрируемой иерархии цепочки Тоды, если рассматривались линейные расслоения на произвольных римановых поверхностях, Кортевега-де Фриса, если поверхности были гиперэллиптическими л т.п.) При таком (наиболее разумном) взгляде на интегрируемые теории фигурирующие в них "времена" не имеют никакой **пространственно-временной** интерпретации.

В отдельных случаях низшие уравнения иерархии, например sine-Gordon, могут рассматриваться как двумерные релятивистские системы; такая интерпретация важна, в частности, при построении интегрируемых интерполяций между отдельными конформными моделями (мы уже упоминали об этой идее в контексте индуктивного построения "единой теории поля"; в качестве примера см. [172, 173] о конкретных результатах, касающихся интерполяций, задаваемых потоком ренормгруппы). Подчеркнем, что в этих случаях использованная в общей конструкции риманова поверхность ("поверхность спектральных параметров") не имеет прямого отношения к 2-мерному пространству-времени; адекватное описание соотношения между ними, по-видимому, может быть достигнуто в теории двойных петель (см. по этому поводу [40, 41]).

8. Непертурбативная теория струн

Следующей задачей теории струн после построения исчисления на римановых поверхностях (которое мы отнесли к введению пертурбативной теории) должна быть сумма по всем таким поверхностям, в том числе и сумма по топологиям. Попытаться явно вычислять интегралы по пространствам модулей и затем складывать полученные результаты занятие в равной степени безнадежное и бессмысленное: что действительно важно — это выявление новых *структур*, которые должны возникнуть после суммирования по модулям и топологиям. С самого начала, если верить в струнную программу, изложенную в начальных разделах этих заметок, понятно, что эти новые структуры должны обеспечить единообразный подход, во-первых, ко всем римановым поверхностям, независимо от топологии, а во-вторых, что не менее важно, и ко всем струнным моделям, независимо от того, какие конформные теории положены в их основу.

Этот второй аспект непертурбативных вычислений становится особенно важным, если вспомнить об идее *полной* теории струн как "единой теории поля", т.е. о динамическом объединении всех струнных моделей в единое целое. Если такое целое и имеется, то пертурбативный анализ не обязан это учитывать: пертурбативные разложения вблизи различных экстремумов определяются только их ближайшими окрестностями и никак не связаны друг с другом. *Непертурбативные* же (точные!) результаты знают все: применительно к нашей ситуации это означает, что непертурбативное вычисление, проделанное для одной струнной модели, должно фактически знать и обо всех остальных! Конечно, при строго дедуктивном подходе так получиться не может, и отражением этого факта является отсутствие однозначного метода непертурбативных вычислений в квантовой механике: ряды теории возмущений обычно асимптотические (т.е. расходящиеся) и могут быть просуммированы к какой-то определенной величине только после привлечения дополнительной "непертурбативной" информации (чаще всего об аналитических свойствах потенциала и его поведении на бесконечности).

В современной ситуации с теорией струн, когда задача состоит в том, чтобы саму эту теорию *изобрести*, все сказанное означает, что дополнительная информация должна быть *постулирована* в форме каких-то новых принципов. Требование к этим принципам, однако, довольно жесткое: что бы ни было объявлено непертурбативным ответом, его разложение в ряд теории возмущений должно воспроизвести сумму по поверхностям. Поэтому самый безопасный способ — не постулировать ничего сразу, а начать-таки с попыток выполнить это суммирование и в процессе найти необходимые новые принципы. Процесс этот еще далек от завершения, поэтому точность расстановки акцентов в этом разделе еще менее гарантирована, чем в других частях текста.

Наиболее прямые подходы к суммированию по модулям и топологиям исходят из задачи о единообразном описании всех римановых поверхностей. Основное понятие здесь — **универсальное пространство модулей** (УПМ): объединение всех пространств модулей, в котором к границам $\mathcal{M}_{p,n}$ приклеиваются пространства $\mathcal{M}_{p-1,n+2}$ (перетягивание "ручки"), $\mathcal{M}_{p_1 n_1+1}\times\mathcal{M}_{p-p_1 n-n_1+1}$ (перетягивание цикла, гомологичного нулю), $\mathcal{M}_{p,n-1}$ (совпадение отмеченных точек). Различные определения УПМ могут исключать некоторые из этих склеек, а также определяют конкретные правила склейки (см., например, [154]). Одна из целей введения такого пространства — фиксировать относительные нормировки мер на пространствах различных топологий: это часто называется **условиями факторизации** (а их следствия для корреляторов наблюдаемых, т.е. для *интегралов* с этими мерами, — **рекурсионными соотношениями**). Построение УПМ и струнных мер на нем происходит "сверху вниз" — от сложных топологий к простым: условие факторизации фактически определяет меру на $\mathcal{M}_{p,n}$ как ограничение меры на пространстве модулей с большими p и n, и задачи суммирования ряда теории возмущений состоит в том, чтобы "угадать", что следовало бы назвать мерой на $\mathcal{M}_{\infty,\infty}$.

В определенном смысле обратная процедура использует идею оператора приклеивания ручки (ОПР). На этом языке просуммировать ряд — значит экспоненцировать проинтегрированный по положениям и размерам ручки ОПР (на самом деле — целое семейство ОПР, градуированное коразмерностями, — это необходимо для учета взаимовлияния ручек). Эта задача, возможно, не столь уж и безнадежна, особенно если будет найдено эффективное описание поверхностей как (неабелевых) накрытий над римановой сферой. Фактически при работе с УПМ и ОПР самая полезная техника связана с конструкцией Кричевера (струнным операторным формализмом), и УПМ обычно представляется как фактор какой-то версии бесконечномерного грассманиана. Этот грассманиан, в свою очередь, очевидным образом связан с алгебрами типа $\mathrm{Gl}(\infty)$, $\mathrm{Sl}(\infty)$, $W(\infty)$, а через них — и с соответствующими моделями ВЗНВ и их редукциями. В числе последних находятся очень многие конформные модели, поэтому грассманиан имеет довольно близкое отношение и к задаче об описании множества всех конформных моделей ("фазового пространства" полной теории струн).

Существенный технический прогресс в сфере непертурбативных вычислений, приведший к более ясной формулировке наших ожиданий в этой области, связан с формализмом **матричных моделей** [174 —176]. Этот типичный метод дискретной математики, долгие годы активно применявшийся в статистической физике, оказался весьма мощной альтернативой формализму Полякова в применении к струнным (но не конформным) моделям. Идея приложения этого метода — построить исчисление Редже для двумерной гравитации. Однако, в отличие от стандартного формализма Редже, предлагается ограничиться триангуляциями с фиксированными (и одинаковыми) длинами сторон треугольников. Несмотря на полную неясность в вопросе о причинах эквивалентности так *определенной* квантовой гравитации и теории Лиувилля, во всех случаях, когда ответы удалось получить обоими методами, они совпадают.

Обычное оправдание заключается в том, что в непрерывном пределе, когда треугольники очень малы, их форма не может быть существенной. Чего следовало бы опасаться в первую очередь, если думать, что процедура неправильна, — так это вообще отсутствия непрерывного предела. Предел, однако, находится явным вычислением и действительно хорошо определен. В этом смысле такое определение 2-мерной квантовой гравитации имеет не меньше прав на существование, чем стандартное (т.е. "по Полякову"). Вопрос тем не менее остается и состоит в том, почему эти определения совпадают (по существу, это вопрос об эквивалентности квантовых мер), возможно, эта проблема имеет отношение к интересному вопросу [146] о распределении алгебраических точек в пространстве модулей (см. [127])

С технической точки зрения польза такой модификации метода Редже очевидна: после отказа от суммирования по длинам треугольников любую триангуляцию можно заменить на дуальный граф с тройными вершинами, а задача о перечислении таких графов — это задача об определении интеграла

$$\int \mathrm{d}m \exp(m^2 + tm^3).$$

Интересно, конечно, рассматривать *корреляторы,* т.е. вводить в триангуляции некоторые возмущения. Проще всего описать возмущение, заменив какие-то из тройных вершин графа на четверные и т.п. Если к тому же стремиться различать вклады триангуляции с разными топологиями, то по методу т'Хофта надо заменить числовые переменные интегрирования m квадратными матрицами M размера $N\times N$, т.е. рассмотреть интеграл

$$\mathscr{L}_N\{t\} = \int \mathrm{d}M \exp(\sum_k t_k \mathrm{Tr}\, M^k). \tag{8}$$

Он определяет статсумму **дискретной матричной модели**. Для получения корреляторов в струнной модели надо еще взять непрерывный предел $N \to \infty$. Непрерывные пределы бывают различными в зависимости от предполагаемого поведения коэффициентов $\{t_k\}$. В одном из таких пределов можно восстановить разложение по топологиям (по обратным степеням N). В более интересном двойном скейлинговом пределе [177 — 180] получается *сумма* по всем топологиям. Глядя на формулу (8), легко понять, что взятие пределов подразумевает какие-то аналитические продолжения (более того, по самому своему определению непрерывный предел предполагает сингулярное поведение $\{t\}$, т.е. расходимость интеграла (8)). Таким образом, необходимо определить какие-то разумные свойства статсуммы (8), которые не пропадают при взятии предела. Подобными свойствами могут быть *уравнения* (тождества Уорда), наложенные на $\{t\}$. Они имеют вид **условий Вирасоро** [181 — 185]

$$l_n \mathscr{L}_N\{t\} = 0, \quad n \geq -1,$$

где в конкретном случае модели (8)

$$l_n = \sum_k k t_k \partial/\partial t_{k+n} + \sum_a \partial^2/\partial t_a \partial t_{n-a}, \quad [l_n, l_m] = (n-m) l_{n+m}.$$

Иной формой их записи являются уже упоминавшиеся **рекурсионные соотношения**. Следствием этих тождеств является то, что $\mathscr{L}_N\{t\}$ оказывается **τ-функцией** интегрируемой иерархии **цепочки Тоды** [184] (т.е. удовлетворяет *билинейным* уравнениям Хироты). Величиной, удовлетворяющей самим уравнениям цепочки Тоды, является

$$\varphi_N = \log(\mathscr{L}_{N+1}/\mathscr{L}_N).$$

Непрерывный предел удобнее всего брать прямо в этих терминах, стремясь к сохранению интегрируемой структуры. Двойной скейлинговый предел — тот, в котором иерархия цепочки Тоды превращается в иерархию Кортевега-де Фриса (КдР), так что непертурбативной статсуммой 2-мерной квантовой гравитации является **τ-функция** иерархии КдР $\tau\{T\}$ (времена T — определенные линейные комбинации времен t и N), удовлетворяющая системе условий Вирасоро (несколько отличающихся от приведенных выше). Эта **τ-функция сама** может быть записана в форме матричного интеграла, но весьма отличного от (8):

$$\mathscr{L}\{T\} \sim F(Q)\int \mathrm{d}X \exp V(X) + V'(Q)X \tag{9}$$

с $V(X) = X^3$, $T_n = n^{-1}\mathrm{Tr}\, Q^{-n}$; $F(Q)$ — функция, определенным образом построенная по $V(X)$. Эта формула известна как **модель Концевича** [129, 186]. Можно доказать [187 — 190], что эта же **τ-функция** имеет чисто топологический смысл — задает производящий функционал для топологических инвариантов: классов Черна расслоения дивизоров на пространстве модулей. Как и следовало ожидать (или хотя бы надеяться), разные пути определения топологических моделей — прямо по топологии и усредненным по метрикам — ведут к одинаковым результатам.

Матричные модели могут быть построены и в случаях, когда имеется не одна только квантовая гравитация, но и исходная конформная модель; пока что известны результаты только для вирасоровских $(p,\ q)$-минимальных моделей, все они имеют $c < 1$. Замечательным образом непертурбативные статсуммы для всех моделей с $q = 2$ даются теми же формулами (8) и (9) [191]: непертурбативный ответ для одной модели действительно знает о существовании другой! Аналог формулы (8) для моделей с $q > 2$ выглядит сложнее — это дискретные *многоматричные* модели [192, 181] (число матриц равно $q - 1$), — однако в формуле (9) матрица по-прежнему одна, надо только заменить потенциал на $V(X) = X^{q+1}$. Место иерархии КдФ занимает q-редукиия иерархии КР, а вместо условий Вирасоро возникают **$W_{\mathrm{sl}(q)}$-условия.** Так что модель Концевича (9) с произвольным $V(X)$ уже близка к непертурбативной статсумме для целого класса струнных моделей [186], именно — всех, связанных с иерархиями КР и "двумеризованной иерархии Тоды", или, что то же самое, с *линейными* расслоениями над римановыми поверхностями.

С пространственно-временна́й точки зрения все эти модели могут интерпретироваться как $(D = 2)$-мерные струны (роль координаты x_1 играет скалярное поле Фатеева—Доценко, возникающее при бозонизации минимальных моделей, а роль x_0, как обычно, — поле Лиувилля). Ограничение **$c \leq 1$ связано** с требованием отсутствия тахионных возбуждений, т.е. с устойчивостью фазы, описываемой данной моделью (в этой связи нельзя исключить, что другие модели гетеротических струн без тахионов могут доставить новые классы непертурбативных моделей). Особое место занимают ("$c = 1$)-модели", в которых в качестве исходной конформной теории фигурирует гауссова теория поля x_1 со значениями в окружности или отрезке длины R. Интерес к этим моделям связан, во-первых, с наличием свободного параметра R; во-вторых, — с ожи**даемым появлением W_∞-условий** на непертурбативную статсумму; в-третьих, — с наличием *связного* (а не дискретного, как в остальных случаях) семейства наблюдаемых при **$R = \infty$**; но главное — с необходимостью усовершенствования имеющейся техники непертурбативных вычислений для описания ($c = 1$)-моделей (так, о разумных матричных моделях, определяющих непертурбативную статсумму и содержащих зависимость от R, пока неизвестно).

Мораль, которую можно извлечь из этих первых непертурбативных результатов в теории струн, состоит в том, что естественной структурой, возникающей после суммирования рядов теории возмущений, может быть структура интегрируемости. Нахождение непертурбативной статсуммы подразумевает, что все возмущения, которые имеются в теории, проэкспоненцированы. Эффективное действие в такой ситуации наверняка бесконечно-параметрично. Но если так, то должна иметься богатая симметрия, связанная со свободой произвольных замен переменных (полей) в функциональном интеграле (обычно ее нет из-за требования минимальности, мотивированного, например, перенормируемостью). Эта симметрия (выраженная в форме условий Вирасоро в разобранных выше примерах матричных моделей) выражает инвариантность статсуммы относительно очень широкого класса замены своих аргументов ("времен"). Этот произвол может быть использован для выбора "времен" каким-нибудь удачным образом. Матричные модели подсказывают, что удачным может оказаться выбор, при котором статсуммы оказываются **τ-функциями** интегрируемых иерархий.

Заслуживает упоминания еще одна важная точка зрения на те же результаты. Условия Вирасоро и их **$W_{\mathrm{sl}(q)}$-обобщенная** (они же — рекурсионные соотношения) могут быть интерпретированы как симметрии, индуцированные операторной алгеброй вершинных операторов при ограничении на множество наблюдаемых (первичных полей определенной размерности). Эта алгебра наблюдаемых — по-настоящему инвариантная характеристика модели, не зависящая от рода поверхности, модулей и интегрирования по метрикам. Изучение алгебр наблюдаемых и переформулировка всех сведений о струнных моделях в терминах этих алгебр — одна из актуальных задач теории струн на ближайшее будущее. (Об интересных и пока что далеко не полных результатах в этом направлении, в том числе связанных с 4-мерной геометрией, которые получены при изучении ($c = 1$)-моделей, см. [193, 194].) В дальнейшей перспективе теории струн калибрование и этих симметрии — "третичное квантование" и построение адекватной "струнной теории поля".

Если отвлечься от всех подробностей, то общая схема построения теории струн ("снизу—вверх" — индуктивным методом, которым приходится действовать в процессе изобретения теории) состоит в следующем:

1) Возьмем любую конформную модель. В ее операторной алгебре выделим киральную алгебру.

2) Путем калибрования киральной алгебры строим соответствующую струнную модель. "Остаток" операторной алгебры (ее "проекция" на классы БРСТ-когомологий, связанных с киральной алгеброй, или, еще проще, ее "фактор" по киральной алгебре) образует алгебру наблюдаемых. Отметим, что в нее входят операторы, изменяющие топологию. Струнная модель может быть описана либо как новая конформная модель (с лишними полями Лиувилля и духов; с нулевым центральным зарядом киральной алгебры, подправленной с учетом этих полей, и с разрешением рассматривать лишь часть вершинных операторов — "наблюдаемые"), либо как топологическая гравитация (используя тот факт, что корреляторы наблюдаемых — топологические инварианты). В первом случае алгебра наблюдаемых может рассматриваться просто как фрагмент операторной алгебры новой конформной модели (причем все поля — потомки по отношению к подправленной киральной алгебре отбрасываются), во втором алгебра наблюдаемых имеет форму рекурсионных соотношений.

3) Путем калибрования алгебры наблюдаемых строится "непертурбативная струнная модель". Вводимые при этом калибровочные поля, связанные с наблюдаемыми, интерпретируются как *физические поля* (в пространстве-времени, если таковое имеется). С 2-мерной точки зрения эти поля "возмущают" действие струнной модели — превращают ее в другую струнную модель: непертурбативная стутсумма одна и та же для всех моделей. Как уже говорилось, шаг 3) пока лишь изучается для одного класса койформных теорий — минимальной вирасоровской серии. Роль физических полей при этом играют "времена" T_l в теории (9). Исследование этого примера укрепляет веру в два важнейших свойства непертурбативной статсуммы: рассматриваемая как функция физических полей, она, во-первых, действительно универсальна — одна для всего класса минимальных моделей, а во-вторых — интегрируема, является **τ-функцией.** Эти два утверждения, возможно, следует рассматривать как основные предсказания теории струн для теории фундаментальных взаимодействий. Однако потребуется еще много работы, чтобы придать ясный смысл словам, что точное эффективное действие стандартной модели как функции полей Янга—Миллса является логарифмом **τ-функции** (т.е. удовлетворяет петлевым уравнениям специального вида, связанным с билинейными соотношениями Хироты).

Что же до самой теории струн, то в число ее задач входит, естественно, и поиск независимого априорного определения универсальной непертурбативной статсуммы. Только после нахождения такого по-настоящему фундаментального принципа станет возможным *дедуктивное* построение теории и вообще "правильный" взгляд на всю совокупность проблем, объединенных под именем теории струн.

9. Вместо заключения, или комментарий о струнном моделестроении

Вместо того чтобы как-либо оценивать достижения теории струн вообще, справедливее, наверное, сказать несколько слов о том, что достигнуто в направлении, послужившем источником всего ее развития. Это полезно как для того, чтобы правильнее соотносить прогнозы и результаты, так и для того, чтобы видеть, в каком направлении вторые отклоняются от первых. Итак, мы имеем сегодня в качестве **струнных моделей Великого объединения**? Почти по определению это класс критических конечных струнных моделей, в низкоэнергетическом пределе которых могла бы возникать стандартная модель либо какая-то заданная модель Великого объединения. Фактически, пока речь идет о более или менее понятой *пертурбативной* физике струн, этот класс безгранично велик.

Наиболее знаменита (исторически первая) 10-мерная модель гетеротических струн с калибровочной группой $E_8 \times E_8$, компактифицированная на многообразие Калаби—Яо с динамическим нарушением суперсимметрии при низких энергиях (см. по ее поводу [38, 39, 195]). Обобщением подразумеваемой при построении этой модели процедуры последовательной струнной компактификации из 26 измерений сначала в 10, а затем в 4 (именно с требованием существования "изящного" промежуточного 10-мерного этапа была связана изначальная иллюзия об уникальности модели) является конструкция обширного множества так называемых 4-мерных струн [196 — 199], многие из которых ничуть не менее приемлемы с феноменологической точки зрения.

Все трудности с определением "оптимальной" модели струнного объединения те же, что и с обычным сценарием Великого объединения: экспериментальная информация совершенно недостаточна не только для определения структуры теории вблизи планковских масштабов (где только и начинает проявляться отличие струнного объединения от любого другого), но даже для выбора между сценарием Великой пустыни и моделями, построенными в рамках концепции техницвета или для выяснения вопроса о существовании 4-мерной суперсимметрии в мире элементарных частиц намного ниже планковских энергий. Эти два примера — *сегодняшние* проблемы экспериментальной физики (так, исследование эффектов на уровне радиационных поправок в модели Глэшоу—Вайнберга—Салама близко к исключению наиболее разумных из моделей техницвета, что увеличивает веру в существование Великой пустыни, и тогда последние данные о величине трех констант фундаментальных взаимодействий — $\alpha = e^2/\hbar c$, угла Вайнберга и Λ_{QCD} — указывают скорее на справедливость суперсимметричного сценария: введение суперчастиц способствует пересечению линий ренормгрупповой эволюции *трех* параметров в *одной* точке [53]).

Эффекты квантовой гравитации — единственные специфические именно для теории струн (в рамках обычного Великого объединения их просто *невозможно* описать) — еще долго будут за пределами экспериментальных возможностей (сегодняшняя задача здесь — обнаружить хотя бы *классические* гравитационные волны *большой* амплитуды). В этом смысле задачей струнного моделестроения может быть одно из двух: убедиться в существовании каких-то струнных моделей, которые дают феноменологически приемлемые модели Великого объединения в своем низкоэнергетическом пределе (т.е. при энергиях типа 10^{15} ГэВ), или же из *чисто теоретических соображений* понять выделенность одной-единственной из таких моделей. Первая из этих задач, по-видимому, выполнена: на множестве примеров показано, что практически *любая* мыслимая теория поля при энергиях типа 10^{15} ГэВ может рассматриваться как низкоэнергетический предел какой-нибудь струнной модели. Существенно, правда, что изучение струнных моделей привело к возникновению массы новых идей и концепций в самой теории Великого объединения (например, о вакуумном конденсате дилатона, о кэлеровой структуре действия для скалярных полей, о лишних Z-бозонах, о динамическом нарушении суперсимметрии, о естественности скрытой материи и т.д.).

Все эти идеи, однако, имеют разве что историческое отношение к струнному объединению (скорее — к теории струн, как к области математической физики, или, еще точнее, как к образу мыслей) — они не являются ни необходимыми, ни даже "естественными" для струнных моделей и имеют право на существование и успех или неудачу *независимо* от справедливости идеи о фундаментальных струнах. Что касается возможности *теоретически* понять, что есть "правильная" модель Великого объединения, то до этого весьма далеко. Уточнению самого вопроса и описанию современных идей о том, как его решать, собственно, и были посвящены эти заметки.

При обсуждении феноменологически приемлемых струнных моделей объединения используются в основном два класса моделей:

А) 10-мерные гетеротические струны, компактифицированные на пространства Калаби—Яо. Об исходных идеях этого подхода см. [39, 195], об описании и классификации пространств Калаби—Яо, о современном подходе к исследованию таких моделей, основанном на применении орбифолдов, теории катастроф и вообще теории ($N = 2$)-суперсимметричных сигма-моделей см. в [115— 116].

