

Н. В. ЕФИМОВ

ВВЕДЕНИЕ  
В ТЕОРИЮ  
ВНЕШНИХ ФОРМ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1977

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой краткое введение в теорию внешних форм. Она состоит из трех глав: 1) Алгебра внешних форм. 2) Внешнее дифференцирование. 3) Интегрирование форм по цепям. Автор ограничивается рассмотрением внешних форм и цепей в конечномерном евклидовом пространстве. Но на этом материале дается достаточное представление об отношениях сопряженности между пространствами форм и цепей и об основных парах сопряженных операторов. Книжка написана весьма просто и понятно. Выкладки и рассуждения везде проведены без существенных пропусков.

Настоящая книга может быть полезной студентам математических специальностей университетов, которые слушают курсы анализа и геометрии. Возможно также, что ею воспользуются механики и физики, заинтересованные в методах тензорного исчисления.

|   |           |
|---|-----------|
| Предисловие . . . . .   | 4         |
| <b>Глава I. Краткие сведения из алгебры внешних форм . . .</b>                  | <b>5</b>  |
| § 1. Условия по поводу обозначений. Альтернатор . . .                           | 5         |
| § 2. Сопряженные линейные пространства . . . . .                                | 7         |
| § 3. Разложение полилинейной формы в сумму произведений линейных форм . . . . . | 11        |
| § 4. Пространство полилинейных форм . . . . .                                   | 12        |
| § 5. Альтернация полилинейных форм . . . . .                                    | 15        |
| § 6. Второе выражение альтернации . . . . .                                     | 17        |
| § 7. Альтернация тензоров . . . . .   | 20        |
| § 8. Внешнее произведение внешних форм . . . . .                                | 20        |
| § 9. Внешнее произведение базисных форм . . . . .                               | 22        |
| § 10. Пространство внешних форм данной степени и базис в нем . . . . .          | 23        |
| § 11. Вычисление одночленных форм . . . . .                                     | 25        |
| § 12. Координатное выражение внешней формы . . . . .                            | 26        |
| § 13. Специальные обозначения . . . . .   | 26        |
| § 14. Преобразование внешней формы при переходе к новым координатам . . . . .   | 27        |
| <b>Глава II. Внешнее дифференцирование . . . . .</b>                            | <b>29</b> |
| § 1. Касательные пространства . . . . .   | 29        |
| § 2. Внешние дифференциальные формы . . . . .                                   | 31        |
| § 3. Внешний дифференциал . . . . .   | 34        |
| § 4. Основные свойства внешнего дифференциала . . . . .                         | 38        |
| § 5. Примеры внешнего дифференцирования . . . . .                               | 41        |
| § 6. Индуцированное отображение пространства внешних форм . . . . .             | 42        |
| <b>Глава III. Интегрирование внешних дифференциальных форм . . . . .</b>        | <b>51</b> |
| § 1. Интеграл от внешней формы по сингулярному кубу . . . . .                   | 51        |
| § 2. Понятие цепи. Интеграл от формы по цепи . . . . .                          | 58        |
| § 3. Граница цепи . . . . .   | 64        |
| § 4. Доказательство формулы Стокса для цепи . . . . .                           | 66        |
| § 5. Оператор проектирования . . . . .  | 68        |
| § 6. Теорема Пуанкаре и некоторые другие предложения . . . . .                  | 76        |
| § 7. Регулярное погружение. Комбинаторная поверхность . . . . .                 | 78        |
| Список литературы . . . . .   | 84        |
| Предметный указатель . . . . .  | 85        |

## КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ ВНЕШНИХ ФОРМ

Настоящая книжка представляет собой краткое введение в теорию внешних форм. Она состоит из трех глав: 1) алгебра внешних форм, 2) внешнее дифференцирование, 3) интегрирование форм по цепям. Мы ограничиваемся рассмотрением внешних форм и цепей в конечномерном евклидовом пространстве и цепи берем с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ . Но мы старались на этом материале дать достаточное представление об отношениях сопряженности между пространствами форм и цепей и об основных парах сопряженных операторов. Одновременно мы стремились к максимальной простоте и понятности. Выкладки и рассуждения везде проведены без существенных пропусков. Исключением является последний параграф книжки (§ 7 главы III). Этот параграф следует рассматривать лишь как эскиз некоторых вариантов изложения интеграла по поверхности в рамках теории цепей.

Мы надеемся, что настоящая книжка может быть полезной студентам математических специальностей университетов, которые слушают курсы анализа и геометрии. Возможно также, что ею воспользуются механики и физики, заинтересованные в методах тензорного исчисления.

Приношу благодарность А. Н. Колмогорову за ценные советы, которые использованы в этой книге (в части общих понятий о тензорах).

20.10.1975 г.

Н. Ефимов

### § 1. Условия по поводу обозначений. Альтернатор

п° 1. В дальнейшем нам часто придется записывать суммы произвольного числа слагаемых. Поясним обозначения, которыми мы будем пользоваться для краткости таких записей.

Если все слагаемые занумерованы по порядку:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то любое из них мы будем писать в виде  $a_i$  (читается  $a$  с нижним индексом  $i$ ). Сумма всех слагаемых в этом случае будет обозначаться  $\sum a_i$ ; таким образом:

$$\sum a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

п° 2. Далее мы будем иметь дело также с системами величин, которые помечены несколькими индексами (например,  $a_i^k$ ). Как правило, у нас будут встречаться суммы таких величин с отождествленными индексами, которые называют *индексами суммирования*; например,

$$\sum a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n,$$

или

$$\sum a_{ik}^{ik} = \sum a_{1k}^{1k} + \sum a_{2k}^{2k} + \dots + \sum a_{nk}^{nk}.$$

Обычно один из индексов суммирования мы будем писать сверху, другой — снизу. Во втором из предыдущих примеров имеются два индекса суммирования. Они независимы, соответственно чему обозначены разными буквами.

п° 3. Если индексов много, то их обозначают одной буквой с подындексом. Например,  $a^{i_1 i_2 \dots i_k}$  ( $i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots, n$ ) есть краткое обозначение некоторой системы величин в числе  $n^k$ . Пусть  $b_{i_1 i_2 \dots i_k}$  — другая

аналогичная система величин. Тогда, например,

$$\begin{aligned} \sum a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_k^{a_k} b_{a_1 a_2 \dots a_k} = \\ = a^{11} \dots b_{11 \dots 1} + \dots + a^{i_1 i_2 \dots i_k} b_{i_1 i_2 \dots i_k} + \dots \\ \dots + a^{nn} \dots b_{nn \dots n} \end{aligned}$$

означает сумму всевозможных произведений  $a^{i_1 i_2 \dots i_k}$  на  $b_{i_1 i_2 \dots i_k}$  (в каждом слагаемом оба сомножителя имеют один и тот же набор индексов).

п° 4. Кроме индексов суммирования, могут быть индексы, которые в суммировании не участвуют; их называют *свободными*. Обозначение свободных индексов должно быть унифицировано во всех членах соотношений, включающих суммы, например,

$$\sum a_{i\alpha}^{\alpha} = \sum b_{i\alpha}^{\alpha}. \quad (1)$$

Здесь свободный индекс и слева и справа обозначен одной и той же буквой  $i$ . Соотношение (1) означает наличие нескольких равенств, общее число которых  $n$ . Они получаются последовательно при  $i = 1, 2, \dots, n$ .

п° 5. В некоторых случаях мы будем писать суммы, совсем не употребляя индексов. Например,

$$\sum A = \dots + A + \dots$$

Такая запись означает, что нас интересует только сам факт наличия некоторой суммы, одно из слагаемых которой обозначено буквой  $A$ .