В) 4-мерные гетеротические струны (часто их называют просто 4-мерными струнами). Они строятся с помощью 22-мерных решеток.

Наиболее перспективным представляется поиск подходов, как-то выделяющих 4-мерное пространство. Более того, их не надо специально искать — занятие теорией струн само постоянно наводит на эти вопросы: помимо нашей воли струна и размерность $D = 4$ слишком много "знают" друг о друге. На самом простом уровне их глубокая связь выражается в том, что $D = 4$ — минимальная размерность пространства-времени, где мировые поверхности струн, находящиеся в общем положении, еще пересекаются. Простейшим же выражением этого факта является гипотеза о "перенормировке" любой другой размерности к 4 за счет эффектов квантовой гравитации (эффект типа образования хаусдорфовой — фрактальной — размерности). Технически эта же идея выражается в существовании специфических конформных сигма-моделей при $D = 4$, в которых конформная инвариантность обеспечивается присутствием топологического члена (индекса пересечения 2-мерных поверхностей в 4-мерном пространстве) [200]. Напомним, что другой, безусловно, замечательной возможностью, предоставляемой струнным сценарием объединения, является автоматическое появление сигнатуры Минковского в пространстве-времени, как следствия 2-мерной вейлевской аномалии.

Тесно связан с двумя предыдущими еще один факт: 4-мерное пространство возникает при комплексификации 2-мерного. Как уже говорилось, проведенные непертурбативные вычисления указывают на определенную выделенность (c = 1)-струнных моделей, у которых уже есть достаточно много степеней свободы и симметрии, но это еще не приводит к потере устойчивости вакуума. Напрямую значение $c = 1$ отвечает $D = 2$, но по разным причинам можно ожидать, что потребуется комплексификация. Две из этих возможностей достаточно наивны, чтобы сказать о них без особых комментариев. Во-первых, можно заметить, что в моделях с двумерной ($N = 2$)-суперсимметрией скалярный супермультиплет содержит пару скалярных полей, что в сигма-модельном подходе предполагает удвоение величины D; с другой стороны, появление ($N = 2$)-суперсимметрии на мировом листе выглядит довольно естественно в свете сегодняшнего понимания взаимосвязей струнных и топологических моделей. Во-вторых, можно вспомнить, что переход от открытых струн к замкнутым может рассматриваться как комплексификация, в том числе и комплексификация вершинных операторов, а тем самым и как удвоение размерности D (числа степеней свободы). Эти соображения, видимо, подтверждаются и анализом некоторых характеристик алгебры наблюдаемых ($c = 1$)-моделей [194], выявляющим какие-то зачатки твисторной структуры, характерной для $D = 4$. Пока что мы лишь приблизились к тому, чтобы сделать идеи такого рода доступными для изучения: предстоит еще большая работа, чтобы выяснить, являются ли они действительно полезными для приложений к теории фундаментальных взаимодействий. Подчеркнем только, что эти идеи связаны с изучением *динамики* струн и сравнением динамики различных струнных моделей. Замечательно, что логика развития теории привела (или, по крайней мере, близко подводит) к выводу, что ключевыми для определения динамически выделенных моделей струнного объединения в рамках будущей теории струн с большой вероятностью окажутся вопросы о числе измерений пространства-времени и о его сигнатуре, т.е. фактически те самые вопросы, которые и побудили нас заняться поисками за рамками обычной локальной квантовой теории поля. Причем мало того, что эти вопросы оказываются ключевыми: уже просматривающиеся ответы на них, предлагаемые теорией струн, должны удовлетворять самым взыскательным вкусам: $D = 4$, а сигнатура равна $(-,+,+,+)$.

10. О литературе

Итак, мы завершили краткий обзор идей, составляющих основу новой области знания — теории струн. Выбранный способ изложения — мало формул, много слов — вряд ли может быть признан совершенно адекватным при обсуждении вопросов математической физики, зато он позволил представить в ограниченном объеме широкий спектр проблем. Чтобы хоть как-то скомпенсировать отсутствие необходимых подробностей, которые только и могут сделать теорию содержательной, мы приводим с небольшими комментариями список литературы по отдельным разделам теории струн. Список этот не просто неполный, в него сознательно не включено большинство оригинальных работ. Вместо этого, как и везде в тексте, по возможности отобраны более свежие и подробные статьи, в которых можно найти и недостающие ссылки.

К сожалению, сколько-нибудь подробных учебников по теории струн нет ни на русском языке, ни на английском. Пока что лучше всего методология и сам дух теории отражены в книге А. Полякова [200], хотя многие из результатов и даже целых направлений остались за рамками этой небольшой книги. Большой фрагмент теории струн — простейшие струнные модели и их свойства в древесном и однопетлевом приближении — представлен в монографии М. Грина, Дж. Шварца и Э. Виттена [21]. Фактически это сборник оригинальных статей, относящихся к нескольким годам "золотой эры" струнного сценария Великого объединения. Близка по тематике недавно вышедшая монография С. Кетова [201]. Намного более компактные обзоры на ту же тему [202 — 205] были опубликованы в специальном "струнном" выпуске УФН в 1986 г. — на пике "струнного бума"; см. также [206]. Положение теории струн накануне этого бума довольно полно отражено в обзоре Дж. Шварца [207], не потерявшем своей актуальности для приступающих к изучению предмета (правда, этот материал в значительной степени вошел в книгу [21]).

Краткое изложение философии струнного объединения см. в [22]. В перечисленных источниках практически не отражена современная теория струн, начиная с формализма римановых поверхностей ("многопетлевых вычислений"). Лучшим обзором на эту тему является статья В. Книжника в УФН [130]; см. также [125, 131, 208, 209]. Несколько адаптированное изложение тех же вопросов см. в [210] и в небольшой, но очень удачной по отбору материала книге [35]. Подробных обзоров, посвященных еще более свежим проблемам теории струн (общей теории конформных моделей, непертурбативным методам, матричным моделям) пока нет. Поэтому мы приведем ниже не только ссылки, но и очень сжатые комментарии по поводу отдельных понятий и методов, в основном выделенных жирным шрифтом в основном тексте.

Ряд математических объектов, используемых в современной квантовой теории поля, был представлен несколько лет назад в небольшом "словаре" М. Ольшанецкого, опубликованном в "УФН" [211]; намного более подробными и взаимодополняющими "словарями" могут служить книга-энциклопедия [212] и прекрасный обзор [213] — практически все рассматриваемые в них алгебро-геометрические объекты ныне встречаются в различных разделах теории струн.

11. Словарь терминов

АЛГЕБРА — прежде всего это большой раздел математики, рамки которого трудно строго очертить; см. по этому поводу [213]. Учебники по классической алгебре: [214, 215], по алгебраической геометрии: [216, 217]. Кроме этого широкого значения, слово АЛГЕБРА имеет и узкое. Оно используется как термин для обозначения множества с бинарной операцией — отображением $A \times A \to A$ (чаще всего это множество — МОДУЛЬ над коммутативным кольцом, а роль кольца обычно играют целые, рациональные, вещественные или комплексные числа). В стандартных вузовских курсах изучается ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА (фактически алгебра матриц). Особое значение в физике имеют АЛГЕБРЫ ЛИ, т.е. алгебры, в которых билинейная операция обладает свойствами коммутатора: $[a, a] = 0$, и выполнено тождество Якоби $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$. Наиболее доступные учебники по алгебрам Ли: [218 — 220]. Алгебры Ли появляются в физике как алгебры инфинитезимальных симметрии, однако имеет смысл рассматривать и нелиевские симметрии, например связанные с W-алгебрами. Структура алгебры Ли сама по себе не предполагает возможности *перемножать* элементы (генераторы) алгебры, поэтому вместе с алгеброй Ли часто приходится рассматривать ее бесконечномерную УНИВЕРСАЛЬНУЮ ОБВЕРТЫВАЮЩУЮ, порожденную всевозможными формальными произведениями генераторов и их линейными комбинациями. Из других конструкций, связанных с алгебрами Ли, в теории струн наиболее часто встречаются "конструкция Танаки—Крейна" ([220], гл. 12) — описание групп Ли в терминах их представлений (и ее составляющие типа теории коэффициентов Рака́ — $3j$-, $6j$-символов и т.п.) [62], квантовые деформации алгебр Ли (квантовые группы), системы корней и весов, орбиты коприсоединенных представлений (по поводу последних и их роли в общей теории представлений см. [220]).

АЛГЕБРА ВИРАСОРО — центральное расширение алгебры векторных полей на окружности (диффеоморфизмов окружности, $\mathrm{Diff}\, S^1/S^1$); можно рассматривать также алгебры голоморфных векторных полей на римановых поверхностях с отмеченными точками (АЛГЕБРЫ КРИЧЕВЕРА—НОВИКОВА [57]; см. также [149]). Появляется в теории струн в двух главных ролях: алгебры генераторов конформной симметрии [58 — 61] и (подалгебры) алгебры наблюдаемых в ряде (во всех?) струнных моделей. С исполнением второй из этих ролей связаны условия Вирасоро (Virasoro constraints), в теории матричных моделей [181 — 185] (в более узком классе моделей на статсуммы накладываются более жесткие W-условия). О геометрическом квантовании алгебры Вирасоро см. [126, 221, 222].

АЛГЕБРА НАБЛЮДАЕМЫХ в топологических и струнных моделях — аналог операторной алгебры в конформной теории. В отличие от конформного случая, наблюдаемые не зависят от точки на поверхности и потому их алгебра имеет больше шансов оказаться настоящей алгеброй (однозначной билинейной операцией). Ее ассоциативность однозначно связана с полнотой модели (унитарность достаточна, но не необходима). Алгебра может включать в себя как коммутативное кольцо (ground ring), так и алгебру Ли (алгебру симметрии). Алгебру наблюдаемых можно легко определить в топологических моделях, которые заданы в форме фактора конформной модели, т.е. когда центральный заряд нуль, а наблюдаемые представлены вершинными операторами нулевой размерности, либо интегралами от операторов единичной размерности (токов) — тогда алгеброй наблюдаемых становится просто фактор полной операторной алгебры (при таком подходе к струнной модели достаточно отбросить все вирасоровские потомки в правых частях операторных разложений). При определении алгебры наблюдаемых по 3-точечным функциям (при этом, правда, неясно, возникнет ли настоящая *алгебра*) надо рассматривать "киральные корреляторы" — аналоги конформных блоков. Из полных вещественных корреляторов извлекается информация только о симметричной части алгебры наблюдаемых (о коммутативном кольце). Значение алгебры наблюдаемых в том, что это наиболее важная инвариантная характеристика топологической модели (не зависящая ни от представления ее в виде конформной меры, ни от рода поверхности). Именно эта алгебра должна рассматриваться в качестве киральной (т.е. калиброваться) при переходе от струнной модели к (струнной) теории поля в пространстве-времени. Изучение алгебр наблюдаемых находится в начальной стадии; примеры простейших топологических моделей см. в [65], примеры струнных моделей — в [193, 194]. Специфика струнных моделей в наличии среди образующих алгебры операторов, изменяющих топологию поверхности. При представлении струнной модели в форме какой-нибудь топологической гравитации роль алгебры наблюдаемых играют РЕКУРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ [120, 121].

АЛГЕБРЫ ДВОЙНЫХ ПЕТЕЛЬ — деформации алгебр 2-петель — голоморфных отображений 2-мерных комплексных многообразий в обычные (конечномерные) алгебры Ли G. Об их возможной принципиальной роли в теории струн см. [40, 41]. Особое место занимает *алгебра Мойэла—Бейкера—Фэрли* [223 — 225], отвечающая случаю $G = \mathrm{U}(1)$; это деформация алгебры гамильтоновых векторных полей на римановых поверхностях (алгебры диффеоморфизмов, сохраняющих площадь). Деформация включает в себя центральной расширение ($2g$-параметрическое для поверхности рода g) и квантовую деформацию (последняя фактически изоморфна алгебре символов Вейля в квантовой механике [226]). Эта алгебра уже появилась в нескольких контекстах в теории струн: как аналог алгебры Вирасоро в теории мембран, как одна из интерпретаций алгебры Ли W_∞ [82 — 85], как алгебра наблюдаемых (точнее, ее "половина") в важной струнной модели "$c = 1$" [193, 194]. Одно из замечательных свойств алгебры Мойэла—Бейкера—Фэрли: квантовая деформация *не* разрушает структуру алгебры Ли, как это происходит для конечномерных алгебр и алгебр Каца—Муди (алгебр 0- и 1-петель).

АЛГЕБРЫ КАЦА—МУДИ — специфические бесконечномерные алгебры конечного роста, являющиеся центральными расширениями алгебр 1-петель. Лучшее руководство по "простым" алгебрам такого типа — книга В. Каца [227], а по их приложениям как алгебр 1-петель — [228]. Алгебры Каца—Муди в теории струн главным образом появляются в роли киральных алгебр. В универсальной обвертывающей алгебр Каца—Муди лежат другие важные киральные алгебры — Вирасоро и W. Наиболее непосредственным образом с алгебрами Каца—Муди связана конформная модель ВЗНВ, которая может рассматриваться как продукт геометрического квантования таких алгебр (действие МВЗНВ равно d^{-1} от формы Кириллова—Костанта [220, 63] алгебры Каца—Муди). Выделенность "простых" алгебр Каца—Муди, как киральных алгебр, в современной теории, по всей вероятности, временная и связана с относительной легкостью их изучения (наряду с алгебрами Каца—Муди с этой точки зрения представляют интерес также гиперболические алгебры и особенно алгебры 2-петель, а возможно, и D-, $(D - 1)$- или $(D/2)$-петель). Более фундаментальна для струнных приложения их роль как алгебр 1-петель: достаточно вспомнить, что замкнутая струна — это, в сущности, петля в пространстве-времени. О попытках использовать формализм алгебры петель для переформулировки результатов пертурбативной теории струн см. [229] (такого рода деятельность называется СТРУННОЙ ТЕОРИЕЙ ПОЛЯ).

W_G-АЛГЕБРЫ — введены А. Замолодчиковым в [73] как замкнутые ассоциативные *конечно*-порожденные операторные алгебры, содержащие операторы целого спина, превышающего 2. Общее обоснование существования классических W-алгебр, ассоциированных с простыми алгебрами Ли G, см. в [741], более современный взгляд представлен в [324, 325], структура соответствующего пространства модулей (аналога модулей комплексной структуры для алгебры Вирасоро $W_{\mathrm{sl}(2)}$) пока не понята. О сколько-нибудь глубоких *априорных* причинах существования замкнутых квантовых W-алгебр неизвестно (нетривиально, что они замыкаются на конечном числе образующих), имеется только громоздкая явная конструкция [76, 80] в терминах свободных **полей.** **W_G-алгебры** для $G = A_{N-1} = \mathrm{sl}(N)$ часто называются просто **W_N-алгебрами**. Для $G \neq \mathrm{sl}(2)$ **W_G-алгебры** не являются алгебрами Ли, при удачном выборе базиса алгебра порождающих генераторов квадратична. *Не*лиевские поправки формально исчезают в пределе $N \to \infty$, и, по крайней мере при наивном определении, алгебра W_∞ является алгеброй Ли [82 — 85]. W-алгебры могут рассматриваться как описывающие симметрии ряда моделей статистической физики и конформной теории поля, в последнем случае их принято включать в состав киральной алгебры и имеет смысл калибровать при переходе к струнным моделям. О соответствующих моделях W-СТРУН см. [86 — 93], теория W-струн находится пока в зачаточном состоянии. Подобно генераторам алгебры Вирасоро генераторы W-алгебр возникают в качестве уравнений для непертурбативных статсумм, например в двойном скейлинговом пределе многоматричных моделей [192, 181]. О связанных с дискретными многоматричными моделями специфических **$\widetilde{W}$-алгебрах** см. [71].

АНИОНЫ — частицы в $(2 + 1)$-мерной теории поля со специфической статистикой, отличной от бозонной, фермионной и парафермионной. Статистика характеризуется свойствами монодромии многочастичной волновой функции в фиксированный момент времени (т.е. правилами преобразования при перестановке аргументов — координат частиц). Обычно в D-мерных теориях *точечных* частиц с $D > 3$ монодромия *почти* не зависит от *способа* перестановки аргументов. Например, для двух частиц все траектории движения, приводящие в итоге к их перестановке, гомотопически эквивалентны, когда размерность пространства $D - 1 > 2$. Уже из этого примера видно, что случай $D - 1 = 2$ выделен: траектории могут запутываться и имеется $\mathbf{Z}$ классов гомотопической эквивалентности. При рассмотрении системы нескольких частиц ситуация немного усложняется и для $D > 3$: достаточно взять набор частиц, образующих репер в пространстве, чтобы понять, что бывают неэквивалентные траектории, поскольку $\pi_1(\mathrm{SO}(D-1)) \neq 0$. Для $D > 3$ эта фундаментальная группа равна $\mathbf{Z}_2$, и можно показать, что дальнейшее увеличение числа частиц не усложняет структуру классов эквивалентности траекторий. Все это проявляется в существовании *единственной нетривиальной* (*ферми-*

онной) *статистики* (и несколько ранее было обозначено словом "почти"); отметим еще, что парафермионы могут появиться, только если волновая функция неоднозначна — является сечение нетривиального расслоения.

Иллюстрацией этого рассуждения при $D - 1 = 3$ может служить известный простой опыт: надо взять два одинаковых треугольника, соединить соответствующие вершины тремя нитями (не натянутыми), после чего повернуть один из треугольников на 360°. Нити запутываются; попробуем их распутать, не меняя положения треугольников. Если бы нитей было две, это не составило бы труда (достаточно пронести одну из нитей над верхним треугольником), но если их три или больше, ничего не получится. Однако если повернуть треугольник не на 360°, а на 720°, любое количество нитей легко расцепится. Попутно стоит заметить, что вывести существование фермионной статистики из рассмотрения 2-частичных систем нельзя (хотя это часто делается): как видно из приведенных примеров, инвариантное утверждение относится только к многочастичным системам.

При $D = 3$ не только $\pi_1(\mathrm{SO}(2)) = \mathbf{Z}$ (что уже подразумевает существование бесконечного числа неэквивалентных статистик), но и монодромии многочастичных волновых функций ни в каком смысле не факторизуются на монодромии 2- или 3-частичных. Неэквивалентные статистики являются различными представлениями *группы кос* [212]. Такие нетривиальные статистики называются анионными. Учитывая коллективный характер анионной статистики (существенную зависимость от числа частиц), трудно надеяться на описание анионов в формализме, аналогичном грассмановым переменным для фермионов (во всяком случае, ничего подобного пока не придумано). Более адекватным представляется полевой формализм, описывающий анионную статистику как нелокальное явление. Именно, для ее описания вводится дополнительное U(1)-калибровочное поле, с которым взаимодействуют исходные частицы, а в качестве действия для этого поля берется абелев интеграл Черна—Саймонса $\theta\int A\mathrm{d}A$. Параметр θ различает неэквивалентные статистики. В таком формализме становится очевидным существование специфической анионной фазы (в которой можно проинтегрировать по исходным полям, чтобы квазичастицами были кванты самого поля A; иногда анионами называют именно их). В реальных физических системах, в которых ожидается проявление эффектов, связанных с анионной статистикой, поле A является составным (например, связано с фазой каких-нибудь конденсатов и т.п.). К таким физическим системам могут быть отнесены 2-мерные пленки, в которых имеется дробный квантовый эффект Холла [43]. Другой, пока чисто теоретический, объект — системы с анионной сверхпроводимостью [45]. Обзоры по физике анионов: [230].

ВЕСС-ЗУМИНОВСКИЕ ЧЛЕНЫ в действиях калибровочных квантово-полевых моделей — неявно инвариантные вклады в лагранжиан, изменяющиеся при калибровочных преобразованиях на полные производные (так что действие остается инвариантным). Простейший пример — члены Черна—Саймонса в нечетномерных теориях Янга—Миллса; они же часто возникают в нечетномерных СИГМА-МОДЕЛЯХ на однородных пространствах (это легко понять, поскольку существует описание таких сигма-моделей в терминах калибровочных полей). Аналогичные выражения могут быть построены не из векторных полей, а из антисимметричных тензоров более высокого ранга. В числе важных примеров такого рода топологическая модель А. Шварца, введенная им [231] для описания кручения Рэя—Зингера, а также весс-зуминовский член в действии ($D = 11$)-супергравитации. Теории, в которых *все* действие является весс-зуминовским членом одного из указанных типов, обычно топологические. К числу специфических свойств более общих моделей с ненулевыми кинетическими членами относится ренорминвариантность весс-зуминовских членов во всех порядках теории возмущений (исключения из этой теоремы связаны с аномалиями и легко учитываются) [34, 232]. Вопрос о непертурбативных перенормировках очень интересен (и имеет непосредственное отношение к задачам о *дробном* квантовом эффекте Холла и анионной сверхпроводимости; см. [45]). Примеры не черн-саймоновских весс-зуминовских членов имеются, например σ-**модели** в четных измерениях и особенно на многообразиях, не являющихся однородными. Иногда, правда, связь с членами Черна—Саймонса все равно прослеживается, но более тонкая. Так, весс-зуминовский член $\int \mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3$ в 2-мерной модели ВЗНВ связан с 3-мерным интегралом Черна—Саймонса.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ — большой раздел математической физики, связанный с рассмотрением динамических систем на геометрических многообразиях (чаще всего на групповых и однородных пространствах). Классическая теория динамических систем на однородных пространствах представлена в [233, 234]. О применении методов геометрического квантования к самому широкому кругу задач см. [235], о роли геометрического квантования на коприсоединенных орбитах групп в теории представлений см. [220,236,63].

ГЕТЕРОТИЧЕСКАЯ СТРУНА — критическая струнная модель, в которой левые и правые конформные блоки берутся из различных конформных теорий. Наиболее ограничительные требования на такие модели налагаются условиями модулярной инвариантности. Первый пример гетеротической струны предложен в статье [38], где в качестве левой составляющей была взята модель 10-мерной суперструны, а в качестве правой — модель компактификации 26-мерной бозонной струны на 16-мерный тор. Модулярная инвариантность при этом легко достигается, если тор построен по *четной самодуальной* решетке (такие бывают лишь в размерностях, кратных 8 [237]; в их числе Γ_8- и Γ_{16}-решетки корней алгебр F_8 и SO_{32}, а также *решетка Лича* Γ_{23} [238 — 241]). При *струнной* компактификации на корневые (а также весовые) решетки алгебры G в пространстве-времени возникает калибровочная симметрия с группой G, которая для 10-мерной гетеротической струны может быть одной из двух — $E_8\times E_8$ или SO_{32}. Гетеротическими является также большинство моделей 4-мерных струн [196 — 199], обсуждаемых в контексте струнного сценария объединения взаимодействий. Слово "гетеротический" происходит от биологического термина для обозначения особо жизнестойких гибридов.