п° 6. Мы сразу же проиллюстрируем все сказанное на примере сумм, в которых участвует так называемый альтернатор.

*Альтернатор* обозначается символом  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ , где  $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_k$  принимают значения  $1, 2, \dots, n$ , и определяется следующими условиями:  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \pm 1$ , если  $i_1 i_2 \dots i_k$  есть некоторая перестановка значений индексов  $j_1 j_2 \dots j_k$ , считая, что все эти значения различны; при этом берется  $+1$ , если указанная перестановка четная, и  $-1$  — если нечетная. Во всех остальных случаях  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} = 0$  (т. е. если среди значений  $i_1, i_2, \dots, \dots, i_k$ , или среди значений  $j_1, j_2, \dots, j_k$  есть одинаковые, а также если среди значений  $i_1, i_2, \dots, i_k$  есть такие, каких нет среди  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , и наоборот).

Пример. Пусть  $A = (a_{ij})$  — квадратная  $n \times n$ -матрица. При  $k = n = 2$  рассмотрим сумму

$$D = \sum \delta_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} a_{i_1} a_{i_2} = \delta_{12}^{11} a_{11} a_{21} + \delta_{12}^{12} a_{11} a_{22} + \delta_{12}^{21} a_{12} a_{21} + \delta_{12}^{22} a_{12} a_{22}.$$

Имеем

$$D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det A.$$

Вообще при  $k = n$  имеем

$$\sum \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} = \det A.$$

Точно так же

$$\sum \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} = \det A.$$

п° 7. В частности, при  $k = 1$  и при любом  $n$  альтернатор представляет собой символ Кронекера:  $\delta_j^i = 1$ , если  $i = j$ ,  $\delta_j^i = 0$ , если  $i \neq j$ . В суммах этот символ действует как тождественный оператор; например,

$$\sum \delta_j^i a_i = a_j.$$

## § 2. Сопряженные линейные пространства

п° 1. Пусть  $L$  и  $L^*$  — два действительных линейных пространства.

Пусть с каждой парой элементов  $a \in L^*$ ,  $x \in L$  сопоставлено действительное число; обозначим его через  $(a, x)$ . Определенную тем самым на  $L^* \times L$  функцию мы назовем *сверткой*, если соблюдены следующие условия.

1) *Линейность по первому аргументу*:

$$(\alpha a_1 + \beta a_2, x) = \alpha (a_1, x) + \beta (a_2, x)$$

для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, a_2 \in L^*$ ,  $x \in L$  ( $\mathbb{R}$ , как обычно, обозначает множество действительных чисел).

2) *Линейность по второму аргументу*:

$$(a, \alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha (a, x_1) + \beta (a, x_2)$$

для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \in L^*$ ,  $x_1, x_2 \in L$ .

3) *Невырожденность по первому аргументу*: если  $(a, x) = 0$  при данном  $a$  и при любом  $x \in L$ , то  $a = \theta^*$  (где  $\theta^*$  — нулевой элемент в  $L^*$ ).

4) *Невырожденность по второму аргументу*: если  $(a, x) = 0$  при любом  $a \in L^*$  и при данном  $x$ , то  $x = \theta$  (где  $\theta$  — нулевой элемент в  $L$ ).

Если на  $L^* \times L$  свертка задана, то линейные пространства  $L$  и  $L^*$  мы будем называть *сопряженными* друг другу; легко видеть, что отношение сопряженности двух линейных пространств является взаимным.