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ — двойные абелевы накрытия над сферой, т.е. римановы поверхности рода g, которые могут быть заданы алгебраическими уравнениями вида

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(x-\lambda_i).$$

Преобразованиям из группы sl(2), действующей дробно линейными преобразованиями на координаты x на римановой сфере ("подложке"), можно зафиксировать три из $2g+2$ параметров $\{\lambda_i\}$ в точках 0, 1, ∞. Оставшиеся $2g-1$ параметров являются модулями комплексной структуры гиперэллиптических поверхностей. Роль модулярной группы играет конечная группа перестановок параметров $\{\lambda_i\}$. За исключением случаев $g = 0$, 1, 2 гиперэллиптические поверхности являются лишь подпространством коразмерности $g - 2$ в пространстве модулей (при $g = 3$ это дивизор в пространстве модулей, заданный условием обращения в нуль некоторой тета-константы). Гиперэллиптическая параметризация очень удобна для явных вычислений, поскольку в ней имеются простые формулы для всевозможных трансцендентных объектов, в том числе римановых тета-функций и их нулей — во многих отношениях гиперэллиптические функции изучены практически столь же хорошо, сколь обычные эллиптические. Об исчислении свободных полей на гиперэллиптических поверхностях и других абелевых накрытиях римановой сферы см. [130, 242 — 245]. О приложениях этих результатов к анализу модели суперструн см. [131, 246, 247]. К сожалению, эффективного обобщения такого формализма на неабелевы накрытия пока не найдено.

ГОЛОМОРФНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ — ключевое свойство двумерных конформных моделей, обусловливающее роль комплексной геометрии в теории струн. Заключается в представимости корреляционных функций в форме билинейных комбинаций голоморфных сечений некоторых расслоений над пространством модулей — КОНФОРМНЫХ БЛОКОВ. Идея о голоморфной факторизации сформулирована в основополагающей для конформной теории поля работе [58] с особым акцентом на случай рациональных моделей, для которых число независимых конформных блоков конечно. Часто термин "голоморфная факторизация" употребляется в более узком смысле — разложимости в *конечную* билинейную комбинацию конформных блоков. В струнных моделях на поверхностях со сложной топологией такое жесткое требование может быть выполнено только *до* интегрирования по пространству модулей. Один из результатов, лежащих в основе современной теории струн, — о голоморфной факторизации многопетлевых амплитуд в модели 26-мерных бозонных струн (и, следовательно, о сведении соответствующих мер на пространстве модулей к мере Мамфорда) — называется ТЕОРЕМОЙ БЕЛАВИНА—КНИЖНИКА [135, 130, 125]. Поучительна также ситуация с голоморфной факторизацией в модели суперструн [208].

ГРАССМАНИАН — пространство бесконечных матриц A_{nk}, профакторизованное по отношению эквивалентности

$$\sum_{n,k} A_{nk} y^n z^k \sim \sum_{n,k} A_{nk}\Big(y + \sum_{i>1} u_i y^j\Big)^n \Big(z + \sum_{j>1} v_j z^j\Big)^k$$

с любыми векторами u_i, v_i, — бесконечномерный аналог обычных грассманианов $U(2N)/U(N)\times U(N)$. На матрицы A_{nk} могут быть наложены некоторые условия типа конечности следов; в зависимости от жесткости этих условий различают грассманианы Сигала—Вильсона [148] и Сато [169, 170]. Первый возникает в конструкции Кричевера на римановых поверхностях конечного рода, второй, более общий, — при рассмотрении "бесконечных родов" и при описании решений условий Вирасоро в матричных моделях [186, 248, 249]. Конструкция Кричевера позволяет использовать грассманиан для описания УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ [154 — 157]. Анализ матричных моделей подтверждает мысль [40, 41] о наличии также и "дуальной" возможности — рассматривать (некоторое подмножество) грассманиана как пространство всех струнных моделей; см. [186]. Грассманиан — естественный объект в теории τ-**ФУНКЦИЙ.** Если рассматривать конечномерный грассманиан как множество гиперплоскостей в $2N$-мерном пространстве, то имеет смысл говорить о проекции одной гиперплоскости на другую и рассматривать искажение метрики и меры при такой проекции. Аналогичная конструкция в бесконечномерном случае позволяет отождестить τ-**функции с детерминантами** операторов проекции определенных "гиперплоскостей" [148]. По-видимому, большой интерес должно представлять подпространство в грассманиане Сато, выделенное *струнными уравнениями,* см. [186]; его инвариантное описание пока неизвестно.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ — большой раздел математической физики. Взаимодополняющие руководства по теории интегрируемых систем [3 — 7, 168]. Стержень теории интегрируемости — связь между бесконечной иерархией совместных уравнений вида

$$\partial u/\partial t_k = F_k\{u, \{t\}\}$$

(как правило, дифференциальных) и расслоениями над РИМАНОВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ. Линия рассуждений, ведущая от уравнений к расслоениям, обычно включает *представление Лакса* исходных уравнений (в том числе *формализм "одевания"*), "вспомогательную" линейную *спектральную* задачу, условие постоянства ее *монодромии* в процессе эволюции и интерпретацию этой монодромии в терминах римановых поверхностей (координатой на которых является *спектральный параметр*). В результате эволюция, задаваемая интегрируемой иерархией, интерпретируется как набор коммутирующих (прямолинейных с разными скоростями и направлениями) движений на якобиане поверхности (а ее модули — инварианты движения). Обратная цепочка начинается с задания такой системы a priori коммутирующих движений в пространстве модулей расслоения над спектральной поверхностью (движения на якобиане — простейший "абелев" пример, связанный с линейными, т.е. одномерными, расслоениями) и определения τ-**функций** как средних по свободных полям на этой поверхности, являющимся сечениями расслоения. Следующий шаг — система билинейных *уравнений Хироты* на τ-**ФУНКЦИИ,** являющихся простыми тождествами для корреляторов на римановых поверхностях (по существу, они отражают ортогональность операторов рождения и уничтожения). Сами интегрируемые уравнения получаются разложением нелокального уравнения Хироты в бесконечный ряд, членами которого являются обыкновенные (как правило, дифференциальные) уравнения. Примеры нелокальных интегрируемых иерархий см. в [250]. О проблемах, связанных с переносом этой конструкции на суперримановы поверхности, см. [251]. Основная роль интегрируемых систем в теории струн (а возможно, и в более широком контексте) — характеристика производящих функций непертурбативных корреляторов (непертурбативных статсумм) как τ-**функций.** В этом смысле интегрируемость должна рассматриваться как свойство эффективных действий, которые не следует далее усреднять (и в этом смысле интегрируемость является *классическим* свойством, не подлежащим квантованию). Тем не менее представляет значительный самостоятельный интерес и проблема квантования отдельных интегрируемых уравнений, рассматриваемых как модели теории поля (обычно 2-мерной, например модель sine-Gordon, нелинейное уравнение Шрёдингера и т.п.). Она важна также для понимания взаимосвязи конформных и интегрируемых систем, что существенно, в частности, для изучения интерполяций между конформными моделями. По поводу таких задач, а также о их связи с квантовыми группами см. [4, 172, 173]. Интересные предварительные результаты о применении формализма свободных полей к задаче о квантовании интегрируемых уравнений получены в [252].

Наиболее изученными на сегодня интегрируемыми иерархиями являются иерархия Захарова—Шабада, иерархия "двумеризованной" системы Тоды [253], иерархия Кадомцева—Петвиашвили (КР), иерархия Кортевега-де Фриса—Буссинеска (последние две — простейшие из A_n**-редукций** иерархии КР, связанные с простыми алгебрами Ли A_1 и A_2), а также "дискретная" иерархия цепочки Тоды (ЦТ) (в ней одно из "времен" дискретно). Все перечисленные иерархии уже появились при изучении матричных моделей, а тем самым и непертурбативные теории струн.

КВАНТОВЫЕ АНОМАЛИИ — явление нарушения симметрии при переходе от классической теории к квантовой [34]. Большинство аномалий может рассматриваться как свойство регуляризованных детерминантов дифференциальных операторов (см. 134]); более подробно о наиболее изученном случае двумерных детерминантов см. [35, 125, 130]. В этом случае различают "гравитационную", "вейлевскую", "голоморфную" и "квилленовскую" аномалии, связанные соответственно с зависимостями Det $\bar\partial$ от выбора координат, Det Δ от конформного множителя в метрике и с поправками к голоморфной факторизации Det Δ, как функции модулей комплексной структуры римановой поверхности и модулей линейных расслоений над ней (т.е. к представлению его в форме $|\mathrm{Det}\ \bar\partial|^2$). В современной интерпретации теории с *внутренними* аномалиями надо рассматривать как имеющие лишние степени свободы, отщепляющиеся в классическом приближении, но влияющие на характеристики типа вакуумной энергии, центрального заряда и т.п. Специфические 2-мерные аномальные модели рассмотрены с такой точки зрения в [254 — 256]. Важным примером аномальной степени свободы в теории струн является поле Лиувилля, интерпретация его в рамках указанной схемы приводит к естественному объяснению сигнатуры Минковского как "аномального эффекта" (более сложные сигнатуры — несколько плюсов, несколько минусов — получаются аналогичным образом в моделях W-струн [86 — 93]). При таком подходе безаномальными (КРИТИЧЕСКИМИ) называются модели, у которых не происходит изменения симметрии при переходе к классическому пределу. (Например, у некритической струны в плоском D-мерном пространстве-времени имеется глобальная симметрия $\mathrm{SO}(D - 1)$, а в классическом приближении — более широкая — $\mathrm{SO}(D - 1,1)$. В критической размерности $D = 26$ лоренц-симметрия $\mathrm{SO}(25,1)$ сохраняется и на квантовом уровне.) Условие критичности оказывается существенным для наличия у модели нетривиального низкоэнергетического предела и потому играет важную роль при построении струнных моделей Великого объединения.

КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ открыты группой Л. Фаддеева при изучении интегрируемых систем [4]. Известный подход к квантовым группам, использующий их связь с алгебрами Хопфа, предложен В. Дринфельдом [257]. Несколько иной взгляд на квантовые группы, как на симметрии квантовых пространств, представлен в [258]. Теория квантовых групп — одна из бурно развивающихся областей математики, ее струнная интерпретация связана с конформными и интегрируемыми системами. Одна из наиболее простых — связь квантовых $3j$-символов (коэффициентов Клебша—Гордана) с монодромиями конформных блоков в теории свободных безмассовых полей. Имеется тесная связь с теорией узлов. Среди перспективных задач — создание полной теории "квантовых" q-гипергеометрических функций Гаусса (возникших в теории разностных уравнений аналогично тому, как обычные гипергеометрические функции возникают при решении дифференциальных). Обзоры: [259].

КИРАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ. Полной киральной алгеброй конформной модели естественно было бы назвать операторную алгебру *всех* киральных вершинных операторов. Этот объект, однако, весьма сложен и даже не является алгеброй в строгом смысле этого слова. Обычно киральной алгеброй называют какую-то подалгебру универсальной обвертывающей алгебры Каца—Муди, адекватную рассматриваемой конформной модели (см., например, [62]). При переходе от конформных моделей к струнным вся киральная алгебра или ее часть калибруется. Наиболее правильно было бы называть киральной алгеброй в точности калибруемую симметрию. Это не является, однако, определением во *внутренних* терминах конформной модели, поэтому в литературе по конформной теории оно не используется.

КОМПАКТИФИКАЦИЯ — идея, восходящая к моделям Калуцы—Клейна, согласно которой свойства фундаментальных взаимодействий (калибровочные группы, состав полей, константы связи) могут быть закодированы в геометрических свойствах некоторого компактного многообразия. Буквальная интерпретация идеи состоит в том, что пространство имеет дополнительные компактные измерения, движение вдоль которых невозможно, пока энергии частиц не превышают обратного радиуса компактификации, задающего масштаб масс. В низкоэнергетическом секторе теории при этом остаются только нулевые моды полей на компактном многообразии, чьи характеристики могут быть определены в терминах геометрии, а иногда и топологии этого многообразия. В частности, калибровочная группа связана с изометрией многообразия, число поколений — с числом нулевых мод, константы связи — с интегралами перекрытия нулевых мод и т.п. Обзор идей компактификации см. в [22 — 26]. Эти идеи находят себе место и в струнных моделях. Из специфических черт струнной компактификации можно выделить две. Первая: изменение соотношения калибровочной группы и изометрии — калибровочная группа связана с более тонкими характеристиками компактного многообразия и может превышать группу изометрии (важный пример — появление калибровочной группы G при компактификации на тор, порожденный решеткой весов G — механизм Френкеля—Каца [260]; он использован в простейших моделях гетеротических [38] и 4-мерных [196 — 198] струн). Вторая: эквивалентность компактификации на различные многообразия. Это обстоятельство делает вопрос о "существовании" *компактных* измерений при струнной компактификации не вполне осмысленным: их число и даже само наличие зависят от выбора одной из эквивалентных моделей. В частности, уже упомянутые модели гетеротических струн (в том числе "4-мерных струн") допускают интерпретацию как компактифицированные теории, но могут интерпретироваться и другими способами.

КОНСТРУКЦИЯ КРИЧЕВЕРА — отображение, ставящее в соответствие набору (риманова поверхность, расслоение над ней, отмеченная точка, локальная система координат в ее окрестности, локальная тривиализация расслоения) точку бесконечномерного ГРАССМАНИАНА Сигала—Вильсона.

Чтобы получить это отображение, достаточно разложить сечение расслоения с фиксированной особенностью в отмеченной точке в ряд Лорана:

$$f(z) = (z - z_0)^{-n}(1 + \sum_{K>0} A_{nk}(z - z_0)^k;$$

тогда матрица A_{nk} удовлетворяет необходимым условиям ограниченности следов и задает класс эквивалентности при факторизации по заменам координат, голоморфным в окрестности z_0, т.е. точку грассманиана. Если рассмотреть сечения с существенными особенностями $\sim \exp \sum_m t_m z^m$ ("функции" Бейкера—Ахиезера), то точка грассманиана зависит от "времен" t_m (модулей расслоения или "граничных условий") достаточно простым ("интегрируемым") образом. Подробности см. в [147, 148]. Всевозможные характеристики струнных моделей, начиная от киральных алгебр [57, 149] и кончая детерминантами и даже струнными амплитудами, могут быть переписаны в терминах (классов эквивалентности) матриц A_{nk}. Это составляет содержание СТРУННОГО ОПЕРАТОРНОГО ФОРМАЛИЗМА [151 — 153]. Сам грассманиан может, по-крайней мере в принципе, использоваться как представление УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ [154 — 157]. Особый интерес при этом представляет вопрос о "замыкании" грассманиана — о "поверхностях бесконечного рода"; специфические условия сходимости, определяющие грассманиан *Сигала—Вильсона* [148], возможно, неоправданно ограничительны, и имеет смысл рассматривать более общий грассманиан Сато [169, 170] (особенно ясна такая необходимость в контексте матричных моделей [248, 249, 186]). Грассманиан (или его часть) может быть использован также в ином качестве — конфигурационного пространства "единой теории поля": точками грассманиана могут нумероваться различные струнные модели; см. [186].

КОНФОРМНЫЕ МОДЕЛИ возникают при изучении фазовых переходов в (2 + 1)-мерных системах, при интерпретации многомерных дифференциальных уравнений в терминах свойств симметрии двумерных СИГМА-МОДЕЛЕЙ и при построении струнных моделей после интегрирования по метрикам (в последнем случае до интегрирования тоже могла иметься конформная модель). Формализм конформной теории поля, позволяющий вычислять корреляционные функции в конформных моделях, берет свое начало в классической работе [58], где введены основные понятия голоморфной факторизации, алгебры Вирасоро, рациональных, унитарных и минимальных конформных моделей и получена классификация последних (т.е. фактически классификация минимальных замкнутых операторных алгебр), чем установлена (до сих пор не вполне *понятая*) связь с теорией представлений алгебры Вирасоро [160]. Главный следующий шаг — создание формализма безмассовых свободных полей [161] по аналогии с теорией модулей Верма [160]. Важную роль в этом формализме играют экранирующие операторы [161] — аналоги операторов Фейгина—Фукса в теории представлений (их интерпретация на языке БРСТ-комплекса дана в [163]). О распространении формализма свободных безмассовых полей на модель ВЗНВ и ее редукции см. [79, 131, 158, 159, 209, 261] (в [158] также предложена интерпретация экранирующих операторов как связанных с нелокальной заменой координат в функциональном интеграле). О попытках классификации рациональных конформных теорий см. [62]. Об описании топологических моделей и 2-мерной квантовой гравитации (в том числе *не*критических струн) в терминах конформных моделей см. соответственно [262, 263] и [122 — 126].

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ (теория случайных матриц) — отдельная большая наука (имеется даже специальный ежемесячный журнал) о многократных матричных интегралах, в том числе о функциональных интегралах с матричнозначными полями. Матрицы не обязательно квадратные, большую роль в приложениях играют, например, векторные модели. Наиболее разработана теория для интегралов с гауссовским распределением, но представляют интерес и неквадратичные действия. В физике матричные модели встречаются в различных контекстах: в методе реплик, в теории спиновых стекол и нейронных сетей (например, векторная модель Киркпатрик [18]), в задаче о квантовой гравитации, в теории Янга—Миллса и т.п. Матричные модели используются также при изучении задач, связанных с ленточными графами, в том числе при исследовании топологии пространств модулей расслоений над римановыми поверхностями [120, 129]. Как правило, рассматриваются матричные модели со скалярным действием (т.е. в показателе экспоненты, определяющей меру интегрирования, стоит матричный след) и вычисляются корреляторы скалярных же величин. Уравнения движения и тождества Уорда в таких матричных моделях часто называют ПЕТЛЕВЫМИ УРАВНЕНИЯМИ. Матричные модели с достаточно большим числом *параметров* — констант связи или внешних полей — тесно связаны с интегрируемыми системами.

Грубо говоря, число внешних параметров должно совпадать с числом переменных интегрирования. В моделях типа

$$Z\{t_k\} = \int \mathrm{d}M \exp \sum_k t_k \mathrm{Tr}\, M^k \quad [184,\ 185]$$

такими переменными фактически являются собственные значения M и для матриц бесконечного размера получается однопараметрическое семейство, каким является и набор бесконечного числа **"времен"** $\{t_k\}$. В моделях Концевича

$$Z_K\{\Lambda\} = \int \mathrm{d}X \exp\left(\sum_k t_k \mathrm{Tr}\, X^k\right) + \mathrm{Tr}\, \Lambda X \quad [186]$$

число собственных значений одинаково у матриц X и Λ. Источник интегрируемости в матричных моделях такого сорта состоит в возможности свести интегрирование к замене внешних параметров (типа выбора калибровки). Более интересно то, что естественная параметризация действия в матричном интеграле оказывается естественной и с точки зрения интегрируемости, например $Z\{t_k\}$ является **τ-функцией** цепочки Тоды прямо в переменных $\{t_k\}$.

Матричные интегралы как функции параметров оказываются **τ-функциями** интегрируемых иерархий. Получаются, однако, не произвольные **τ-функции**, а ограниченные дополнительным условием, по историческим причинам [177 — 180] называемым СТРУННЫМ УРАВНЕНИЕМ (оно зависит от модели). Инвариантное описание подмножества в грассманиане Сато, выделенного струнным уравнением, остается открытой задачей (см. о ней в [186, 248, 249, 264]). Одна из причин актуальности матричных моделей для теории струн — в существовании построенного на их основе формализма 2-мерной гравитации, эффективного как в пертурбативной, так и в непертурбативной области [177 — 180] и тесно связанного с топологической гравитацией [120, 187 — 190]. Фактически с каждой (устойчивой относительно непертурбативных поправок) струнной моделью можно связать (много)матричную, точнее, ее *двойной скейлинговый непрерывный предел* [177 — 180], который снова может быть записан в форме *матричной* модели (модели Концевича) и в определенном смысле одинаков для всех исходных моделей (см. подробности в [186]). После нахождения более инвариантной формулировки (не использующей промежуточную стадию с матричным интегралом, например сразу в терминах **τ-функций** или грассманиана) предполагается использовать эти результаты для построения "единой теории поля" — естественного объединения всех струнных моделей. Важнейшие типы матричных моделей, рассматриваемые в связи с задачей о 2-мерной гравитации, таковы. Дискретная 1-матричная модель

$$\int \mathrm{d}M \exp \sum_k t_k \mathrm{Tr}\, M^k;$$

см. [184] о наиболее важном случае эрмитовых матриц M (а также [265] о модели с унитарными M, [266 — 268] — о модификации модели для случая комплексных квадратных матриц M); рассматриваются также модели с ортогональными, вещественными и даже векторными M (т.е. матрицами размера $1\times N$). Эрмитова *дискретная* 1-матричная модель может быть также записана в форме МОДЕЛИ КОНЦЕВИЧА [186]

$$F_V(Q)\int \mathrm{d}X \exp \mathrm{Tr}(-V(X) + V'(Q)X)$$

с *потенциалом*

$$V(X) = (X^2/2) - n \log X,$$

где n — размер матрицы M, а $t_k = T_k + (\delta_{k2}/2)$, $T_k \equiv (1/k)\mathrm{Tr}\, Q^{-k}$. **Двойной** скейлинговый непрерывный (т.е. предел этой модели; подробности об этом пределе, когда $n \to \infty$ при определенных условиях на поведение коэффициентов t_{2k} и $t_{2k-1} = 0$, см. в [268]) описывается моделью Концевича с $V(X) = X^3/3$ [186]. При $V(X) = X^{K+1}/(K+ 1)$ модель Концевича описывает двойной скейлинговый непрерывный предел K-матричной дискретной модели

$$\Big(\prod_a^K \int \mathrm{d}M_a \exp \sum_k t_k \mathrm{Tr}\, M_a^k\Big) \exp(M_1 M_2 + M_2 M_3 + \ldots + M_{K-1} M_K).$$

При любом $V(X)$ статсумма модели Концевича как функция времен T_k **является τ-функцией** КР-иерархии, удовлетворяющей струнному уравнению $L^V_{-1}\tau = 0$.

МЕТОД РЕПЛИК — специфическая модификация диаграммной техники для случая, когда имеются взаимодействия без передачи энергии. В этом случае имеется дополнительное условие на допустимые диаграммы: после удаления всех линий, отвечающих указанным взаимодействиям, они должны оставаться связными (нельзя присоединять к диаграмме лишние петли линиями таких взаимодействий и больше ничем). Взаимодействия без передачи энергии не редкость в физике, но наиболее стандартный пример — эффективные взаимодействия квазичастиц за счет перерассеяния на случайных примесях в моделях физики твердого тела [269] (из наиболее интересных современных приложений выделим квантовый эффект Холла и спиновые стекла). Проблема адекватного изменения диаграммной техники сводится, фактически, к задаче о вычислении $\langle\langle \log Z\rangle\rangle$ вместо $\langle\langle Z\rangle\rangle$, где $\langle\langle \ldots\rangle\rangle$ означает усреднение по примесям. Метод реплик основан на идее о представлении log Z как предела $Z^N - 1$ при

$N \to 0$. **Значения** $\langle\langle Z^N\rangle\rangle$ при целых N могут быть найдены, если рассмотреть новую систему, состоящую из Nкопий (реплик) исходной. В конце вычислений в ответах надлежит устремить Nк нулю. В качестве простейшего качественного результата, достигаемого с использованием метода реплик, можно упомянуть объяснение андерсеновской локализации как конфайнмента (связанного с асимптотической свободой) в сигма-моделях, описывающих распространение квазичастиц в поле случайных примесей. Строгого обоснования метода реплик нет; более того, следует иметь в виду, что наиболее интересные эффекты обнаруживаются при довольно рискованном обращении с этим методом, например при нарушении U(N)- или SO(N)-симметрии между репликами или при использовании эффектов, связанных с асимптотической свободой, которая может исчезать в точке $N = 0$, и т.п. Известной альтернативой методу реплик (правда, пока с более узкой областью применения) является суперсимметричный формализм. О применении метода реплик в теории спиновых стекол см. в [18], в теории квантового эффекта Холла см. в [270, 271]. В последнем случае задача сводится к анализу специфической сигма-модели на грассманиане $U(2N)/U(N)\times U(N)$, 2-мерной с топологическим членом в статическом случае или 3-мерной с весс-зуминовским членом в нестатической ситуации (например, при учете кулоновского взаимодействия, ответственного за *дробный* квантовый эффект Холла; аккуратный вывод 3-мерной модели в литературе отсутствует). Объяснение самого квантового эффекта Холла после этого сводится к анализу ренормализационных свойств таких **σ-моделей** (см. [272 — 274] с статическом случае, аналогичное исследование в нестатическом случае пока не проводилось).

МОДЕЛИ ТОДЫ — важный класс моделей 2-мерной квантовой теории поля. Различают конформные и интегрируемые (но не конформные) модели Тоды. Они строятся по простым алгебрам Ли серий A—D—E (simply-laced). Количество полей равно рангу алгебры, они записываются в форме векторов на картановской плоскости, действие в конформной калибровке для метрики имеет вид

$$\int\left[\frac{1}{2}|\partial\vec{\phi}|^2+\sum_{\alpha}e^{i\vec{\alpha}\vec{\phi}}\right],$$

где $\vec{\alpha}$ — все *простые* корни алгебры в случае конформной модели Тоды; для получения интегрируемой модели надо добавить к этому, множеству еще один "младший" корень (тот же, который добавляется при построении алгебры Каца—Муди по данной простой алгебре Ли). В случае алгебры sl(2) конформная модель Тоды известна как теория Лиувилля, а интегрируемая — как модель sine-Gordon. Представляют интерес также модели с измененным знаком перед кинетическим членом и без i в показателях экспонент. О теории моделей Тоды как классических динамических систем см. [275]. На квантовом уровне конформные модели Тоды могут рассматриваться как редукции модели ВЗНВ [94]. Модели Тоды (а также их суперсимметричные аналоги) играют большую роль в теории конформных моделей (они связаны одновременно и с МВЗНВ, и с конформными сигма-моделями, описываемыми в терминах квазиоднородных полиномов; см. [115, 116] о таком описании и [166] о его связи с моделями Теды), а также в теории W-гравитации [86 — 93].

МОДЕЛЬ — термин из теории групп Ли.

Во избежание недоразумений предупредим, что во всем тексте данного обзора слово "модель" используется в обычном смысле, не имеющем никакого отношения к теории групп.

Обозначает набор представлений группы G, взятых с единичными кратностями. Понятие и первые примеры моделей введены в [276]. Модели естественным образом возникают (как множество W_G-первичных полей) при рассмотрении струнных компактификаций на корневые и весовые решетки алгебр G из серий A—D—E (simply-laced), а также в теории ВЗНВ [277, 278].

МОДЕЛЬ ВЕССА—ЗУМИНО—НОВИКОВА—ВИТТЕНА (МВЗНВ, MWZNW) — двумерная теория с уравнениями движения $\bar{\partial} J^{\alpha} = 0$, где $J^{\alpha}(z)$ образуют алгебру Каца—Муди по отношению к одновременным коммутационным соотношениям. В отличие от некиральных уравнений $\partial_a J^{\alpha}_a = 0$, условия аналитичности не могут быть выведены из локального действия. Действие модели ВЗНВ было предложено Э. Виттеном [279 — 281] и содержит специфический неоднозначный член Весса—Зумино (первый пример модели с такими членами содержится в [282]). Подобные лагранжианы (по сути — элементы когомологий, а не обычные меры) изучались в общем контексте С.П. Новиковым [283]. Это действие допускает также интерпретацию как d^{-1} от формы Кириллова—Костанта для алгебры Каца—Муди [63]. Для абелевой алгебры весс-зуминовский член отсутствует. Тензор энергии-импульса МВЗНВ задается ФОРМУЛОЙ ХАЛПЕРНА—СУГАВАРЫ [284, 285]. Интересными редукциями МВЗНВ являются ОКО-косет-модели [72], редукции Дринфельда—Соколова [77 — 79]. Редукции Дринфельда—Соколова приводят к естественному возникновению W-алгебр. Представляет интерес также "обобщенная конструкция Сугавары" [67 — 70], чей алгебро-геометрический смысл пока невыяснен. Современная теория МВЗНВ и ее редукций — одна из важных составляющих теории струн. Основополагающие результаты о квантовой МВЗНВ получены в [286]; там же см. вывод УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА-ЗАМОЛОДЧИКОВА (основного тождества Уорда для МВЗНВ). О формализме свободных безмассовых полей для этого класса моделей см. [158, 131, 209]. Важный подход к описанию редукций как "калиброванных МВЗНВ" развивается в [99]. Связь с квантовыми группами описана в [278], с 3-мерной моделью Черна—Саймонса – *в* [64, 117, 118].

МОДЕЛЬ КОНЦЕВИЧА — важная матричная модель, заданная интегралом

$$\mathscr{L}_V[Q] \sim \int \mathrm{d}X \exp(-\mathrm{Tr}\, V(X) + \mathrm{Tr}\, V'(Q)X)$$

(коэффициент перед интегралом определенным способом Зависит от "потенциала" V и матрицы Q). Описывает одновременно разнообразные модели топологической гравитации (в том числе простейшую [120], при $V(X) \sim X^3$ [129]) и двойной скейлинговый непрерывный предел всех многоматричных моделей, т.е. струнные модели, построенные по всем минимальным вирасоровским конформным моделям (причем K-матричной модели отвечает $V(X) \sim X^{K+1}$). При любом выборе потенциала $_V[Q]$ является τ-функцией КР-иерархии как функция времен

$$T_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\, Q^{-k}$$

и удовлетворяет струнному уравнению (последнее, а значит, и точка Грассманиана, с которой ассоциирована **τ-функция,** зависит от V). Все подробности см. в [186].

МОДЕЛЬ ЧЕРНА—САЙМОНСА — квантовая теория поля янг-миллсовского калибровочного поля A в пространстве-времени $D = 2n - 1$ измерений с лагранжианом $d^{-1}(\mathrm{Tr}\, F^n)$. Поскольку действие не зависит от метрики, модель фактически является топологической, хотя вопрос о сохраняющей топологическую структуру регуляризации в общем случае не решен (наивная регуляризация с помощью кинетического члена $\mathbf{Tr}\, F^2_{\mu\nu}$ с этой точки зрения неудачна). Модель Черна—Саймонса особенно популярна при $D = 3$, когда пространством состояний является пространство плоских связностей на двумерной поверхности, имеется тесная связь с 2-мерными конформными теориями (особенно *с* МВЗНВ и их редукциями), квантовыми группами и теорией узлов; см. по этим поводам [64, 99, 117, 118]. О 5-мерной модели Черна—Саймонса см. [287]. Модели Черна—Саймонса фигурируют также в теории квантовых аномалий [34], а также во многих физических приложениях. Последние связаны с тем, что зесс-зуминовские члены, в том числе и черн-саймонсовский, естественно возникают в эффективных действиях нечетномерных теорий (например, как аномалии фермионных детерминантов [34, 288 — 292]), а их появление приводит, во-первых, к нарушению глобальной симметрии — пространственной четности, а во-вторых — к нетривиальным динамическим эффектам, особенно при $D = 3$: с членом Черна—Саймонса связаны массивная электродинамика [293, 294], анионная статистика [230] и пр.

МОДУЛИ — параметры, описывающие непрерывные семейства классов эквивалентности объектов алгебраической геометрии. К числу таких классов относятся римановы поверхности (класс эквивалентности по отношению к голоморфным заменам координат) и расслоения над ними, а также многомерные комплексные пространства. (В некоторых случаях с помощью таких пространств можно построить *конформные* сигма-модели; пример — пространства Калаби—Яо. В этой связи часто говорят о модулях соответствующих конформных моделей, имея в виду модули самих пространств.) Точное определение пространства модулей, учитывающее различные тонкости, всегда возникающие при описании классов эквивалентности, дается в терминах *схем* (самое короткое описание см. в статье "Модулей теория" в [295]). При изучении струнных моделей наиболее часто встречается следующая конструкция, связанная с киральными алгебрами (задающая *локальную* структуру соответствующего пространства модулей, в том числе его размерность). С генератором $K(z)$ киральной алгебры спина j связано поле $\varepsilon(z)$ спина $1 - j$ так, что инфинитезимельное преобразование "симметрии" задается оператором

$$\oint \langle \varepsilon K \rangle$$

(угловые скобки означают скалярное произведение в пространстве, где K и ε принимают значения, например в слое расслоения). Почти всякое поле $\varepsilon(z)$, будучи заданным на малой (стягиваемой) окружности, голоморфно продолжается либо внутрь ее, либо наружу. Модули оказываются связанными с тем (обычно конечным) числом полей $\varepsilon(z)$, которые не продолжаются ни внутрь, ни наружу; для линейных расслоений на замкнутых поверхностях их число равно $(2j - 1)(g - 1) + n$ (где g — род поверхности, а n — число отмеченных точек; $\varepsilon(z)$ разрешено иметь простые полюса). Простейший пример: с алгеброй Вирасоро описанным образом связаны модули комплексной структуры самой поверхности [149].

МОДУЛЬ — алгебраический термин, синоним векторного пространства, т.е. множества со сложением и умножением на элементы некоторого кольца с требованием дистрибутивности. МОДУЛЬ ВЕРМА — представление старшего веса, полученное как линейная оболочка формальных произведений любого числа понижающих генераторов алгебры Ли на старший вес. Модуль Верма является приводимым представлением, если в нем имеются элементы нулевой нормы — НУЛЬ-ВЕКТОРЫ. В отличие от некоторых неприводимых представлений, бесконечномерный (как векторное пространство) модуль Верма имеет простую структуру. В случае алгебр Каца—Муди, Вирасоро и W модули Верма легко строятся из свободных безмассовых полей. Подробности о случае Каца—Муди см. в [227], об алгебре Вирасоро — в [160].

ОПЕРАТОРНАЯ АЛГЕБРА, ОПЕРАТОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — одно из основных понятий квантовой теории поля. Из-за голоморфной факторизации операторная алгебра резко упрощается в случае 2-мерных конформных моделей [58 — 61]. Она сопоставляет каждой паре операторов $\hat{a}(z_1)\hat{a}(z_2)$ бесконечный ряд по степеням (z_1-z_2) (и, возможно, логарифмов) с операторными коэффициентами. Сингулярные члены разложения, которых обычно конечное число, могут быть интерпретированы как одновременные коммутационные соотношения; при этом тождества Якоби справедливы, если рассматривается полный набор операторов. В таком случае говорят, что операторная алгебра ассоциативна. Это требование *не* выполнено автоматически, если операторная алгебра задана своими "3-точечными функциями" — отображением тензорного куба пространства полей в комплексные числа (в такой формулировке, сохраняющей информацию о несингулярных членах операторного разложения, очевидно, что операторная алгебра не является алгеброй в обычном смысле: по двум полям третье определяется неоднозначно). При некоторых дополнительных условиях операторная алгебра может быть продолжена до отображений тензорных степеней пространства полей в сечения расслоений над пространствами модулей римановых поверхностей с отмеченными точками (эти сечения называются КОНФОРМНЫМИ БЛОКАМИ). Определенные упрощения возникают при рассмотрении *рациональных* конформных моделей; см. обзор соответствующей теории в [62]. Попытка дать содержательное формальное определение операторной алгебры описана в [296]. Наибольший интерес представляет операторная алгебра, в каком-то смысле профакторизованная по киральной (например, по алгебре Вирасоро), т.е. ограниченная на множество первичных полей. Прямолинейные методы такой "проекции" приводят к понятиям ПРАВИЛ СЛИЯНИЯ (fusion rules) [62] и АЛГЕБРЫ ВЕРЛИНДЕ [297]. Более содержательным является *калибрование* киральной алгебры, т.е. переход к соответствующей струнной (топологической) модели. При описании получившейся алгебры наблюдаемых — основной инвариантной характеристики струнной модели — роль конформных блоков играют матрицы монодромии (более того, во многих случаях это Z_2-монодромия, т.е. при обходе по замкнутому контуру может набежать только четное или нечетное кратное фазы $2\pi i$). Иногда получившаяся алгебра наблюдаемых является настоящей алгеброй: по двум наблюдаемым третья восстанавливается *однозначно*. Однако и в этом случае она не обязана быть антикоммутативной алгеброй Ли, в нее часто входит коммутативное подкольцо (ground ring; наиболее важные примеры см. в [298 — 300, 194]).

ОТКРЫТЫЕ и НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ СТРУНЫ — струнные модели, определенные на открытых (т.е. с границей) и/или неориентируемых поверхностях. Поскольку такие поверхности могут иметь любое число ручек, модели открытых струн неизбежно включают в себя и замкнутые. Открытые и неориентируемые поверхности могут рассматриваться как факторы специфических замкнутых поверхностей (дублей [301]) по $\mathbf{Z}_2$-симметрии. Пространства модулей дублей образуют вещественные подпространства половинной размерности в обычных комплексных пространствах модулей, а меры на этих подпространствах, определяющие корреляторы в теории открытых струн, просто совпадают с голоморфными составляющими обычных струнных мер (для замкнутых струн); см. [40 — 42]. Выколотые точки могут рассматриваться как специфический тип границы поверхности; то же относится и к выколотой окрестности, фигурирующей в конструкции Кричевера: с этим связаны параллели между теорией открытых струн и струнным операторным формализмом; см. [40]. В P-адическом случае аналог теории открытых струн значительно проще аналога замкнутых: в то время как первые описываются в терминах обычных P-адических чисел из поля $\mathbf{Q}_P$, последние заданы над полем Ω_p — пополнением алгебраического замыкания $\mathbf{Q}_P$ (весьма сложным аналогом комплексификации — перехода от $\mathbf{R}$ к $\mathbf{C}$).

РЕКУРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ — форма записи алгебры наблюдаемых в струнных моделях и особенно в топологической гравитации. Это соотношения между различными корреляторами, в том числе на поверхностях различного рода и с разным числом отмеченных точек (наблюдаемых). Впервые систематически рассматривались Э. Виттеном (см. [120]; там же введен сам термин recursion relations). См. также [121].

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ И ВЕСС-ЗУМИНОВСКИМИ ЧЛЕНАМИ — одна из классических задач современной квантовой теории поля, с трудом поддающаяся анализу. Наиболее надежные утверждения: ренорминвариантность самих топологических и весс-зуминовских членов (с точностью до легко учитываемых аномалий квантовых детерминантов) во всех порядках теории возмущений. В ряде моделей (например, сигма-моделей на однородных пространствах) ожидается, что при учете "непертурбативных" эффектов возникает нетривиальная фиксированная точка (нуль **β-функции**, конформная модель) при значении коэффициента перед топологическим членом $\theta = (2n + 1)\pi$. Непертурбативные эффекты приводят также к перенормировке топологического члена [272]: общая картина ренормгрупповой эволюции в двухзарядной теории изображена на рис. 2. Этот результат легко получается [272] в приближении инстантонного газа [302, 303], пример *точного* вычисления в 1-мерной решеточной модели см. в [304]. Своеобразный экспериментальным подтверждением этих результатов является целочисленный (статический) квантовый эффект Холла, где описанная картинка наблюдается на опыте [305], а теория задается **σ-моделью** с топологическим зарядом [270 — 274]. Важное приложение этого результата — выделенность струнных моделей в 4-*мерном* пространстве-времени, где имеется специфический топологический заряд: индекс пересечения (мировых) поверхностей [200]. Никаких серьезных результатов о непертурбативной перенормировке весс-зуминовских членов пока неизвестно (см.

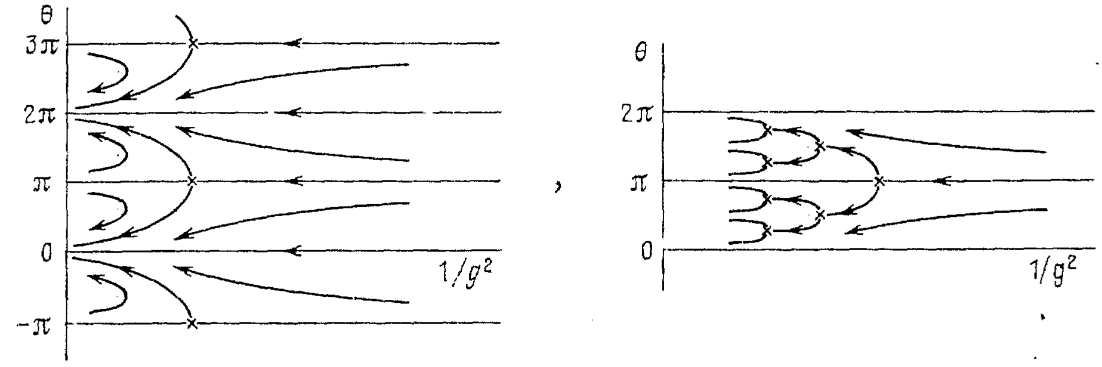

Рис. 2

[306] о трудностях даже инстантонного приближения). Экспериментальные данные по дробному (нестатическому) квантовому эффекту Холла, возможно, следует истолковать как указание на то, что ренормгрупповое поведение таких моделей должно быть еще более интересным (см. рис. 2; теперь θ — коэффициент перед весс-зуминовским членом): должно иметься *много конформных точек* ("лестница" на этом рисунке вызывает множество аналогий, в том числе с P-адическими деревьями Брюа—Титса и спиновыми стеклами или с картинками бифуркаций Фейгенбаума и т.п.).

Я признателен Д. Хмельницкому за убедительное объяснение факта наличия множества конформных точек.

В применении к эффекту Холла в обоих случаях θ — холлловская проводимость σ_{xy}, g^{-2} — обычная проводимость σ_{xx}, стрелки указывают на направление ренормгрупповой эволюции с ростом эффективного размера образца, реально наблюдаемыми являются значения на "концах" стрелок — "одетые" параметры, в их начале — затравочные параметры, значения которых определяются микроскопическими свойствами вещества и не универсальны. Разница между двумя ситуациями в возможности и невозможности пренебречь взаимодействием электронов в образце друг с другом, а не только с примесями и внешними полями. Обращение в нуль "одетого" значения σ_{xx} известно как "локализация", оно же — явление асимптотической свободы (неограниченный рост g с ростом размеров). При $\sigma_{xy} = (2n + 1)\pi$ происходит "делокализация"; на этих линиях имеются конформные точки (обозначены крестиками).

РЕПАРАМЕТРИЗАЦИОННЫЕ ДУХИ возникают при фиксации калибровки в процессе вычисления интеграла по двумерным метрикам, являются грассмановыми векторными полями на римановой поверхности (замена координат — всегда векторное поле), т.е. имеют спин −1 (а сопряженное духовое поле — спин +2). Открытие этих духов А. Поляковым [56] объяснило происхождение магической размерности $D = 26$ в модели бозонных струн ($26 = c_2$ — это в точности центральный заряд для алгебры Вирасоро, порожденной тензором энергии импульса духов

$$T_{\text{ghost}} = -b\partial c + 2(\partial b)c)$$

и послужило толчком к созданию современной теории струн, основанной на подходе первичного квантования, т.е. фактически на анализе 2-мерных конформных моделей и 2-мерной квантовой гравитации. Роль репараметризационных духов особенно велика в БРСТ-ФОРМАЛИЗМЕ, интерпретирующем все наблюдаемые *струнной* модели как элементы когомологий нильпотентного БРСТ-оператора $Q_{\mathrm{BRST}} = cT + bc\partial c$.

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ — двумерные поверхности с заданной комплексной структурой. Различают замкнутые (без границ) ориентируемые поверхности различных родов g (g — число ручек), а также открытые (с границами) и неориентируемые поверхности. Достаточно изучать только замкнутые ориентируемые поверхности, так как на остальные случаи информация переносится с помощью техники дублей [301]. Из теории римановых поверхностей для теории струн особенно важны следующие объекты: расслоения j-дифференциалов, отображения Якоби, якобианы, матрицы периодов, модули комплексной структуры, пространства модулей, а также специальные функции — тета-функции Якоби и Римана и некоторая информация об их нулях. Некоторую информацию обо всех этих объектах можно найти в учебниках [133, 134, 216, 307, 308].

СИГМА-МОДЕЛИ — модели d-мерной КТП с D-полями $x^\mu(\xi)$ **и действием**

$$\int G_{\mu\nu}(x)\partial_a x^\mu \partial_a x^\nu \mathrm{d}^d\xi.$$

Поля могут интерпретироваться как задающие отображение в D-мерное многообразие (target space) с метрикой $G_{\mu\nu}(x)$. Сигма-модели удобны для перевода геометрической информации на язык КТП и позволяют использовать КТП для решения геометрических задач. Можно рассматривать сигма-модели с суперсимметрией, в том числе расширенной с $N=$ 1, 2, 3, 4. Главное достоинство **σ-модели** в том, что геометрия многообразия проявляется в ее простых свойствах как квантовой теории поля. Например, гомотопическая нетривиальность многообразия отражается в существовании топологических (если $\pi_D \neq 0$) и/или весс-зуминовских (если $\pi_{D+1} \neq 0$) членов в действии. Сигма-модели на однородных многообразиях G/H могут рассматриваться как модели Янга—Миллса с калибровочной группой H (и материей в присоединенном представлении глобальной группы G); при этом, скажем, весс-зуминовский член может быть часто записан в форме Черна—Саймонса. Суперсимметризация модели фактически сводится к введению в качестве фермионных степеней свободы вектором из касательного пространства к многообразию (т.е. суперсимметричные сигма-модели отражают свойства касательных расслоений); расширенные суперсимметрии связаны с кэлеровой и гиперкэлеровой структурами на многообразии и т.п. Струнные модели, допускающие интерпретацию в терминах D-мерного пространства-вермени, описываются как двумерные конформные сигма-модели. Конформная симметрия достигается либо за счет наложения дифференциальных уравнений (эйнштейновского типа) на $G_{\mu\nu}$, либо подбором (часто *динамическим* — за счет непертурбативной перенормировки) топологических членов. Последний вариант используется также в теории квантового эффекта Холла [270 — 274] и в одной из моделей 4-

мерных струн [200]. Обзор общих свойств сигма-моделей см. в [309, 310], о сигма-модельном подходе к определению низкоэнергетического предела струнных моделей (формализме Фрадкина—Цейтлина) см. [2].