п° 2. Предположим теперь, что  $L$  и  $L^*$  — конечномерные пространства одной и той же размерности  $= n$ . Выберем в  $L$  и  $L^*$  какие-нибудь *базисы*; обозначим их соответственно через  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  и  $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$ . Для произвольных элементов  $a \in L^*, x \in L$  напомним разложения

$$a = a_1 \tilde{e}^1 + \dots + a_n \tilde{e}^n, \quad x = x^1 \tilde{e}_1 + \dots + x^n \tilde{e}_n. \quad (1)$$

Вследствие (1) имеем следующее общее выражение свертки:

$$(a, x) = \sum (\tilde{e}^i, \tilde{e}_j) a_i x^j. \quad (2)$$

Из (2) видно, что свертка будет определена на  $L^* \times L$ , если мы зададим матрицу свертки базисных элементов, т. е. матрицу чисел  $(\tilde{e}^i, \tilde{e}_j)$ <sup>1)</sup>. Легко усмотреть, что для обеспечения обоих условий невырожденности 3) и 4) п° 1 необходимо и достаточно, чтобы эта матрица была невырожденной; таким образом,

$$\det (\tilde{e}^i, \tilde{e}_j) \neq 0. \quad (3)$$

п° 3. В некоторых специальных базисах  $\tilde{e}^i, \tilde{e}_j$  матрицу  $(\tilde{e}^i, \tilde{e}_j)$  можно сделать единичной. Вместе с тем упростится выражение (2). Именно, имеет место

**Теорема.** Пусть на  $L^* \times L$  как угодно задана свертка  $(a, x)$  и в  $L^*$  как угодно задан базис  $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$ ; тогда в  $L$  найдется единственный базис  $e_1, \dots, e_n$  такой, что

$$(\tilde{e}^i, e_j) = \delta_j^i, \quad (4)$$

где  $\delta_j^i$  — символ Кронекера. Роли  $L^*$  и  $L$  можно обменять.

Доказательство теоремы вытекает из следующего очевидного утверждения: для любого набора чисел  $\alpha^1, \dots, \alpha^n$  найдется единственный вектор  $u \in L$  такой, что  $(\tilde{e}^1, u) = \alpha^1, \dots, (\tilde{e}^n, u) = \alpha^n$ . Чтобы убедиться в этом, разложим

<sup>1)</sup> Отсюда видно, что для данного  $L$  можно построить бесконечно много различных сопряженных пространств  $L^*$  (точнее говоря, попарному сопряженных с  $L$ ). Однако можно естественным образом определить понятие эквивалентности пространств, сопряженных с данным  $L$  так, что любые два пространства  $L_1^*, L_2^*$ , сопряженные с  $L$ , окажутся эквивалентными. См., например, [5], гл. V, § 1, п. 14. В скобках указываются номера по списку литературы.

искомый вектор  $u$  по какому-нибудь базису:  $u = \lambda^1 \tilde{e}_1 + \dots + \lambda^n \tilde{e}_n$ . Мы получим для  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  систему уравнений первой степени с главной матрицей  $(\tilde{e}^i, \tilde{e}_j)$ ; полученная система однозначно разрешима вследствие (3).

Беря теперь в качестве  $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$  набор чисел  $1, 0, \dots, 0$ , найдем по предыдущему вектор  $u$ . Положим  $e_1 = u$ . Аналогично по набору  $0, 1, 0, \dots, 0$  найдем  $e_2$  и т. д. Полученные векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  удовлетворяют равенствам (4). Из этих же равенств следует, что векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно-независимы.

**Определение.** Два базиса, из которых один принадлежит пространству  $L$ , другой — пространству  $L^*$ , называются *взаимными* или *дуальными*, если они удовлетворяют равенствам (4). В дальнейшем мы будем взаимные базисы обозначать более простым образом без пометки тильдой. Соответственно имеем

$$(e^i, e_j) = \delta_j^i, \quad \text{где } e^i \in L^*, e_j \in L. \quad (5)$$

п° 4. Если разложения (1) даны по взаимным базисам, то

$$(a, x) = a_1 x^1 + \dots + a_n x^n. \quad (6)$$

**Доказательство.** (6) следует из (2) и (5).

п° 5. Будем исходить теперь из данного линейного пространства  $L$ , предполагая его, как и раньше, действительным и  $n$ -мерным. Обозначим через  $a$  произвольную *линейную форму* в пространстве  $L$ , т. е. действительную функцию точки  $x \in L$ , удовлетворяющую условию линейности

$$a(\alpha x' + \beta x'') = \alpha a(x') + \beta a(x''), \quad (7)$$

для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x', x'' \in L$ .

Во множестве всех линейных форм пространства  $L$  естественно вводятся линейные операции. Именно, если  $a, b$  — две произвольные формы,  $\lambda, \mu$  — любые действительные числа, то в качестве формы  $\lambda a + \mu b$  берется функция, значение которой на произвольном векторе  $x \in L$  определяется равенством

$$(\lambda a + \mu b)(x) = \lambda a(x) + \mu b(x). \quad (8)$$

Линейность такой функции непосредственно усматривается из (7) и (8).

На этот раз обозначим через  $L^*$  линейное пространство, элементами которого являются всевозможные

линейные формы, данные на  $L$ , а линейные операции определены согласно (8). Заметим, что нулевым элементом в  $L^*$  служит форма  $\theta^*$ , которая равна нулю на любом  $x \in L$ .

Легко показать, что  $L^*$  имеет размерность  $n$ , равную размерности  $L$ . Поэтому любая система линейно-независимых форм, взятых в числе  $n$ , составляет базис в  $L^*$ .

п° 6. Назначим свертку двух произвольных элементов  $a \in L^*$  и  $x \in L$ , полагая

$$(a, x) = a(x), \quad (9)$$

т. е. в качестве  $(a, x)$  мы берем сейчас число, равное значению формы  $a \in L^*$  на элементе  $x \in L$ . Требования, которые предъявляются к свертке согласно п° 1, при этом соблюдены (проверка условий 1) — 4) п° 1 не представляет труда).

Пространство  $L^*$  является сопряженным пространству  $L$  согласно определению п° 1. Далее на протяжении ряда параграфов мы будем под  $L^*$  подразумевать именно это конкретное сопряженное пространство, т. е. состоящее из линейных форм пространства  $L$ .

п° 7. Из теоремы п° 3 и из выражения (9) непосредственно следует, что каковы бы ни были линейно-независимые формы  $e^1(x), \dots, e^n(x)$ ,  $x \in L$ , в пространстве  $L$  найдется единственный базис  $e_1, \dots, e_n$  такой, что

$$e^i(e_j) = \delta_j^i. \quad (10)$$

Разумеется, справедливо также утверждение, что для любого базиса  $e_1, \dots, e_n$  в  $L$  найдется единственная линейно-независимая система форм  $e^1(x), \dots, e^n(x)$ , подчиненная условиям (10).

В дальнейшем через  $e^i(x)$  и  $e_j$ , или через  $e^i$  и  $e_j$  всегда обозначаются взаимные базисы в  $L^*$  и  $L$  (для которых соблюдено (10)).

п° 8. Пусть произвольный вектор  $x \in L$  разложен по базису  $e_1, \dots, e_n$

$$x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n.$$

Тогда

$$e^j(x) = x^1 e^j(e_1) + \dots + x^j e^j(e_j) + \dots + x^n e^j(e_n).$$

Отсюда и вследствие (10) имеем

$$e^j(x) = x^j. \quad (11)$$

Это значит, что координатная запись форм  $e^j(x)$  при употреблении взаимного с ними базиса оказывается особенно простой: все коэффициенты форм  $e^j(x)$  равны нулю, кроме одного, который занимает  $j$ -е место и равен единице. Вместе с тем можно сказать, что координаты любого вектора по базису  $e_1, \dots, e_n$  суть значения на этом векторе форм взаимного базиса. То же самое выражается также равенством