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА — термин используется в двух слегка различных смыслах при обсуждении струнных моделей. Во-первых, он обозначает струнные амплитуды без внешних (вершинных операторов). В этой связи говорят о g-петлевых статсуммах как о вкладе римановых поверхностей рода g в "вакуумную энергию" в конкретной струнной модели. Из-за отсутствия вершинных операторов такая статсумма может быть определена не только в струнных, но и в конформных моделях. Происхождение термина "статсумма" связано с аналогией этой задачи для $g = 1$ и задачи о вычислении свободной энергии при конечной температуре. Однопетлевые статсуммы похожи на интегралы по t от производящих функций спектральных функций $Z(t)$, встречавшихся в основном тексте, но отличаются от них числовыми факторами (иногда даже бесконечными). Формально это происходит из-за требований модулярной инвариантности или дуальности (на языке дуально-резонансных моделей). Менее формально, смысл такого отличия в том, что очень короткие струны можно рассматривать как высокие возбуждения струн умеренной длины $\sim 1/M$. Понимание этого обстоятельства важно, например, при работе над формализмом "струнной теории поля"; см., например, [311].

Во-вторых, "непертурбативной статсуммой" называется производящая функция для *всех точных* корреляционных функций струнной модели, т.е. функционал, содержащий исчерпывающую информацию о данной модели (фактически даже о классе моделей). Такое словоупотребление связано с тем, что при обсуждении непертурбативных эффектов имеет смысл "экспоненцировать" все вершинные операторы (как наивные наблюдаемые, так и "операторы приклеивания ручки"), т.е. добавить к действию всевозможные возмущения с произвольными коэффициентами ("временами"; термин заимствован из близко связанной с этим вопросом при подходящем выборе базиса возмущений теории интегрируемых иерархий). "Вакуумная амплитуда" в теории с таким возмущенным действием (просуммированная по всем порядкам теории возмущений — это и есть "непертурбативная статсумма". Поскольку экспоненцирование некоторых возмущений может рассматриваться как изменение исходной модели (в частности, может нарушать симметрии), непертурбативная статсумма — характеристика не столько одной модели, сколько какого-то класса моделей. В принципе, при включении достаточно большого набора возмущений этот класс должен содержать *все* струнные модели: в этом состоит одна из идей построения "единой теории поля", естественного объединения всех струнных моделей. Примером непертурбативной статсуммы является интеграл, задающий матричную модель Концевича (в данном случае *класс моделей* — это все струнные модели, построенные по минимальным вирасоровским).

СТРУННАЯ МОДЕЛЬ получается калиброванием алгебры Вирасоро в конформной модели с *нулевым* центральным зарядом алгебры Вирасоро (если исходно центральный заряд отличен от нуля, с ним должно быть связано отдельное калибровочное поле, динамика которого обращает эффективный центральный заряд в нуль). В качестве такой модели можно взять *любую* конформную модель, дополненную системой репараметризационных духов и полем Лиувилля (характеристики последнего зависят от центрального заряда исходной модели). Переход к струнной модели в этом случае может быть интерпретирован как усреднение (интегрирование) по двумерным метрикам. Наблюдаемые получившейся теории находятся в определенном соответствии с первичными полями исходной (точнее, некоторого ее пополнения, в частности определенными операторами, изменяющими топологию), а место операторной алгебры занимает алгебра наблюдаемых, не содержащая зависимости от положения точек на римановой поверхности. Свойства алгебры наблюдаемых являются инвариантной характеристикой струнной модели. Имеет также смысл рассматривать модели, получающиеся калиброванием более широких киральных алгебр, например Каца—Муди или W_G. Калибрование всей операторной алгебры (по существу, "третичное квантование"; см. [312] по поводу этого понятия в более специальном контексте) должно давать эффективную теорию поля в пространстве-времени (которую следовало бы называть "струнной теорией поля" или "вторичноквантованной теорией струн"). Многообещающий подход к изучению струнных моделей в непертурбативной области связан с гипотезой об их эквивалентности моделям топологической гравитации.

СТРУННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ — аналог вторичноквантованной теории частиц (т.е. модели обычной локальной теории поля) для конкретной струнной модели. Для сравнения: если динамическим принципом первичноквантованной модели скалярных релятивистских частиц является сумма по линиям с весом e^{-ML} и с определенным правилом ветвления линий, скажем, разрешены лишь тройные ветвления и каждое входит с весом λ, то во вторичноквантованном формализме эта же модель описывается интегралом по полям $\phi(x)$ с действием

$$\int (\phi(\nabla_\mu \partial^\mu + M^2)\phi + \lambda\phi^3(\det G)^{1/2} d^D x.$$

Обе формулировки немедленно приводят к диаграммам Фейнмана (причем первая, первичноквантованная, — сразу к выражениям, записанным в α-**параметризации**). Струнная модель исходно задается в терминах, аналогичных первичноквантованной формулировке, и этого, в принципе, достаточно для развития диаграммной техники, что и делается в ФОРМАЛИЗМЕ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ на римановых поверхностях, причем роль интегралов по **параметрам** α в обычных фейнмановских диаграммах, т.е. фактически по длинам (модулям) линий, играют интегралы по модулям римановых поверхностей, а подынтегральные выражения строятся из степеней не рациональных, а римановых тета-функций. Однако запись тех же диаграмм в форме, которую можно было бы интерпретировать как вторичноквантованную (т.е. в виде функционального интеграла по струнным полям $\Phi\{C(t)\}$ — функционалам от контуров $C\{t\}$ в пространстве-времени — с действием $\int(\Phi\Delta\Phi + \lambda\Phi^3)$ и с как-то определенными операциями $\int$, Δ и умножения полей $\Phi\times\Phi\to\Phi$), — оказывается весьма проблематичной. Формально трудности связаны с необходимостью учесть дополнительные численные множители типа (обратных) объемов модулярной группы, стоящие перед выражениями для струнных амплитуд; чуть менее формально проблема — в наличии дуальности (например, эквивалентности вкладов *t*- и *s*-канальных диаграмм в 4-струнную амплитуду). Эти проблемы менее остры для моделей открытых струн, и в этой ситуации удается без особого труда предложить искусственные правила определения струнного действия, воспроизводящие правильные результаты [229]. Для замкнутых струн прогресс менее яркий. О различных идеях, связанных с построением вторичноквантованной формулировки струнных моделей (преимущественно простейших — бозонных струн и суперструн); см. [313 — 315]. Имеет смысл также вопрос о переформулировке на таком языке "непертурбативных вычислений", т.е. определение эффективного струнного действия после учета всевозможных деформаций исходной струнной модели и суммирования всех порядков теории возмущений. Серьезных попыток воспроизвести на этом пути даже известный результат (непертурбативную статсумму для вирасоровских минимальных моделей) пока не предпринималось.

СТРУНЫ *Р*-АДИЧЕСКИЕ — аналог струнных моделей, определенный на *Р*-адических кривых. Поле *Р*-адических чисел $\mathbf{Q}_p$ — аналог поля вещественных чисел $\mathbf{R}$ — получается пополнением множества рациональных относительно *неархимедовой* нормы

$$|x|_P \equiv P^{-\mathrm{ord}_P x},$$

где $\mathrm{ord}_P x$ — степень, с которой *простое* число P входит в разложение *рационального* числа x на простые сомножители (неархимедовость означает, что $|x+y|_P \le \max\{|x|_P, |y|_P\}$). Все поля $\mathbf{Q}_P$ неэквивалентны. $\mathbf{Q}_P$ состоит из формальных полубесконечных рядов

$$a \equiv \sum_{i\ge -m} a_i P^i,$$

где все a_i — элементы конечного поля F_p вычетов по модулю P (т.е. числа из набора 0, 1, ..., P — 1). Поля $\mathbf{Q}_P$ не являются *алгебраически замкнутыми*, т.е. не всякое алгебраическое уравнение с коэффициентами из $\mathbf{Q}_P$ разрешимо в $\mathbf{Q}_P$. Аналог алгебраически замкнутого и полного поля комплексных чисел $\mathbf{C}$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbf{Q}_P$; обозначается Ω_P. Подробности об определении *Р*-адических чисел см. в [237, 320, 146]. Удобно считать, что $\mathbf{Q}_\infty \equiv \mathbf{R}$. Множество всех *простых* чисел P, дополненное точкой ∞, совпадает со "спектром" Spec $\mathbf{Z}$ — множеством всех простых идеалов кольца целых чисел $\mathbf{Z}$. Соотношение между вещественной и *Р*-адическими структурами задается *формулой произведения* или *разложением единицы:* для любого рационального x (т.е. принадлежащего любому $\mathbf{Q}_P$) $\prod_{\mathrm{Spec}\mathbf{Z}} |x|_P = 1$. Это утверждение можно сформулировать также в терминах аделей.

Кольцо аделей образовано последовательностями $A = (a_{(\infty)}, a_{(2)}, a_{(3)}, \dots, a_{(P)}, \dots)$, где $a_{(P)} \in \mathbf{Q}_P$ с некоторыми дополнительными ограничениями; рациональные числа образуют в нем подгруппу *главных аделей,* состоящую из элементов вида $X = (x, x, x, \dots, x, \dots)$. Подробнее об аделях и иделях см. [321]. Возможная философия, связанная с аделями и с формулой произведения, состоит в том, что все "естественные" физические величины тривиальны (равны единице?), если рассматривать их над кольцом аделей (или хотя бы главных аделей), а не над обычными числами: $f(X) = \prod_{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}} f_P(x) = 1$. Существование нетривиальных физических величин $f_\infty(x)$ можно после этого интерпретировать как результат "нарушения симметрии": по каким-то причинам мы имеем возможность видеть лишь одну (вещественную) составляющую, чья нетривиальность, однако, полностью компенсируется "невидимой" P-адической компонентой. Как мы увидим чуть ниже, помимо нормы $f_P = |\dots|_P$ к числу таких "естественных" функций относятся струнные меры (определенные по деревьям Брюа—Титса), а возможно, и некоторые струнные амплитуды, по крайней мере амплитуда Вирасоро.

Римановы поверхности могут рассматриваться как алгебраические кривые над полем комплексных чисел (т.е. как заданные алгебраическими уравнениями 1-мерные комплексные многообразия), модули комплексной структуры при этом связаны с коэффициентами уравнений. Одно и то же уравнение может быть рассмотрено не только над полем комплексных чисел, но и над другими полями, в том числе над $\mathbf{Q}_P$, в этом случае говорят об *арифметических* многообразиях. При таком изменении точки зрения невырожденные кривые могут стать вырожденными. (Например, заданная уравнением $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ эллиптическая кривая (тор), не вырожденная над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ **при** $\lambda \neq 0, 1, \infty$, имеет кратные точки, как кривая над $\mathbf{Q}_P$, если $\lambda = 0, 1, \infty \bmod P^n$. Показатель степени n характеризует степень вырождения арифметической кривой над данной точкой P кольца Spec $\mathbf{Z}$.) Различные величины, определенные на алгебраических кривых, в том числе функции Грина и детерминанты операторов Лапласа, могут рассматриваться и на арифметических. При фиксированном $P \neq \infty$ многие из такого рода объектов постоянны (и равны 1) на пространстве модулей, за исключением точек, где кривая вырождается. (Для того же примера эллиптической кривой $\mathrm{Det}\,\Delta \sim |\lambda(1-\lambda)|^{1/6}$, а его аналог в точке P спектрального кольца — $\mathrm{Det}_P\Delta \sim |\lambda(1-\lambda)|_P^{1/6} \neq 1$ **только для** $\lambda \neq 0, 1, \infty$ mod P.) В этом смысле формула произведения разлагает эти величины в произведения элементарных P-адических составляющих, все значение которых набирается в сингулярных точках пространства модулей. Развитием такого рода идей является теория Аракелова—Фалтингса для дивизоров и высот (функций Грина) на арифметических кривых, рассматриваемых над Spec $\mathbf{Z}$ [146] (в этой же книге описано приложение этих идей к доказательству теоремы Морделла — ослабленной формы Великой теоремы Ферма, а также дано определение МЕРЫ МАМФОРДА). Детерминанты и функции Грина операторов Лапласа на кривых над $\mathbf{Q}_P$ могут быть определены с помощью гауссовых функциональных интегралов с полями, "живущими" на *деревьях Брюа—Титса* [50]; см. [51]. Этот формализм — прямой аналог формализма Полякова для обычных открытых струн. P-адический аналог замкнутых струн требует адекватного описания кривых над Ω_P (а не над $\mathbf{Q}_P$) и пока неизвестен.

Еще одним замечательным фактом из теории P-адических струн является (неожиданная!) справедливость формулы произведения для (некоторых?) струнных *амплитуд* — интегралов по пространствам модулей. Нетривиальным является то, что для P-адических амплитуд интегралы определены по-своему — как интегралы по P-адическим числам; и в этом смысле в формулах для струнных амплитуд разложение единицы как бы коммутирует с интегрированием. Простейший пример этого явления — разложение формулы Венециано для 4-точечной функции на сфере [322], других изящных примеров пока неизвестно. Причины возникновения такого "аделического" свойства у интегралов (каких?) по пространствам модулей остаются совершенно неясными; см. также [50]. О другой концепции P-адических струн см. [323].

СУПЕРСТРУНА — специальная струнная модель, получающаяся GSO-проекцией из фермионной струны. Последняя — 2-мерно-суперсимметричное обобщение модели бозонных струн, естественный синтез моделей Невье—Шварца и Рамона (NSR).

В связи с моделью Невье—Шварца стоит отметить любопытный (и тоже символичный) факт: эта *струнная* модель была первым примером суперсимметричной системы — с нее начинается изучение суперсимметрии в физике. (Алгебра суперсимметрии как математический объект была открыта ранее Гольфандом и Лихтманом [102].)

В критической размерности $D = 10$ суперструна не имеет тахионных возбуждений и обладает пространственно-временной суперсимметрией. Критическая суперструна может быть также описана в формализме Грина—Шварца, в котором эта суперсимметрия реализована явно и отсутствуют двумерные поля с полуцелым спином на мировом листе. Модель предложена в [55]; в [37] доказано сокращение однопетлевых расходимостей и аномалий для калибровочной группы SO(32). В [38] сформулирована близкая модель ГЕТЕРОТИЧЕСКОЙ СТРУНЫ с калибровочной группой $E_8 \times E_8$, также свободная от аномалий. Различные подходы и результаты, относящиеся к супер- и гетеротическим струнам, описаны в [21]. О суперструнах на римановых поверхностях в обоих формализмах (NSR и Грина—Шварца) и о проблеме (до сих пор незавершенного) доказательства *конечности* во всех порядках теории возмущений см. [131].

ТЕОРЕМА БЕЛАВИНА—КНИЖНИКА — в широком смысле утверждение о точном смысле голоморфной факторизации мер на пространствах модулей, интегралы от которых задают корреляторы струнных моделей. В этом смысле является широким обобщением замечания о голомофрной факторизации, сделанного в [58] при определении рациональных конформных моделей на римановой сфере. Собственно в работе [135], открывшей фундаментальную роль комплексной геометрии в теории струн, рассматривалась модель 26-мерных бозонных струн. Было доказано, что мера на пространстве модулей римановых поверхностей рода g, отвечающая g-петлевому вкладу в статсумму (вакуумную диаграмму), равна квадрату модуля голоморфного сечения расслоения Мамфорда (меры Мамфорда), деленному (при удачном в определенном выборе сечения) на $\det(\mathrm{Im}\ T)^{13}$ (для $g \geq 2$), где T — матрица периодов поверхности, а 13 — деленное на два число *некомпактных* измерений пространства-времени. Полюсы меры на границах пространства модулей идентифицировались как связанные с существованием тахионных и дилатонных возбуждений.

ТЕОРЕМА ДУСТЕРМАА—ХЕКМАНА — утверждение о "точности квазиклассического приближения", т.е. о возможности замены интеграла с действием S на сумму по решениям уравнений движения $\delta S = 0$, при выполнении двух условий: 1) глобальном действии компактной группы на пространстве интегрирования, 2) согласованности динамического принципа и симплектической структуры с этим действием. Теорема доказана для конечномерных интегралов в [104 — 106]. В бесконечномерной ситуации она превращается в утверждение о суперсимметричных квантовых теориях специального вида [107, 108]. При формулировке квантовой механики в терминах пространства петель глобальное действие компактной группы U(1) может быть задано как репараметризация контура. На этом пути может быть получена симплектическая интерпретация суперсимметричных моделей и ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НИКОЛАИ [103]. Теорема Дустермаа—Хекмана тесно связана с эквивалентными когомологиями, теоремами об индексе и другими актуальными проблемами.

ТЕТА-ФУНКЦИИ — специальные функции, необходимые для вычислений, связанные с римановыми поверхностями. Наиболее известны эллиптические функции, отвечающие роду $g = 1$, которые могут быть определены как в терминах эллиптических интегралов, так и в форме бесконечных рядов. Такие две возможности отвечают возможности описать поверхность рода $g = 1$ соответственно как комплексную эллиптическую кривую и как плоский тор. При $g \geq 2$ эти два описания уже совпадают: обобщением первого является задание поверхности как алгебраического многообразия (и за исключением некоторых случаев типа гиперэллиптических кривых это весьма неэффективный или, по-крайней мере, неразработанный метод), обобщение второго определяет не саму поверхность, а g-мерный комплексный тор (ЯКОБИАН), в которую поверхность голоморфно вложена отображением ЯКОБИ. По якобиану поверхность восстанавливается однозначно. Аналог эллиптических тета-функций для якобиана легко строится в форме p-кратных рядов и называется тета-функциями Якоби. Их обратный образ на самой поверхности называется тета-функциями Римана, которые весьма сложны. Проблемой (ПРОБЛЕМОЙ ШОТТКИ) является даже описание множества g-мерных торов, являющихся якобианами каких-нибудь поверхностей. Ключевой в теории римановых тета-функций является теорема Римана о нулях, описывающая образ поверхности в ее якобиане в форме трансцендентного уравнения, записанного в терминах тета-функции Якоби. Теорема гласит, что на поверхности рода g могут быть выбраны точки $R_1, \ldots, R_{g-1}$ так, что для *любых* иных точек $z_1, \ldots, z_{g-1}$

$$\theta(z_1 + \ldots + z_{g-1} - R_1 - \ldots - R_{g-1}) \equiv 0.$$

Из-за того, что $g - 1$ точек могут быть выбраны совершенно произвольно, это уравнение выделяет подмножество коразмерности $g - 1$ в g-мерном якобиане, т.е. 1-мерное комплексное подпространство, которое и является образом поверхности. Чтобы пользоваться этой теоремой, надо иметь какую-то информацию о точках $R_1, \ldots, R_{p-1}$ — они являются голоморфными функциями на пространстве модулей (это то, что названо в основном тексте "информацией о нулях" тета-функции). Кроме того, полезно знать само преобразование Якоби

$$z \to \mathbf{z} = \int^{z} \vec{\omega} \,,$$

т.е. формулы для канонических 1-дифференциалов $\omega_i(z)$ на поверхности. Формализм безмассовых свободных полей выражает многопетлевые корреляторы через всю совокупность специальных функций θ, ω, $\boldsymbol{R}$. Поскольку эти объекты не независимы, это не является исчерпывающим решением задачи. Некоторым утешением может служить тот факт, что если какая-то явная параметризация поверхности задана, все эти величины могут быть легко определены и подставлены в общие формулы, выведенные в указанном формализме (см. пример этой процедуры в [244] в простейшем случае гиперэллиптических поверхностей). Общие сведения о тета-функциях см. в [133, 134].

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРАВИТАЦИЯ — так по предложению Э. Виттена называется специфический подход к определению струнных моделей — путем постулирования производящей функции топологических инвариантов пространств модулей расслоений над римановыми поверхностями, в качестве полной непертурбативной статсуммы модели. Поскольку топологические инварианты неизбежно чувствительны к устройству границ пространства модулей, такое определение может быть совместным с условиями факторизации, связывающими вклады различных топологий в струнных моделях. В применении к топологической гравитации роль этих условий и одновременно алгебры наблюдаемых играет набор так называемых рекурсионных соотношений. Простейший пример — собственно 2-мерная топологическая гравитация Виттена [120], в которой рассматривается производящая функция классов Черна дивизоров на обычном пространстве модулей поверхностей с выколотыми точками. Эта функция может быть переписана в форме матричной модели Концевича (с потенциалом $V(X) = X^3$) [129] и совпадает [186] с двойным скейлинговым пределом обычной матричной модели, т.е. с полной непертурбативной статсуммой 2-мерной квантовой гравитации. Рекурсионные соотношения в этом случае могут быть записаны также в форме условий Вирасоро, наложенных на полную статсумму, а сама статсумма является **τ-функцией** иерархии Кортевега-де Фриса. Хотя нет сомнений в общем характере этой схемы, аналогичных по полноте результатов (о конкретной связи топологических характеристик пространств модулей с непертурбативными статсуммами струнных моделей и **τ-функциями** интегрируемых иерархий) для других случаев пока нет. Отдельные фрагменты см. в [186, 187 — 190, 316].

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ — квантовомеханические или квантовополевые теории, все корреляционные функции в которых не зависят от выбора координат и метрики как в пространстве-времени, так и в других пространствах, участвующих в определении теории. Это позволяет использовать корреляционные функции в качестве топологических инвариантов указанных пространств. Распространенный способ задания и исследования широкого класса топологических моделей — функциональный интеграл с классическим действием, не зависящим от координат и метрик. Необходимым требованием к такой теории является также инвариантность меры в функциональном интеграле, в частности отсутствие квантовых аномалий. Исторически первый пример топологической модели — теория антисимметричных тензорных полей, рассмотренная А. Шварцем [231] в связи с вычислением кручения Рэя—Зингера. В общем виде идея топологических моделей сформулирована Э. Виттеном [65, 120]. Вареные примеры — топологические теории Янга—Миллса и топологические сигма-модели. Как правило, в четномерных теориях такого типа в качестве действия используются топологические заряды (например, $\mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^4 x F\tilde{F}$), а в нечетномерных — весс-зуминовские члены (например, действие Черна—Саймонса $\mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^3 x(A\mathrm{d}A + (2/3)A^3)$). Трехмерная МОДЕЛЬ ЧЕРНА—САЙМОНСА [117, 118] получила наибольшее развитие, поскольку она связана с другими актуальными проблемами — классификацией топологических типов 3-мерных пространств (теорией узлов) [66], двумерными конформными теориями и квантовыми группами. Первые результаты о 5-мериом аналоге модели Черна—Саймонса см. в [287]. Математическим аппаратом топологических моделей является теория БРСТ-когомологий (по существу, идентичных эквивариантным когомологиям). Открытым является вопрос о возможности описания в таких терминах топологических теорий общего вида, в которых зависимость от метрических характеристик имеется в классическом приближении, но исчезает после полного вычисления функционального интеграла. Примеры такого рода — теории квантовой гравитации, в том числе в двух измерениях, — струнные модели. Альтернативный подход к заданию топологических моделей заключается в рассмотрении производящих функций топологических инвариантов различных пространств (модель зависит от выбора как пространства, так и класса инвариантов). Вопрос об условиях (в том числе о выборе адекватного и "полного" базиса в пространстве топологических инвариантов), при которых такая производящая функция может рассматриваться как статсумма какой-нибудь полевой теории, остается открытым. Если рассматриваемое пространство имеет отношение к пространству метрик, говорят о ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРАВИТАЦИИ. В двумерной ситуации модели топологической гравитации описывают топологию пространств модулей римановых поверхностей и расслоений над ними и тесно связаны со струнными моделями. К наиболее ярким из уже полученных результатов следует отнести (ныне доказанную в простейшем случае) гипотезу Виттена о связи топологии и интегриуемости: статсуммы (некоторых?) моделей топологической гравитации являются **τ-функциями** интегрируемых иерархий.