$$x = e^1(x) e_1 + \dots + e^n(x) e_n. \quad (12)$$

### § 3. Разложение полилинейной формы в сумму произведений линейных форм

п° 1. Обозначим через  $L^k$  декартово  $k$ -кратное произведение пространства  $L$  на себя:  $L^k = L \times L \times \dots \times L$  ( $k$  раз). По определению пространства  $L^k$  его элементами являются упорядоченные наборы векторов из  $L$ , взятых в числе  $k$ ; таким образом,  $(x_1, \dots, x_k) \in L^k$ , если каждый из векторов  $x_1, \dots, x_k$  принадлежит  $L$ . Полилинейную форму от векторных аргументов определим как действительную функцию  $a$  в  $L^k$  при условии линейности по каждому (векторному) аргументу

$$\begin{aligned} a(\alpha x'_1 + \beta x''_1, x_2, \dots, x_k) &= \\ &= \alpha a(x'_1, x_2, \dots, x_k) + \beta a(x''_1, x_2, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Здесь условие линейности записано для первого аргумента.

п° 2. Рассмотрим произвольную полилинейную форму  $a$ . Возьмем любые линейные формы  $e^1, \dots, e^n$  в числе  $n$  при единственном условии их линейной независимости.

**Теорема.** Численное значение  $a(x_1, \dots, x_k)$  формы  $a$  может быть представлено в виде

$$a(x_1, \dots, x_k) = \sum a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1}(x_1) \dots e^{i_k}(x_k), \quad (1)$$

где  $a_{i_1 \dots i_k}$  — коэффициенты, которые определяются данной формой  $a$ , а также выбором системы линейно-независимых форм  $e^1, \dots, e^n$ .

**Доказательство.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $L$ , взаимный с базисом  $e^1, \dots, e^n$  в  $L^*$ . Запишем каждый



Последнее свойство позволяет писать  $a \otimes b \otimes c$  без указания ассоциаций. Вместе с тем определено тензорное произведение любого числа любых тензорных множителей.

п° 5. Легко убедиться, что, вообще говоря,  $a \otimes b$  не совпадает с  $b \otimes a$  (достаточно написать (1) для  $b \otimes a$ ).

п° 6. Попутно заметим, что равенство тензоров  $a$  и  $b$  следует понимать как тождественное совпадение полилинейных форм  $a: L^k \rightarrow \mathbb{R}$  и  $b: L^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Равенство  $a = 0$  означает отображение  $a: L^k \rightarrow 0$ .

п° 7. Пусть  $e^1, \dots, e^n$  линейно-независимые линейные формы в  $L$ . Мы рассматриваем их как одновалентные тензоры, т. е. как элементы пространства  $T^1 = L^*$ . Тогда

$$e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_k} \in T^k. \quad (2)$$

Имеет место

**Теорема.** Множество всех тензорных произведений (2), т. е. отвечающих всевозможным набором индексов  $j_1, \dots, j_k$  ( $j_1 = 1, 2, \dots, n; \dots; j_k = 1, 2, \dots, n$ ) составляет базис в  $T^k$ .

**Доказательство.** Теорема уже доказана в п° 2—5 § 3. Установленные там предложения означают, что для любого  $a \in T^k$  имеет место единственное разложение

$$a = \sum a_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k} \quad (3)$$

(см. формулу (1) § 3). А это и значит, что  $e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}$  составляют базис.

**Следствие.** Размерность пространства  $T^k$  равна  $n^k$ .

**Замечание.** Коэффициенты  $a_{j_1 \dots j_k}$  разложения (3) называются *координатами тензора  $a$*  (по базису  $e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}$  в  $T^k$ ).

п° 8. Итак, мы имеем счетную последовательность пространств

$$T^0, T^1, T^2, \dots, T^k, \dots,$$

построенных по данному линейному пространству  $L$ . В каждом  $T^k$  определены линейные операции, в каждой паре  $T^k, T^l$  (допуская  $k = l$ ) определена операция тензорного произведения:  $a \otimes b, a \in T^k, b \in T^l, a \otimes b \in T^{k+l}$ .