ФОРМАЛИЗМ БЕЗМАССОВЫХ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ состоит из двух основных частей. Первая — теория самих свободных полей на римановых поверхностях. Она выражает все корреляторы через тета-функции Римана и их нули, точнее — через набор точек R_1, ..., R_{p-1} на поверхности таких, что

$$\theta(z_1 + \ldots + z_{p-1} - R_1 - \ldots - R_{p-1}) \equiv 0$$

для любых $z_1, \ldots, z_{p-1}$ (преобразование Якоби). Имеются четыре тесно связанные, но различные системы безмассовых свободных полей: скаляр с действием

$$\int (\partial\phi\, \bar{\partial}\phi + \alpha\mathscr{R}\phi),$$

грассманова b, c-система со спином j у одного и $1 - j$ у другого поля и действием $\int b\, \bar{\partial} c$, аналогичная *бозонная* β, **γ-система** и аналог скаляра, но с ограниченной областью изменения ϕ (поле со значением на отрезке или луче — простейших примерах орбифолдов). Первые три типа полей описаны в [125, 158], о многопетлевых вычислениях для полей последнего типа (они используют теорию многообразия Прима [308]) см. [317, 318]. Имеет смысл также рассматривать многокомпонентные свободные скаляры, с граничными условиями, смешивающими компоненты, — теории свободных полей со значениями в торах и торических орбифолдах. Случай торов легко сводится к одномерному, случай орбифолдов в литературе исчерпывающим образом не разобран (за исключением $g = 1$); см. [319]. Вторая составляющая формализма свободных полей — сведение к гауссовым интегралам различных конформных моделей (в таком контексте этот формализм иногда называют бозонизацией или представлением кулоновского газа). Для вирасоровских минимальных моделей это было сделано В. Доценко и В. Фатеевым [161]. Переход к свободным полям в модели ВЗНВ см. в [158, 261], в ее редукциях — [131, 209]. О модели суперструны Грина—Шварца см. [131]. Об аналогичном подходе к 2-мерной гравитации см. [122—126].

τ-ФУНКЦИЯ — это коррелятор свободных полей (удобнее всего — спинорных $\bar\psi$, ψ с действием $\int\bar\psi\bar\partial\psi\, \mathrm{d}^2z$) на римановой сфере с двумя отмеченными точками вида

$$\tau_G\{T_k\} = \langle\langle e^H\rangle\rangle_G = \langle 0|e^H G|0\rangle,$$

где

$$H = \sum_k T_k J_k, \quad \mathrm{U}(1)\text{-ток } J(z) \equiv \bar\psi\psi(z) = \sum_k J_k z^{k-1},$$

а

$$G = \exp\sum_{k,l} A_{mn}\bar\psi_m\psi_n.$$

Из-за того что "поправка" к действию, $H + \log G$, квадратична по фермионным полям, при вычислении корреляторов $\langle\langle \ldots e^H\rangle\rangle_G$ можно пользоваться теоремой Вика. После преобразования Мивы

$$T_k = \frac{1}{k}\sum_a(\lambda_a^k - \bar\lambda_a^k)e^H$$

может быть переписано в виде

$$e^H = :\prod_a\bar\psi(\bar\lambda_a)\psi(\lambda_a):,$$

а

$$\tau_G\{T_k\} = \frac{\prod\limits_{a,b}(\bar\lambda_a - \lambda_b)}{\prod\limits_{a<b}(\lambda_a - \lambda_b)(\bar\lambda_a - \bar\lambda_b)}\det_{ab}\langle\langle\bar\psi(\bar\lambda_a)\psi(\lambda_b)\rangle\rangle_G.$$

Оператор G строится по точке грассманиана Сато [169, 170] (задаваемой матрицей A_{mn}); если она к тому же принадлежит грассманиану Сигала—Вильсона [148], то τ-функция может быть интерпретирована как коррелятор на соответствующей римановой поверхности, а сам оператор G — как адекватная комбинация операторов приклеивания ручки к римановой сфере. Как следствие очевидного тождества

$$\oint(\psi(z)|0\rangle\times\psi(z)|0\rangle) = \sum_n \psi_n|0\rangle\times\psi_{-n}|0\rangle \equiv 0$$

(либо на один, либо на другой вакуум действует оператор уничтожения) и возможности сделать "сопряжение" с помощью оператора G (сводящегося к замене обоих $|0\rangle$ в тождестве на $G|0\rangle$), **τ-функция** удовлетворяет системе билинейных уравнений Хироты типа

$$\oint\frac{dz}{z}\tau_G(T_k' + z^k k^{-1})\tau_G(T_k'' - z^k k^{-1}) = 0$$

для любых наборов времен $\{T_k'\}$, $\{T_k''\}$. Разложение уравнений Хироты в ряд по степеням $(T_k' - T_k'')$ дает систему интегрируемых уравнений — иерархию КР. При дополнительных ограничениях на форму G получаются редукции КР-иерархии, в том числе КдФ (sl(2))-, Буссинеска (sl(3))- и другие sl(n) (или просто n)-редукции (отметим также, что для G из грассманиана Сигала—Вильсона условие sl(2)-редукции состоит в том, что риманова поверхность должна быть гиперэллиптична). Наоборот, если в исходной конструкции поля $\bar{\psi}$, ψ принимали значения в многомерных (а не линейном) расслоениях над римановой поверхностью, получаются **τ-функции**более общих иерархий. При анализе струнных моделей **τ-функции** возникают, во-первых, в параметризации Мивы — просто как корреляторы свободных полей на римановых поверхностях, а во-вторых, на этот раз в нетривиальном месте — как непертурбативные статсуммы. Эти две роли **τ-функций** отражают более общий факт появления римановых поверхностей (точнее, точек грассманиана Сато) в теории струн в двух различных ипостасях — как мировых поверхностей струн и как параметров на множестве различных струнных моделей. Глубокое понимание, а затем и эксплуатация этого факта — одна из ближайших задач теории струн; см. по этому поводу [40, 41]. Из-за эквивалентности ряда струнных моделей моделям топологической гравитации появление **τ-функций в роли** непертурбативных статсумм означает, что **τ-функции** имеют также топологический смысл [120, 129, 186] (отметим в этой связи, что в модели Концевича оператор G выражается через потенциал $V(X)$ (см. [186]); в общем случае при рассмотрении непертурбативных статсумм оператор G задается "струнным уравнением"). Связь между интегрируемостью и топологией, а также топологический и/или алгебро-геометрический смысл струнного уравнения пока также остаются непонятыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980.

2. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.*. Quantum-String Theory Effective Action//Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 261. P. 1 — 27; Поля как возбуждения квантованных координат//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41, № 4. С. 169 — 171.
3. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. — М.: Наука, 1980.
4. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.
5. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. — М.: Мир, 1989.
6. *Бэкстер Р.* Точно решаемые модели в статистической механике. — М.: Мир, 1985.
7. *Годен М.* Волновая функция Бете. — М.: Мир, 1987.
8. *Арнольд В.И.* Особенности, бифуркации и катастрофы//УФН. 1983. Т. 141, вып. 4. С. 569 — 590.
9. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Наука, т. 1, 1982; т. 2, 1984.
10. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. — М.: Мир, 1984.

[11] *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1982.

12. *Волошин М,Б., Тер-Мартиросян К.А.* Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
13. *Alessandrini V., Amati A., Le Bellac M., Olive D.//* Phys. Rep. 1971. V. 1. P. 269.
14. *Schwarz J.* Dual Resonance Theory//Ibidem. 1973. V. 8, No. 4. P. 269 — 335.

    Rebbi C. Dual Models and Relativistic Quantum Strings//lbidem. 1974. V. 12, No. 1. P. 1 — 73.
15. *Veneziano G.* An Introduction to Dual Models of Strong Interactions and Their Physical Motivations//Ibidem. V. 9, No. 4. P. 199 — 242.
16. *Mandelstam S.* Dual Resonance Models//Ibidera. V. 13, No. 6. P. 259 — 353.
17. *Scherk J.//* Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 123.
18. *Mezard M., Parisi G., Virasoro M.* Spin Class Theory and Beyond. — Singapore: World Scientific, 1987.
19. *Коренблит И.Я., Шендер Е.Ф.* Спиновые стекла и неэргодичность//УФН. 1989. Т. 151, вып. 2. С. 267 — 310.
20. *Иоффе Л.Б., Фейнгельман М.В.* Спиновые стекла и модели памяти//УФН. 1986. Т. 150, вып. 2. С. 323 — 325.

[21J *Грин М., Шварц Дж., Виттен Е.* Теория суперструн. — М.: Мир, 1991.

22. *Морозов А.* Суперструна как модель фундаментальных взаимодействий//Материалы XXII школы ЛИЯФ. — Л., 1987. — С. 95 — 168.
23. *Kaluza T.* Zur Problem von der Einheit der Physik//Sitzungber. Preuss. Acad. Wiss. Math.-Phys., Berlin. 1921. Bd. 1. S. 966 — 975; перевод: К проблеме единства физики//Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М.: Мир, 1979. — С. 529 — 536.

    Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie//Zs. Phys. 1926. Bd. 37, H. 12. S. 895 — 906.
24. *Witten E. Search* for a Realistic Kaluza—Klein Model//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 186, No. 3. P. 412 — 428.

    Ходос А. Теория Калуцы—Клейна: общий обзор//УФН. 1985. Т. 146, вып. 4. С. 647 — 654.
25. *DuffM., Nillson B., Pope C.* Kaluza—Klein Supergravity//Phys. Rep. 1986. V. 130, No. 1. P. 1 — 142.
26. Введение в супергравитацию: Сб. ст. — М.: Мир, 1985.
27. *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1990.
28. *Гелл-Манн М., Рамон П., Сланский Р.* Цветовая симметрия, распределения электрического заряда и стабильность протона в единых калибровочных теориях//УФН. 1980. Т. 130. С. 459.
29. *Матинян С.Г.* На пути объединения слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий//УФН. 1980. Т. 130.,С. 3.
30. *Фридман Д., ван Ньювенхейзен П.* Супергравитация и унификация законов физики//УФН. 1979. Т. 128. С. 135.

    Van Nieuwenhuizen P. Supergravity//Phys. Rep. 1981. V. 68. P. 189.

[31] *Окунь Л.Б.* Современное состояние и перспективы физики высоких энергий//УФН. 1981. Т. 134, вып. 1. С. 3 — 44.

32. *Огиевецкий В., Мезинческу Л.* Симметрия между бозонами и фермионами и суперполя//УФН. 1975. Т. 117, вып. 4. С. 637 — 683.

    Высоцкий М. Суперсимметричные модели элементарных частиц — физика для ускорителей нового поколения?//УФН. 1985. Т. 146, вып. 4. С. 591 — 636.

    Nilles H. Supersymmetry, Supergravity, and Particle Physics//Phys. Rep. 1984. V. 110, No. 1. P. 1 — 162.

    Haber H., Kane G. The Search for Supersymmetry: Probing Physics Beyond the Standard Model//Phys. Rep. 1985. V. 117. P. 75.
33. *Barrow J., Tipler J.* The Antropic Cosmological Principle. — Oxford: Clarendon Press, 1986.
34. *Морозов А.* Аномалии в калибровочных теориях//УФН. 1986. Т. 150. С. 337 — 416; полный текст://Материалы 13-й школы ИТЭФ. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — Вып. 1. С. 98 — 213.
35. *Кафиев Ю.Н.* Аномалии и теория струн. — Новосибирск: Наука, 1991.
36. *Берестецкий В., Лифшиц И., Питаевский Л.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1980. — § 133.
37. *Green M., Schwarz J.* Anomaly Cancellations in Supersymmetric $D = 10$ Gauge Theory and Superstring Theory//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 149, No. 2. P. 117 — 122; The Hexagon Gauge Anomaly in Type II Super-string Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 225, No. 1. P. 93 — 114; Infinity Cancellations in SO(32) Superstring Theory//Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 151, No. 1. P. 21 — 25.
38. *Freund P.* Superstring from 26 Dimensions//Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 151, No. 4 — 6. P. 387 — 390.

Gross D., Harvey J., Martinec E., Rohm R. Heterotic String//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54, No. 6. P. 502 — 505; Heterotic String Theory (I). The Free Heterotic String//Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 256, No. 2. P. 253 — 284; Heterotic String Theory (II). The Interacting Heterotic String//Ibidem. 1986. V. 267, No. 1. P. 75 — 124.

39. *Candelas P., Horowitz G., StromingerA., Witten E.* Vacuum Configurations for Superstrings//Nuel. Phys. Ser. B. 1985. V. 258, No. 1. P. 46 — 78.

40. *GerasitnovA., Lebedev D. etal.* Possible Implications of Integrable Systems for String Tbeory//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1991. V. 6, No. 6. P. 977 — 988.

[41] *Morozov A.* Integrable Systems and Double-Loop Algebras in String Theory//Mod. Phys. Ser. A. 1991. V. 6, No. 16. P. 1525 — 1532.

42. *Фон Клитцинг К.* Квантованный эффект Холла//УФН. 1986. Т. 150, вып. 1. С. 107 — 126.

43 Квантовый эффект Холла: Сб. ст. — М.: Мир, 1989.

44 *Криве И.В., Рожавский А.С.* Дробный заряд в квантовой теории поля и физике твердого тела//УФН. 1987. Т. 152, вып. 1. С. 33 — 74.

45. *Laughlin R.//*Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 2677; Science. 1988. V. 242. P. 525.

Chen Y, Halperin B., Wilczek F., Witten E. On Anyonic Superconductivity//Intern. J. Mod. Phys. Ser. B. 1989. V. 3. P. 1001.

Wilczek F. Fractional Quantum Statistics and Anyon Superconductivity. — Singapore: World Scientific, 1990.

Lykken J., Sonnenschein J., Weiss N. The Theory of Anyonic Superconductivity: A Review//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1991. V. 6. P. 1335.

46. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. — М.: Прогресс, 1986.

47. *Чириков Б.В.* Динамический хаос в классических и квантовых системах//УФН. 1983. Т. 139, вып. 2. С. 360 — 363.

48. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем//УФН. 1983. Т. 141, вып. 2. С. 343 — 374.

49. Фракталы в физике: Сб. статей. — М.: Мир, 1988.

50. *Манин Ю.* p-адические автоморфные функции//Итоги науки. Сер. "Современные проблемы математики". — М.: ВИНИТИ, 1984, — Т. 3. С. 5 — 92.

Yamakoshi H. Arithmetics of Strings//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 207. P. 426 — 428.

Smit D.-J. String Theory and Algebraic Geometry of Moduli Space//Commun. Math. Phys. 1988. V. 114. P. 645 — 685.

[51] *Chekhov L., MironovA., Zabrodin A.* Multiloop Calculations in p-adic String Theory and Bruhat-Tits Trees//Commun. Math. Phys. 1989. V. 125. P. 675 — 711.

Manin Yu. Three-Dimensional Hyperbolic Geometry as **∞-adic** Arakelov Geometry//Publ. IHES/M/90/19. 1990. P. 1 — 29.

52. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.

53. *Ellis J., Kelley S., Nanopoulos D.//*Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 249. P. 441; 1991. V. 260. K 131. *Amaldi U., de Boer W., Furstenau H.//*Ibidem. P. 447.

54. *Mandelstam S.* Light-cone Super-space and the Ultraviolet Finiteness of the $N = 4$ Model//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 213. P. 149.

Green M., Schwarz J., Brink L. N=4 Yang—Mills and $N = 8$ Supergravtty as Limits of String Theories//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 198, No. 3. P. 474 — 492.

55. *Gliozzi F., Sherk J., Olive D.* Supersymmetry, Supergravity Theories, and the Dual Spinor Model//Nucl. Phys. Ser. B. 1977. V. 122. P. 253 — 297.

56. *Polyakov A.* Quantum Geometry of Bosonic Strings//Phys. Lett. Ser. B. 1981. V. 103. P. 207 — 210; Quantum Theory of Fermiomc String/Ylbidem. P. 211.

57. *Кричевер И., Новиков С.//*Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21, вып. 2. С. 46; вып. 4. С. 47.

58. *Belavin A., Polyakov A., Zamolodchokov A.* Infinite Conformal Symmetry in Two-dimensional Quantum Field Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 241. P. 333 — 368.

59. *Доценко В.* Конформная теория поля. Применение к статистической физике//Материалы 12-й школы ИТЭФ. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — Вып. 3. С. 90 — 140.

60. *Friedan D., Martinec E., Shenker S.* Conformal Invarianee, Supersymmetry, and String Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1986,, V. 271, No. 1. P. 93 — 165.

[61] *Dotsenko V.//* Adv. Stud. Pure Math. 1988. V. 16. P. 123.

62. *Moore G., Seiberg N.* Polynomial Equations for Rational Confonnal Field Theories//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 212. P. 451; Naturality of Conformal Field Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 313. P. 16; Classical and Quantum Confonnal Field Theory//Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 177; Taming the Conformal Zoo//Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 220. P. 422.

63. *Alekseev A., Shatashvili S.* Path Integral Quantization of the Coadjoint Orbits of the Varasoro Group and 2D Gravity//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 329. P. 719.

64. *Elitzur S., Moore C., Schwimmer A., Seiberg N.* Remarks of the Canonical Quantization of the Chern—Simons—Witten Theory//Nucl. Phys. Scr. B. 1989. V. 326. P. 104.
65. *Witten E.* Topological Quantum Field Theory//Commun. Math. Phys. 1988. V. 117. P. 353; Topological Sigma Models//Commun. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 411; Introduction to Cohomological Field Theory//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1991. V. 6. P. 2775.

    Baulieu L., Singer I. Topological Yang—Mills Symmetry/Mud. Phys. Ser. B. Proc. Suppl. 1988. V. 5. P. 12.

    Van Baal P. An Introduction to Topological Yang—Mills Theory//Acta Phys. Polon. Ser. B. 1990. V. 21. P. 73.

    Labastida J., Pernici M., Witten E. Topological Gravity in Two Dimensions//Nucl. Phys. Ser. B. 1988.V.310.P.611.

    Montana D., Sonnenschein J. Topological Strings/Xlbidem. 1989. V. 3i3. P. 258; The Topology of Moduli Space and Quantum Field Theory//Ibidem. V. 324. P. 348.

    Montana D., Aoki K., Sonnenschein J. Topological Supergravity in Two Dimensions//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 247. P. 64.

    Birmingham D., Blau M., Rakowski M,, Thompson G. Topological Field Theory//Phys. Rep. 1991.V.209.P.129.
66. Braid Group, Knot Theory, and Statistical Mechanics//Eds. C.N. Yang, MX. Ge. — Singapore: World Scientific, 1989. — (Adv. Series in Math. Phys. V. 9)
67. *Perelomov A., Rosly A., Shifman M., Turbiner A. et al.* Quasi-exactly-solvable Quanta! Problems: One-dimensional Analogue of Rational Gonformal Field Theories//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1990. V. 5, No. 4. P. 803 — 832.
68. *Halpern M., Kiritsis E.* General Varasoro Construction on Affine *g*//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 4. P. 1973; Erratum://Ibidem. P. 1797.
69. *Halpern M., Kiritsis E., Obers N., Porrati M., Yamron J.* New Unitary Affine-Virasoro Constructions//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1990. V. 5. P. 2275.

    Turbiner A., Shifman M. et al. Continuous Sugawara-like Realization of $c = 1$ Conformal Models/Abidem. No. 15. P. 2953 — 2992.

    Ovsienko V., Turbiner A. Embeddings of Lie Algebra into Universal Envelloping. — Preprint CIMR. — Marseille, 1991.

    Gorsky A., Selivanov K. Preprint CERN. TH. 1992.
70. *Romans L.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 352. P. 829; V. 357. P. 549.

    Fuchs J.//Phys. Lett. Ser. B. 1991. V. 262. P. 249.

    Белов А., Лозовик Ю. Управляющее уравнение для конформных теорий поля с дополнительными симметриями//Письма ЖЭТФ. 1991. Т. 54. С. 647 — 650.

[71] *Marshakov A,, Mironov A. et al.* From Virasoro Constraints in Kontsevich Model to $\tilde{W}$-**Comstraints** in 2-Matrix Model. — Preprint ITEP-M-5/91; to appear in Mod. Phys. Lett. A. 1992; сокр. вариант://Письма ЖЭТФ. 1991. Т. 54, вып. 9. С. 536 — 541.

72. *Goddard P., Kent A., Olive D.* Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras//Commim. Math. Phys. 1986. V. 1031 No. 1. P. 105 — 119.
73. *Замолодчиков А.* Бесконечные дополнительные симметрии в двумерных конформных теориях поля//ТМФ. 1985. Т. 63. С. 1205 — 1213.
74. *Belavin A.* On the Connection between Zamolodchikov's *W*-Algebras and Kac—Moody Algebras//N. Kawamoto, T. Tugo (Eds.). Quantum String Theory: Proceedings of the Second Yukawa Memorial Symposium Nishninomiya, Japan, 1987; published as://Proc. Phys. 1989. V. 31. P. 132 — 137. — (Berlin: Springer-Verlag).
75. *Fateev V., Zamolodchikov A.* Conformal Quantum Field Theory Models in Two Dimensions Having Z_3 Symmetry//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 280. P. 644 — 660; ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 380.
76. *Fateev V., Lukianov S.* The Models of Two-dimensional Confonnal Quantum Field Theory with Z_n Symmetry//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1988. V. 3. P. 507.

    Лукьянов С.//Функц. анализ и его прил. 1988. Т. 22, вып. 4. С. 1.
77. *Дринфельд В., Соколов В.* Уравнения типа Кортевега—де Фриса и простые алгебры Ли//ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 1. С. 11 — 16; Итоги науки "Современные проблемы математики". — М.: ВИНИТИ: 1984. — Т. 24. С. 81 — 180.
78. *Bershadsky M., Ooguri H.* Hidden SL(*n*) Symmetry in Conformal Field Theories//Commun. Math. Phys. 1989. V. 126. P. 49.
79. *Gerasimov A., Marshakov A. et al.* Hamiltonian Reduction of the Wess—Zummo—Witten Theory from the Point of View of Bosomzation//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 236. P. 269 — 272; ЯФ. 1990. Т. 51, вып. 2. С. 583 — 586.
80. *Bais A., Bouwknegt P., Surridge M., Shoutens K.* Extensions of the Virasoro Algebra Constructed from Kac—Moody Algebras Using Higher Order Casimir Invarants//Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 304. P. 348 — 370; Coset Construction for Extended Virasoro Algebras//Ibidem. P. 371 — 391.

[81] *Bilal A., Gervais J.* Systematic Approach to Conformal Systems with Extended Virasoro Symmetries//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 206. P. 412 — 420; Systematic Construction of Conformal Theories with Higher-spin Virasoro Symmetries//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 326. P. 222.

82. *Bakas I.* The Strucuture of the W_∞ Algebra. — Maryland Preprint. — 1988; The Large *N* Limit of Extended Conformal Symmetries//Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 228. P. 57.

Bakas I., Kiritsis E. Grassmannian Coset Models and Unitary Representations of W_∞//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1990. V. 5. P. 2039 — 2049.

83. *Morozov A.* On the Concept of Universal W_∞-**Algebra**. — Preprint ITEP 148-89;//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 357. P. 619 — 631.

84. *Pope* C., *Shen X.//* Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 236. P. 21.

85. *Pope C., Romans L., Shen X.//* Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 339. P. 191; A Brief History of W_∞//String'90/Ed. R. Arnowitt et al. — Singapore: World Scientific, 1990.

86. *Hull C.//*Phys. Lett. Ser. B. 1990, Y. 240. P. 110.

87. *Tierry-Mieg J.//*Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 197. P. 368.

88. *Mansfield P., Spence B.* Toda Theories, the Geometry of *W*-Algebras, and Minimal Models//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 362. P. 294.

89. *Matsuo Y.//*Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 227. P. 209.

90. *Marshakov A. et al.* A Note on W_3-Algebra//Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 339. P. 79 — 94; ЖЭТФ. 1990.

[91] *Schoutens K., Sevrin A., van Nieuwenhuizen P.//* Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 243. P. 245.

92. *Bergshoeff E., Pope C., Romans L., Sezgin E., Shen X., Stelle K.//*Phys. Lett. Ser. 8. 1990. V. 243. P. 350.

93. *Das S., Dhar A., Rama S.* Physical Properties of *W*-Gravities and W-Strings//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1991. V. 6, No. 33. P. 3055 — 3070.

94. *Balog J., Feher L., Forgacs P., O'Raifeartaigh L, Wipf A.* Liouville and Toda Theories as Conformally Reduced WZNW Theories//Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 227. P. 214; 1990. V. 244. P. 435; Ann. of Phys. 1990. V. 203. P. 76.

Feher L., O'Raifeartaigh L., Ruelle P., Tsuitsui I., WipfA. On the General Structure of Hamiltonian Reductions of the WZNW Theory. — Preprint DIAS-STP-91-29. — Dublin, 1991.

95. *Becchi C., Rouet A., Stora R.*. Renormalization of Gauge Theories//Phys. Lett. 1975. Ser. B. V. 52. P. 344.

96. *Тюнин И.* Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке. — Препринт ФИАН № 39. — Москва, 1975.

97. *Гитман Д., Тюнин И.* Каноническое квантование полей со связями. — М.: Наука, 1986.

98. *Koto M., Ogawa K.* Covariant Quantization of String Based on BRS Invariance//Nucl Phys. Ser B. 1983. V. 212, No. 2. P. 443 — 460.

Ohta N. Covariant Quantization of Superstring Based on Becchi—Rouet—Stora Invariance//Phys. Rev. Ser. D. 1986. V. 33. No. 6. P. 1681 — 1691.

99. *Gawedzki K., Kupiainen A.* Cost Constructions from Functional Integral//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 320. P. 625 — 669.

100. *Коган Я. и др.* О структуре (2 + 1) фотодинамики//ЖЭТФ. 1985. Т. 88, вып. 1. С. 3 — 16.

[101] *Polyakov A.* Self-tuning Fields and Resonant Correlations in 2D Gravity//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1991. V. 6. P. 635.

102. *Гольфанд Ю., Лихтман А.* Расширенные алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение *Р*-инвариантности//Письма ЖЭТФ. 1971. Т. 13, вып. 8. С. 452 — 455.

103. *Niemi A., Palo K. et al.* Supersymmetry and Loop Space Geometry//Phys. Lett. Ser. B. 1991. V. 271. P. 365; Supersymplectic Geometry of Supersymmetric Quantum Field Theories. — Preprint ITER-M-10/91; to appear in Nucl. Phys. Ser. B. 1992.

104. *Duistermaat J., Heckman G.* On the Variation in the Cohomology in the Symplectic From of the Reduced Phase Space//Intern. Math. 1982. V. 69, P. 259; 1983. V. 72. P. 153.

105. *Atiyah M., Bott R.* The Moment Map and Equivariant Cohomology//Topology. 1984. V. 23. P. 1.

106. *Atiyah M.//* Asterisque. 1985. V. 131. P. 43.

107. *Blau M., Keski-Vakkuri E., Neimi A.* Path Integrals and Geometry of Trajectories//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 246. P. 92.

108. *Niemi A., Pasanen P.* Orbit Geometry, Group Representations, ant Topological Quantum Field Theories//Phys. Lett. Ser. B. 1991. V. 253. P. 349.

109. *Atiyah M.F., Bott R.* The Yang—Mills Equations over Riemann Surfaces//Phil. Tratis. Roy. Soc. London. Ser. A. 1982. V, 308. P. 523.

110. *Witten E.* Supersymmetry and Morse Theory//J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 661.

[111] *Witten E.* Dynamical Breaking of Supersytnmetry//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 188. No. 4.

P. 513 — 554; Constraints on Supersymmetry Breaking//Ibidem. 1982. V. 202. P. 253.
112. *Hietamaki A., Niemi A., Palo K. et al.* Geometry of N = 1/2 Supersymmetry and the Atiyah—Singer Theorem//Phys. Lett. Ser. B. 1991. V. 263. P. 417 — 424.
113. *Nicolai H.//* Phys. Lett. Ser. B. 1980. V. 89. P. 341; Nucl. Phys. Ser. B. 1980. V. 176. P. 419.
114. *Gecotti S., Girardello L.//* Phys. Lett. Ser. B. 1982. V. 110. P. 39.
115. *Vafa C., Warner N.* Catastrophes and the Classification on Conformal Theories//Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 218. P. 51.
Martinec E.// Ibidem. V. 217. P. 431.
116. *Greene B., Vafa C., Warner N.//* Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 324. P. 371.
Matrinec E. Criticality, Catastrophe, and Compactifications//V. Knizhnik Memorial Volume. — 1989.
117. *Witten E.* Quantum Field Theory and the Jones Polynomial//Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 351.
118. *Akselrod S., Delia Pietra S., Witten E.* Geometric Quantization of Chern—Simons Gauge Theory. — Priprint IASSNS-HEP-89/57.
119. *Fairlie D., Govaerts J. et al.* Universal Field Equations with Covenant Solutions//Nucl. Phys. Ser. B. 1992. V. 373, No. 1. P. 214 — 232.
120. *Witten E.* On the Structure of the Topological Phase of Two-dimensional Gravity//Nuel. Phys. Ser. B. 1990. V. 340. P. 281; Two-dimensional Gravity and Intersection Theory on Moduli Space//Surveys Diff. Geom. 1991. V. 1. P. 243 — 310.
Dijkgraaf R., Witten E. Mean Field Theory. Topological Field Theory, and Multimatrix Models//Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 342. P. 486.
[121] *Verlinde E., Verlinde H.* A Solution to Two-dimensional Topological Quantum Gravity//Ibidem. 1991. V. 348. P. 457.
122. *Knizhnik V., Polyakov A., Zamolodchikov A.* Fractal Structure of 2D Quantum Gravity//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1988. V. 3. P. 819 — 826.
123. *David F.//* Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1988. V. 3. P. 1651.
124. *Distler J., Kawai H.//* Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 231. P. 509.
125. *Морозов А., Переломов А.* Струны и комплексная геометрия//Итоги науки. "Современные проблемы математики". — М.: ВИНИТИ, 1990.
126. *Alekseev A., Shatashvili S.* From Geometric Quantization to Confonnal Field Theory//Commuti. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 197 — 212.
127. *Levine A. et al.* On the Foundations of the Random Lattices Approach to Quantum Gravity//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 243. P. 207 — 214.
Smit D.-J.// Comm. Math. Phys. 1992.
128. *Harer J., Zagier D.* The Euler Characteristic of the Moduli Space of Curves//Invent. Math. 1986. V. 85. P. 457.
Harer J. The Cohomology of the Moduli Space of Curves//Lect. Not. Math. V. 1337. P. 138 — 221. — (Berlin: Springer-Veriag).
Penner R. The Decorated Teichmueller Space of Punctured Surfaces//Commim. Math. Phys. 1987. V. 113. P. 299 — 339; Perturbative Series and the Moduli Space of Riemann Surfaces//J. Diff. Geom. 1988. V. 27. P. 35 — 53.
129. *Концевич М.* Теория пересечений на пространстве модулей кривых//Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25, вып. 2. С. 50 — 57; Intersection Theory of the Moduli Space of Curves and the Matrix Airy Function. — Preprint MPI/91-77. — Bonn, 1991.
130. *Книжник В.* Многопетлевые амплитуды в теории квантовых струн и комплексная геометрия//УФН. 1989. Т. 159, вып. 3. С. 401 — 453.
[131] *Морозов А.* Пертурбативные методы в теории струн//Физ. ЭЧАЯ. 1992. Т. 23, вып. 1. С. 174 — 238.
132. *Квиллен Д.* Детерминанты операторов Коши—Римана на римановых поверхностях//Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19, вып. 1. С. 37 — 41.
133. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. — М.: Мир, 1988.
134. *Fay J.* Theto-functions on Reimann Surfaces// Lect. Not. Math. 1973. No. 352.
135. *Белавин А., Книжник В.* Комплексная геометрия и теория квантовых струн//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 364; Algebraic Geometry and the Geometry of Quantum Strings//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 168. P. 201.
136. *Morozov A.* Explicit Formulae for One-, Two-, Three- and Four-loop String Amplitudes//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 184. P. 171; ЯФ. 1987. Т. 45, вып; 1. С. 287 — 292.
137. *Дубровин Б.* Тэта-функции и нелинейные уравнения//УМН. 1981. Т, 36, вып. 2. С 11 — 80.
138. *Mulase M.* Cohomological Structure in Soliton Equations and Jacobian Varieties// J. Diff. Geom. 1984. V. 19. P. 403 — 430; Solvability of the Super KP Equation and a Generalization of the Birkghoff Deconposition/Vlnvent. Math. 1988. V. 92. P. 1—46.
139. *Shiota T.* Characterization of Jacobian Varieties in Terms of Soliton Equations. — Harvard University, 1984.

140. *Alvarez O.* Theory of Strings with Boimdaries//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 216. P. 125.
Carlip S. Sewing Closed String Amplitudes//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 209. P. 464.
Blau S., Carlip S., Clements M., Delia Pietra S., Delia Pietra V. The String Amplitude on Surfaces with Boundaries and Crosscaps//Nucl Phys. Ser. B. 1988. V. 301. P. 285 — 303.
[141] *Rosly A. et al.* Statistical Sums for Open and/or Oriented Strings//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 195. P. 554 — 556; Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 168; On Many-loop Calculations in the Theory of Open Strings//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 214. P. 522 — 526; ЯФ. 1989. Т. 49, вып. 1. С. 256 — 261; Strings and Open Riemann Surfaces//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 326. P. 205 — 221; ЖЭТФ. 1989. Т. 95, вып. 2. С. 428 — 441.
142. *Вайсбурд И.*//ЯФ. 1988. Т. 48. С. 1496.
143. *Belavin A., Knizhnik V., Perelomov A. et. al.* Two- and Three-loop Amplitudes in the Bosonic String Theory//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 178. P. 324; Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 319.
144. *Moore G.* Modular Forms and Two-loop String Physcis//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 176. P. 69.
145. *Zamolodchikov Al.* Conformal Scalar Field on the Hyperellyptic Curve and Critical Ashkin—Teller Multipoint Correlation Functions//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 285. P. 481.
146. *Ленг С.* Основы диофантовой геометрии. — М.: Мир, 1986.
147. *Кричевер И.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений//УМН. 1977. Т. 32, вып. 6. С. 183.
148. *Segal G., Wilson G.* Loop Groups and Equations of KdV Type//Publ. IHES. 1985. V. 61. P. 1; перевод в приложении к [228].
149. *Beilinson A., Manin Yu., Schekhtman V.* Sheaves of Virasoro and Neveu—Schwarz Algebras//Lect. Not. Math. 1987. V. 1289. P. 52 - 66.
Концевич М. Алгебра Бирасоро и пространства Тейхмюллера//Функ. анализ и его прил. 1987. Т. 21, вып. 2. С. 78 — 79.
150. *Герасимов А.* Degenerate Surfaces and Solitons. Handle Gluing Operators. — Preprint ITEP-66-88; ЯФ. 1989.
[151] *Vafa C.* Operator Formalism on Riemann Surfaces//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 190. P. 47.
152. *Alvarez-Gaume L., Bost J.-B., Moore G., Nelson P., Vafa C.* Bosonization on Higher Genus Riemann Surfaces//Commim. Math. Phys. 1987. V. 112. P. 503.
Alvarez-Gaume L,, Gomez C., Moore G., Vafa C.// Commun. Math. Phys. 1986. V. 106. P. 1; String in the Operator Fonnalism//Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 303. P. 455 — 521.
Alvarez-Gaume L., Gomez C., Nelson P., Sierra G., Vafa C. Ferraiomc Strings in the Operator Formalism//Nuel. Phys. Ser. B. 1988/89. V. 311. P. 333.
153. *Vafa C.* Conformal Theories and Punctured Surfaces//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 199. P. 195 — 202.
Sonoda H. Sewing Conformal Field Theories (Land II)//Nucl. Phys. Ser. Б. 1988. V. 311. Pp. 401 — 416; 417.
154. *Friedan D., Shenker S.* The Integrable Analytic Geometry of Quantum String//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 175. P. 287;The Analytic Geometry of Two-dimensional Conformal Field Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 281, No. 3/4. P. 509 — 545.
155. *Ishibashi N., Matsuo Y., Ooguri H.* Soliton Equations and Free Fermiotis on Riemann Surfaces//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1987. V. 2. P. 119.
156. *Alvarez-Gaume L., Gomez C., Reina C.* Loop Groups, Grassmanians, and String Theory//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 190, No. 1/2, P. 55 — 62.
Witten E. Quantum Field Theory, Grassmanians, and Algebraic Curves//Commun. Math. Phys. 1988. V. 113. P. 529.
157. *Morozov A.* String theory and the Structure of the Universal Moduli Space//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 196. P. 325; Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45, вып. 10. С. 457 — 460.
158. *Gerasimov A., Marsnakov A., Olshanetsky M., Shatashvili S. et al.* Wess—Zumino—Witten Model as a Theory of Free Field//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1990. V. 5, No. 13. P. 2495 — 2590.
159. *Gerasimov A., Marshakov A. et al.* Free Field Representation of Parafermions and Related Coset Models//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 328. P. 64 — 676.
160. *Фейгин Б.. Фукс Д.* Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро//Функ. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 2. С. 47 — 63; Модули Берма над алгеброй Вирасоро//Ibidem. 1983. Т. 17, вып. 3. С.91 — 92.
[161] *Dotsenko V., Fateev V.* Conformal Algebras and Multipoint Correlation Functions in 2D Statistical Models//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 240. P. 312; Four-point Correlation Fuctions and the Operator Algebra in 2D Conformal Invariant Theories with Central Charge $c < 1$//Ibidem. 1985. V. 251. P. 691 — 734.
162. *Thorn Ch.* Computing the Kac Determinant Using Dual Model Techniques and More about the No-ghost Theorem//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 248. P. 551.
163. *Felder G.* BRST Approach to Minima! Models//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 317. P. 215 — 236; V. 324. P. 548.

Felder G., Frolich J., Keller G. On the Structure of Unitary Conformal Field Theory. I. Existence of Conformal Blocks/XCommun. Math. Phys. 1989. V. 124. P. 417 — 464.
Felder G., Gawedzki K., Kupiainen A. Spectra of Wess—Zumino—Witten Models with Arbitrary Simple Groups//Comnum. Math. Phys. 1988. V. 117. P. 121 — 158.
Gawedzki K. Quadrature of Conformal Field Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 328. P. 733 — 752.

164. *Gepner D.//*Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 296. P. 757.
*Vafa C.//*Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 4. P. 1169.

165. *Cecotti S., Girardello L., Pasquinucci A.* Singularity Theory and $N = 2$ Supersymmetry//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1990. V. 5. P. 2427; Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 328. P. 701.
Cecotti S. $N = 2$ Landau—Ginzburg versus Calabi—Yau **σ-Models:** Nonperturbative Aspects. — Preprint 69/90/EP.

166. *Marshakov A. et al.* Landau—Ginsburg Models with $N = 2$ Supersymmetry as Conventional Conformal Theories//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 235. P. 97 — 105.
Ito K. Coulomb Gas Formalism for $N = 2$ Superconformal Field Theories//Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 230. P. 71 — 77; $N = 2$ Super Coulomb Gas Formalism//Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 332. P. 566 — 582.
Ohta N., Suzuki H. $N = 2$ Superconformal Models and Their Free Field Realization//Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 332. P. 146 — 168.

167. *Kallosh R. et al.* Green—Schwarz Action and Loop Calclalions for Superstrings//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1988. V. 3. P. 1943 — 1958; ЖЭТФ. 1988. Т. 94, вып. 8. С. 42 — 56.

168. Сато М., Дзимбо М., Мива Т. Голономные квантовые поля. — М.: Мир, 1983.

169. *Sato M.* Soliton Equations as Dynomical Systems on an Infinite Grassmann Manifold//RIMS Kokyuroku. 1981. V. 439. P. 30 — 46.

170. *Sato M., Sato Ya.* Soliton Equations as Dynamical Systems of Infinite Dimensional Grassmann Manifold//Lect. Not. Num. Appl. Anal. 1982. V. 5. P. 259 — 271.

[171] *Jimbo M., Miwa T.* Solilons and Infinite Dimensional Lie Algebras//Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1983. V. 19. P. 943 — 1001.

172. *Замолодчиков А.* О "необратимости" потока ренормализационной группы в двумерной теории поля//Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 43, вып. 12. С. 565 — 567.

173. *Capelli A., Friedan D., Latorre J.* C-Theorem and Spectral Representation. — Preprint UB-ECM-PF 11/90. — Barcelona, 1990.

174. *Brezin E., Gross D.//*Phys. Lett. Ser. B. 1980. V. 97. P. 120.

175. *Brezin E., Jtzykson C., Parisi G., Zuber J.-B.//* Commun. Math. Phys. 1978. V. 59. P. 35.
Bessis D,, Itzykson C., Zuber J.-B. Quantum Field Theory Techniques in Graphical Enumeratm//Adv. Appl. Math. 1980. V. 1. P. 109 — 157.

176. *Mehta M.//*Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 327.

177. *Kazakov V.* The Appearance of Matter Field from Quantum Fluctuations of 2D Gravity//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 4. P. 2125 — 2139.

178. *Brezin E., Kazakov V.* Exactly Solvable Field Theories of Closed Strings//Phys. Lett. Ser. *E.* 1990. V. 236. P. 144.

179. *Douglas M., Shenker S.* Strings in Less than One Dimension//Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 335. P. 635.

180. Gross *D., Migdal A.* Nonperturbative Two-dimensional Quantum Gravity//Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 127.

[181] *Fukuma M., Kawai K., Nakayama R.* Continuum Schwinger—Dyson Equations and Universal Structure in 2D Quantum Gravity//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1991. V. 6. P. 1385; Infinite-dimensional Structure ofTwo-dimensional Quantum Gravity. — Preprint UT-572, KEK-TH-272. — 1990; Explicit Solution for *p-q* Duality in Two-dimensional Quantum Gravity. — Preprint UT-582; KEK-TH-289. — 1991.

182. *DijkgraafR., Verlinde E., Verlinde H.* Loop Equations and Virasoro Constraints in Nonperturbative 2D Quantum Gravity//Nucl. Phys. Ser. *E.* 1991. V. 348. P. 435.

183. *Mironov A. et al.* On the Origin of Virasoro Constraints in Matrix Models: Lagrangian Approach//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 252. P. 47 — 52.

184. *Gerasimov A., Marshakov A., Moronov A., Orlov A. et. al.* Matrix Models of Two-dimensional Gravity and Toda Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 357. P. 565 — 618.

185. *Gerasimov A., Makeenko Yu., Marshakov A., Moronov A., Orlov A. et al.* Matrix Models as Integrable Systems: From Universality to Geometrodynamieal Principle of String Theory//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1991. V. 6, No. 33. P. 3079 — 3090.

186. *Kharchev S., Marshakov A., Mironov A., Zabrodin A. et al.* Unification of all String Models with $c < 1$//Phys. *Lett.* Ser. B. 1992. V. 275. P. 311 — 314; Письма ЖЭТФ. 1992. Т. 55, вып. 1. С. 13 — 18; Towards Unified Theory of 2D Gravity. — Preprint ITEP-M-9/91; to apper in Nucl. Phys. Ser. B. 1992.

187. *Witten E.* On the Kontsevich Model and Other Models of Two-dimensional Gravity. — Preprint IASSNS-HEP-91/24.

188. *MarshakovA., MironovA. et al.* On Equivalence of Topological and Quantum 2D Gravities//Phys. Lett. Ser. B. 1992. V. 274. P. 280 — 288; сокр. вариант://Письма ЖЭТФ. 1991. Т. 54, вып. 8. С. 425 — 458.
189. *Gross D., Newman M.* Unitary and Hermitean Matrices in an External Field. II. The Kontsevich Model and Continuum Virasoro Constraints. — Preprint PUPT-1282. — 1991.
190. *DijkgraafR.*. Intersection Theory, Intergable Hierarchies, and Topological Field Theory. — Preprint IASSNS-HEP-91/91.
[191] *Crnkovic C., Ginsparg P., Moore G.* The Ising Model, the Yang—Lee Singularity, and 2D Quantum Gravity//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 237. P. 196.
192. *Douglas M.* Strings in Less than One Dimension and the Generalized KdV Heirarchies//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 238. P. 176.
193. *Klebanov L, Polyakov A.//* Mod. Phys. Utt. Ser. A. 1991. V. 6. P. 3273.
194. *Witten E.* Ground Ring of Two-dimensional String Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1992. V. 373, No. 1. P. 187 — 213.
195. *Ibanez L., Kirn J., Nilles H., Quevedo F.* Orbifold Compactifications with Three Families of $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 191, No. 3. P. 282 — 286.
Ibanez L, Mas J., Nilles H., Quevedo F. Heterotic Strings in Symmetric and Asymmetric Orbifold Backgroimds//Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 301, No. 1. P. 157 — 196.
196. *Narain K.* New Heterotic String Theories in Uncompactified Dimensions < 10//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 169, No. 1. P. 49 — 52.
Narain K., Sarmadi M., Witten E. A Note on Toroidal Compactifieation of Heterotic String Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 279. P. 369 — 379.
Namazie M., Narain K., Sarmadi M.//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 177. P. 329.
197. *Lerche W., Lust D., Shellekens A.* Chiral Four-dimensional Heterotic Strings from Self-dual Lattices//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 287, No. 3. P. 477 — 507.
198. *Kawai H., Lewellen D.C., Tye S.-H.* Four-dimensional Type II Strings and Their Extensions: Type III Strings//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 191, No. 1/2. P. 63 — 69; Construction of Fertnionic String Models in Four Dimensions//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 288. P. 1 — 76.
199. *Antoniadis I., Bachas C., Kounnas C.* Four-dimensional Superstrings//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 289, No. 1. P. 87 — 108.
200. *Polyakov A.* Gauge Fields and Strings. — New York: Harwood Academic Publ., 1987.
[201] *Кетов С.* Введение в квантовую теорию струн и суперструн. — Новосибирск: Наука, 1990.
202. *Барбашов Б., Нестеренко В.* Суперструны — новый подход к единой теории фундаментальных взаимодействий//УФН. 1986. Т. 150, вып. 4. С. 489 — 524.
203. *Казаков Д.* Суперструны, или За пределами стандартных представлений//Ibidsem С. 561 — 575.
204. *Грин М.* Теории суперструн в реальном мире//Ibidsem. С. 577 — 579.
205. *Энтони С.* Суперструны: всеобъемлющая теория?//Ibidsem. С. 579 — 583.
206. *Green M.* Unification of Forces and Particles in Supersting Thories//Nature. 1985, V. 314, No. 4. P. 409 — 414; Суперсгруны//В мире науки (оригин. Scientific American). 1986. No. С. 24 — 39.
Гелл-Манн М. От перенормируемости к вычислимости//УФН. 1987. Т. 151, вып. 4. С. 683 — 698.
Ellis J. The Superstings: Theory of Everything or of Nothing?//Nature. 1986. V. 323. P. 595 — 598.
Schwarz J. Review of Recenet Developments in Super-string Theory//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1987. V. 2, No. 3. P. 593 — 643.
Морозов А. Струны в теоретической физике//Эйнштейновский сборник, 1986 — 1990. — М.: Наука, 1990; Теория струн и фундаментальные взаимодействия//Природа. 1990. №1. С. 13 — 22.
207. *Schwarz J.* Superstring Theory//Phys. Rep. 1982. V. 89. No. 5. P. 223 — 322.
Green M. Supersymraetrical Dual String Theories and Their Field Theory Limits: A Review//Surveys High Energy Phys. 1983. V. 3, No. 3. P. 127 — 160.
208. *D'Hoker E., Phong D.* The Geometry of String Perturbation Theory//Rev. Mod. Phys. 1988. V. 60. P. 917.
209. *Маршаков А., Миронов А.* Двумерные конформные теории поля — 6 лет прогресса//Материалы XXV школы ЛИЯФ. — Л., 1990. — С. 2 — 107.
210. *Кудрявцев В., Липатов Л.//*Материалы XXII школы ЛИЯФ. — Л., 1987. — С. 169.
[211] *Ольшанецкий М.* Краткий путеводитель для физиков по современной геометрии//УФН. 1982. Т. 136, вып. 3. С. 421 — 433.
212. *Дубровин Б., Новиков С., Фоменко А.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, т. 1, 1979; т. 2, 1932.
213. *Шафаревич И.* Основные понятия алгебры//Итоги науки. Сер. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". — М.: ВИНИТИ. 1985. — Т. 11. С. 5 — 288.

214. *Ван-дер-Варден Б.* Алгебра. — М.: Наука, 1979.

215. *Ленг С.* Алгебра. — М.: Мир, 1968.

216. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1982. — Т. 1, 2.

217. *Шафаревич И.* Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1988. — Т. 1, 2.

218. *Гото М., Гроссханс Ф.* Полупростые алгебры Ли. — М.: Мир, 1981.

219. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — Т. 1, 2.

220. *Кириллов А.* Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1978.

[221] *Kuiper N.* Locally Projective Spaces of Dimension One//Michigan Math. J. 1953/54. V. 2, No. 2. P. 95.

Лазуткин В., Панкратова Т. Нормальные формы и нереальные деформации для уравнений Хилла//Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 1. С. 41 — 48.

Kirillov A. Infinite-dimensional Lie Groups: Their Orbits, Invariants, and Representations. Geometry of Moments//Lect. Not. Math. 1982. V. 970. P. 101 — 123.

Witten E. Coadjoint Orbits of the Virasoro Group//Commun. Math. Phys. 1988. V. 114. P. 1.

Овсиенко В., Хесин Б. Симплектические пучки скобок Гельфанда—Дикого и гомотопические классы невырожденных кривых//Функц. анализ и его прил. 1990. Т. 24, вып. 1, С. 38 — 47.

222. *Bowick M., Rajeev S.* String Theory as the **Kähler** Geometry of Loop Space//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58, No. 6. P. 535 — 538; The Holomorphic Geometry of Closed Bosonic String and **Diff S^1/S^1/Nucl.** Phys. Ser. B. 1987. V. 293, No. 2. P. 348 — 384.

223. *Mojal J.//* Proc. Cambr. Phil. Soc. 1949. V. 45. P. 99.

224. *Baker G.//* Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 2198.

Fairlie D.// Proc. Cambr. Phil. Soc. 1964. V. 60. P. 581.

225. *Roger C.* Deformations universelle des crochets de Poisson//Lect. Not. Math. No. 1418.

226. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. — М.: Наука, 1986.

227. *Кас V.* Infinite-dimensional De Algebras. — Boston: Birkhauser, 1983.

228. *Пресли Э., Сигал Г.* Группы петель. — М.: Мир, 1990.

229. *Witten E.* Noneommutative Geometry and String Field Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 268, No. 2. P. 253 — 282; Interacting Field Theory of Open Superstmgs//Ibidem. V. 276, No. 2. P. 291 — 314.

Gross D., Jewicki A. Operator Formulation of Interacting String Field Theory. NSR Superslring//Ibidem. V. 293, No. 1. P. 29 — 82.

230. *Leinaas J., Myrheim J.*//Nuovo Cimento. Ser. B. 1977, V. 37. P. 1.

Goldin G., Menikoff R., Sharp D.// J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1664.

Wilczek F.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1144; V. 49. P. 957.

Stone M.//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1990. V. 4. P. 1465.

[231] *Schwarz A.* The Partition Function of Degenerate Quadratic Functional and Ray—Singer Invariants// Lett. Math. Phys. 1978. V. 2. P. 247.

232. *Коган Я. и др.* Эффекты весс-зуминовского члена в теории $d = 11$ супергравитации//Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 39, вып. 10. С. 482 — 485.

233. *Ольшанецкий М., Переломов А*//Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 3. С. 86; 1977. Т. 11, вып. 1. С. 75; 1978. Т. 12, вып. 2. С. 60; ТМФ. 1980. Т. 45. С. 3; Classical Integrable Finite-dimensional Systems Related to De Algebras//Phys. Rep. 1981. V. 5. P. 313 — 400.

234. *Переломов А.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. — М.: Наука, 1990.

235. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. — М.: Мир, 1985.

236. *Alekseev A., Faddeev L, Shatashvili S.//* J. Geom. 1989. V. И. P. 123.

237. *Серр Ж.-П.* Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.

238. *Leech J.* Some Sphere Packing in Higher Dimensional Space//Can. J. Math. 1964. V. 16, No. 4. P. 657 — 682; Notes on Sphere Packings//Ibidem. 1967. V. 19, No. 2. P. 251 — 267.

239. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. — М.: Мир, 1985.

240. *Frenkel I., Lepowsky J., Meurman A.* A Natural Representation of the Fischer—Griess Monster with the Modular Function *J* as a Character//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. P. 3256 — 3260;//Vertes Operators in Mathematical Physics. — Berlin: Springer-Veriag, 1984.

[241] *Блейхут П.* Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. — М.: Мир, 1986.

242. *Knizhnik V.* Analytic Field on Reimann Surfaces. II//Commun. Math. Phys. 1987. V. 112. P. 567 — 590.

243. *Dixon L, Friedan D., Matrinec E., Shenker S.* The Conformal Field Theory on Orbifolds//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 282. P. 13.

Hamidi S., Vafa C. Interactions on Orbifolds/Abidem. V. 279. P. 465.

244. *Lebedev D. et al.* Statistical Sums of Strings on Hyperellyptic Surfaces//Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 302. P. 163 — 188; ЯФ. 1988. Т. 47, вып. 2. С. 853 — 871.

245. *Bershadsky M., Radul A.* Conformal Field Theories with Additional Z_N Symmetry//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1987. V. 2. P. 165.
246. *PerelomovA. etal.* ANote on Many-loop Calculations for Superstrings in the NSR Fonnalism//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1989. V. 4, No. 7. P. 1773 — 1781; ЖЭТФ. 1989.
247. *Lechtenfeld O., Parkes A//* Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 202. P. 75.
*Lechtenfeld O.//*Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 309. P. 361 — 378.
248. *Kac V., Schwarz A.//* Phys. Lett. Ser. B. 1991. V. 257. P. 329.
249. *Schwarz A.* On Some Mathematical Problems of 2D Gravity and W_h Gravity//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1991. V. 6. P. 611; On Solution to the Equation. — Preprint Davte University. — 1991.
250. *Lebedev D., Radul A.//*Commun. Math. Phys. 1983. V. 91. P. 543.
Degasperis A., Lebedev D., Olsnanetsky M., Pakuliak S., Perelomov A., Santini P. Non-local Integrable Partners to Generalized MKdV and Two-dimensional Toda lattice Equations in the Formalism of a Dressing Method with Quantized Spectral Parameter//Commun. Math. Phys. 1991. V. 141. P. 133 — 151.
[251] *Robin J.* The Geometry of the Super KP Flows//Comtnun. Math. Phys. 1991. V. 137. P. 533 — 552.
Le Clair A. Supersymmetric KP Hierarchy: Free Field Constructuin//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 314. P. 425 — 438.
252. *Its A., Izergin A., Korepin V., Slavnov N.* Differential Equations for Quantum Correlation Functions. — Preprint. — Australia, 1990.
253. *Ueno K,, Takasaki K.* Toda Lattice Hierarchy//Adv. Stud. Pure Math. 1984. V. 4. P. 1.
254. *Jakiw R., Rajaraman R.//* Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 2060.
255. *Faddeev L, Shatashvili S.//*Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 167. P. 255.
256. *Harada K,, Tsuitsui I.//*Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 183. P. 311.
257. *Drinfeld V.* Quantum Groups//Proc. of ICM. — Berkeley, 1986. — P. 798 — 820.
258. *Manin Yu.* Quantum Groups and Non-commutative Geometry. — Preprint CIRM-1561. —Montreal, 1988; Commim. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 163.
259. *Решетихин Н., Тахтаджян Л., Фаддеев Л.* Квантование групп Ли и алгебр Ли//Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. С. 178 — 206.
260. *Frenkel I., Kac V.* Sasic Representations of Affme Lie Algebras and Dual Resonance Model//Invent. Math. 1989. V. 62. P. 23 — 65.
[261] *Фейгин Б., Френкель Э.//*Семейство представлений аффинных алгебр Ли//УМН. 1988. Т. 43, вып. 5. С. 227 — 228; Affme Kac—Moody Algebras and Semi-Infinite Flag Manifolds//Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 161 — 189.
262. *Distler J.* 2D Quantum Gravity, Topological Field Theory, and the Multicritical Matrix Models//Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 342. P. 523.
Gerasimov A., Marshakov A. et al. On 2D Gravity as Confonnal Field Theory//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 242. P. 345 — 353.
MarshakovA., MironovA. etal. Generalized Matrix Models as Conformal Field Theories. Discrete Case//Phys. Lett. Sen B. 1991. V. 265. P. 99 — 107.
263. *Li K.//*Nucl. Phys. Ser. B. 1990. V. 346. P. 329.
Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. Topological Strings in $D< 1$//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 352. P. 59.
264. *Moore G.* Geometry of String Equations//Commun. Math. Phys. 1990. V. 133. P. 261.
265. *Bowick M., Shewitz D. et at.* Reduced Unitary Matrix Models and the Hierarchy of r-Functions//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 354. P. 496 — 530.
266. *David F.* Loop Equations and Nonperturbative Effects in Two-dimensional Quantum Gravity//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1990. V. 5. P. 1019.
267. *Ambjorn J., Jurkewicz J., Makeenko Yu.* Multiloop Correlators for Two-dimensional Gravity//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 251. P. 517.
268. *Makeenko Yu., Marshakov A., Mironov A. et al.* Continuum versus Discrete Virasoro in One-matrix Models//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 356. P. 574 — 628.
269. *Абрикосов А., Горьков Л., Дзялошинский И.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: Физматгиз, 1962.
270. *Книжник В.* и др. О перенормировке топологического заряда//Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 39, вып. 5. С. 202 — 205.
[271] *Пруискен А.* Теория поля, скейлинг и проблема локализации//[43]. — Гл. 5. С. 127 — 179.
272. *Levine H., Libbe S.//*Phys. Lett. Ser. B. 1985.
273. *Pruisken A.//*Nucl. Phys. Ser. 8. 1984. V. 235. P. 277; Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 416, V. 32. P. 2636.
274. *Levine H., Ubbe S., Pruisken A.//*Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1915; Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 240. Pp. 30, 49, 71.

275. *Leznov A., Saveliev M.*//Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 489; Commim. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 111; 1983. V. 83. P. 59; Acta Appl. Math. 1989. V. 16. P. 1.
Mikhailov A., Olshanetsky M., Perelomov A.//Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 473.
276. *Бернштейн И., Гельфанд И., Гельфанд С.* О категории g-модулей//Функ. анал. и его прил. 1976. Т. 10. С. 1 — 8; Модели представлений групп Ли//Труды семинара И.Г. Петровского. 1976. Т. 2. С. 3 —21.
277. *Юрьев Д.* Квантовая конформная теория поля//УМН. 1991. Т. 46, вып. 4. С. 115 — 138.
278. *Alekseev A., Shatashvili S.* Quantum Groups and WZNW Model//Coinmun. Math. Phys. 1990. V. 133. P. 353 — 368.
279. *Witten E.* Global Aspects of Current AIgebra//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 233. P. 422 — 432; Current Algebra, Baryons, and Quark Confinement//Ibidem. P. 433.
280. *Witten E.* Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions//Commun. Math. Phys. 1984. V 92. P. 455 — 472.
[281] *Gepner D., Witten E.* String Theory on Group Manifolds//Nud. Phys. Ser. B. 1986. V. 278. P. 493 — 549.
282. *Wess J., Zumino B.* Consequences of Anomalous Ward Identities//Phys. Lett. Ser. B. 1971. V. 37, No. 1. P. 95 — 97.
283. *Новиков С.*// ДАН СССР. 1981. Т. 260. С. 222; Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 4. С. 37; Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса//УМН. 1982. Т. 37, вып. 5. С. 3.
Новиков С., Шмельцер И.//Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 3. С. 54.
284. *Sugawara H. A* Field Theory of Currents//Phys. Rev. 1968. V. 170. P. 1659 — 1662.
285. *Bardakci K., Halpern M.* New Dual Models//Phys. Rev. Ser. D. 1971. V. 3. P. 2493.
Halpern M.// Phys. Rev. Ser. D. 1971. V. 3. P. 2398.
286. *Knizhnik V., Zamolodchikov A.* Current Algebra and Wess—Zumino Model in Two Dimensions//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 247. P. 83.
287. *Fock V,, Nekrasov N.. Rosly A., Selivanov K.* What We Think about the Higher Domensional Chern—Simons Theories. — Preprint ITER 70-91.
288. *Polyakov A., Wiegmann P.* Theory of Non-Abelian Goldstone Bosons in Two Dimensions//Phys. Lett. Ser. B. 1983. V. 131. P. 121; Goldstone Fields in Two Dimensions with Multivalued Actions//Ibidem. 1984. V. 141. P. 233 — 238.
289. *Witten E.* An SU(2) Anomaly//Phys. Lett. Ser. B. 1982. V. 117. P. 324 — 328.
290. *Niemi A., Semenoff G.*//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2077.
[291]. *Redlich A*// Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 18.
292. *Коган Я. и др.* Возникновение весс-зуминовских членов в нечетномерных теориях из фермионных детерминантов//ЯФ. 1985. Т. 41, вып. 4. С. 1080 — 1096.
293. *Deser S., Jakiw R., Templeton S.* Three-dimensional Massive Gauge Theories//Phys. Rev Lett 1982. V. 48. P. 975; Topologically Massive Gauge Theory//Ann. of Phys. 1982. V. 140. P. 372.
294. *Schonfeld J.* A Mass Term for Three-dimensional Gauge Fields//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V . 185. P. 157.
295. Математическая энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1977 — 1985.
296. *Frenkel I., Lepowski J.* Preprint. — Yale, 1990
297. *Verlinde E.* Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 300. P. 360.
298. *Grothendieck A.*// Publ. IHES. 1966. V. 29. P. 95.
Lerche W., Vafa C., Warner M//Nucl. Phys. Ser. Б. 1989. V. 324. P. 427.
299. *Vafa C.* Topological Uindau—Ginzburg Models/Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1991. V. 6. P. 337.
Cecotti S., Vafa C. Topological and Anti-topological Fusion//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 367. P. 359; Exact Results for Supersymmetric Sigma Models//Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 903.
300. *Krichever I.* The Dispersionless Lax Equations and Topological Minimal Models//Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 415 — 429.
Dubrovin B. Hamiltonian Formalism of Whitham-type Hierarchies and Topological Landau—Ginsburg Models//Jbidem. 1992. V. 145. P. 195 — 207.
[301] *Шиффер М., Спенсер Д.* Функционалы на конечных римановых поверхностях. — М.: ИЛ, 1957.
302. *Callan* C., *Dashen R., Gross D.*// Phys. Rev. Ser. D. 1978. V. 17. P. 2717.
303. *Вайнштейн А., Захаров В., Новиков В., Шифман М.* Инстантонная азбука//УФН. 1982. Т. 136. С. 553.
304. *Asorey M., Esteve J., Solas J.* Exact Renormalization Group Analysis of First-order Phase Transitions. — Preprint Univ. Zaragoza. — 1991.
305. *Хмельницкий Д.* Квантование холловской проводимости//Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 454 — 458.
306. *Niemi A. et al.* Renormalization of Topological Actions and Anyonic Superconductivity//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 236, No. 1. P. 44 — 48.

307. *Farkas H., Kra I.* Riemann Surfaces. — Berlin: Springer-Verlag, 1980.
Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. — М.: ИЛ, 1960.
Альфорс А., Берс Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. — М.: ИЛ, 1961.
Крушкаль С. Квазиконформные отображения и римановы поверхности. — Новосибирск: Наука, 1975.
308. *Клеменс Г.* Мозаика теории комплексных кривых. — М.: Мир, 1984.
309. *Переломов А.* Решения типа инстантонов в киральных моделях//УФН. 1981. Т. 134, вып. 4. С. 577 — 609.
310. *Perelomov A.* Chiral Models: Geometrical Aspects//Phys. Rep. 1987. V. 146, No. 3. P. 135 — 213.
[311] *Polchinski J.//*Phys. Lett. Ser. B. 1987.
312. *Giddings S., Strominger A.* Baby-Universes, Third Quantization, and the Cosmological Constant//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 307. P. 854.
Strominger A. Third Quantizaton//Proc. the Royal Society Discussion Meeting on the Physics and Mathematics of Strings. — London, 1988.
313. *Kaku M.* String Theory. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1988.
Kaku M., Kikkawa K, Field Theory of Relativlstic Strings. I. Trees//Phys. Rev. Ser. D. 1974. V. 10. P. 1110 — 1133; II. Loops and Pomerons//Ibidem. P. 1823 — 1843.
Siegel W. Covariantly Second-quantized String. II, III//Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 151, No. 3/4. P. 391 — 401.
314. *Strominger A,* Closed String Field Theory//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 294, No. 1. P. 93 — 112.
315. *Thorn Ch.* String Field Theory//Phys. Rep. 1989. V. 175. P. 1 — 101.
316. *Witten E.* The *N* Matrix Model and Gauged WZW Models. — Preprint IAS-HEP-91 /26; to appear in Nucl. Phys. Ser. B. 1992.
317. *Dijkgraaf R., Verlinde E., Verllnde H,* c=1 Confonnal Field Theories on Rieraann Surfaces//Commun. Math. Phys. 1988. V. 115. P. 649.
Ginsparg P. Curiosities at $c = 1$//Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 295. P, 153.
318. *Miki K.//* Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 191. P. 127. Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 291. P. 349 — 368.
319. *Olshanetsky M. et al.* Statsum of the Bosonic String Compactified on an Orbifold//Nud. Phys. Ser. B. 1988. V. 299. P. 389 — 406; ЯФ. 1987. Т. 46, вып. 3(9). С. 986 — 998.
320. *Коблиц Н.* р-адические числа, *р*-адический анализ и дзета-функции. — М.: Мир, 1982.
[321] *Гельфанд И., Граев М., Пятецкий-Шапиро И.* Теория представлений и автоморфные функции. — М.: Наука, 1966.
322. *Книжник В.* (неопубликовано).
Freund P., Witten E. Adelic String Amplitudes//Phys. Lett. 1987. V. 199. P. 191 — 194.
323. *Volovich I.* p-adic Strings//Class. and Quantum Grav. 1987. V. 4. P. 83.
Grossman B.// Phys. lujtt. Ser. B. 1987. V. 197. P. 101.
Gervais L-L. p-adic Analuticity and Varasoro Algebras for Conformal Theories in More than Two Dimensions//Phys. Utt. Ser. B. 1988. V. 201. P. 300 — 310.
Brekke L., Freund P., Olson M., Witten E. Non-Archimedian String Dynamics//Nucl. Phys. Ser. B. 19S8. V. 302. P. 365 — 402.
From, ton P., Okada Y, Effective Scalar Field Theory of p-adic String//Phys. Rev. Ser. D. 1988. V. 37, No. 10. P. 3077 — 3079.
324. *Gerasimov A., Levine A., Marshakov A.* On *W*-Gravity in Two Dimensions//Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 360. P. 537.
*Sotkov G., Stanishkov M.//*Nucl. Phys. Ser. B. 1991. V. 356. P. 439.
Bilal A., Fock V., Kogan Ya. On the Origin of *W*-Algebras/Abidem. V. 362. P. 294.
Gervais J.-L, Matsuo Y. Preprint PLTENS-91/35. — 1991.
325. *Marghakov A., Mironov A., Olshanetsky M. et al.* $c = r_G$ **Theories of** W_G**-Gravity**:The Set of Observables as a Model of Simply Laced C. — Preprint ITEP-M2/92.

Статья поступила 28.02.92 г.