Элементы этих пространств, как объекты указанных операций, называются *ковариантными тензорами* (над  $L$ ). Если  $a \in T^k$ , то  $a$  называется *тензором валентности  $k$* . Пространство  $T^k$  является  $n^k$ -мерным.

## § 5. Альтернация полилинейных форм

п° 1. *Альтернация* полилинейной формы  $a$  обозначается через  $[a]$  и определяется (независимо от базиса) следующим образом:

$$[a](x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum \delta_1^{i_1} \dots \delta_k^{i_k} a(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}); \quad (1)$$

здесь справа участвует альтернатор, о котором говорилось в § 1. В частности, имеем при  $k = 1, 2, 3$  соответственно

$$[a](x) = a(x),$$

$$[a](x_1, x_2) = \frac{1}{2!} (a(x_1, x_2) - a(x_2, x_1)),$$

$$[a](x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3!} (a(x_1, x_2, x_3) + a(x_2, x_3, x_1) + a(x_3, x_1, x_2) - a(x_2, x_1, x_3) - a(x_1, x_3, x_2) - a(x_3, x_2, x_1)).$$

Равенство (1) надлежит понимать с учетом следующего условия: если те же аргументы  $x_1, \dots, x_k$  слева написаны в другом (не натуральном) порядке, то в таком же порядке должны быть написаны нижние индексы альтернатора справа.

1) Альтернация полилинейной формы сама есть полилинейная форма. Именно (для первого аргумента)

$$[a](\alpha x'_1 + \beta x''_1, x_2, \dots, x_k) = \\ = \alpha [a](x'_1, x_2, \dots, x_k) + \beta [a](x''_1, x_2, \dots, x_k).$$

2) Альтернация полилинейной формы кососимметрична по любой паре аргументов. Например, для первой пары аргументов

$$[a](x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = -[a](x_2, x_1, x_3, \dots, x_k). \quad (2)$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения альтернатора, из равенства (1) и из высказанного



выше условия по поводу порядка расположения индексов в левой и правой частях равенства (1).

п° 2. Полилинейная форма  $\omega = \omega(x_1, x_2, \dots, x_k)$  называется *косой* или *внешней*, если  $[\omega] = \omega$ . *Косой является всякая форма, имеющая не менее двух аргументов ( $k \geq 2$ ) и кососимметричная по любой паре своих аргументов.* В самом деле, в случае кососимметричности по любой паре аргументов имеем

$$\delta_1^{i_1} \dots \delta_k^{i_k} a(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = a(x_1, \dots, x_k)$$

для любого набора индексов  $i_1 \dots i_k$ . Таким образом, все слагаемые суммы в правой части равенства (1) в этом случае одинаковы и равны  $a(x_1, \dots, x_k)$ . Так как число слагаемых равно  $k!$ , то

$$[a](x_1, \dots, x_k) = a(x_1, \dots, x_k). \quad (2')$$

Обратно, если  $k \geq 2$  и форма косая (совпадает со своей альтернативой), то она кососимметрична по любой паре своих аргументов. Это утверждение сразу следует из косой симметрии альтернативы (см. равенства (2) и (2')). Кроме этих форм, к числу внешних следует отнести всякую линейную форму, т. е. всякую форму при  $k=1$  (поскольку для всякой линейной формы  $[\omega] = \omega$ ).

п° 3. Для любой формы повторная альтернатива совпадает с однократной

$$[[a]](x_1, \dots, x_k) = [a](x_1, \dots, x_k).$$

*Доказательство.* Утверждение очевидно, так как альтернатива кососимметрична и полилинейна.

п° 4. Пусть  $k \geq 2$ . Рассмотрим коэффициенты разложения полилинейной формы  $\omega$  по базису в  $T^k$ , отвечающему некоторому базису  $e^1, \dots, e^n \in L^*$ . Если  $e_1, \dots, e_n$  — взаимный базис в  $L$ , то

$$\omega_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_k}).$$

Если форма  $\omega$  косая, то при обмене местами любых двух ее аргументов она меняет знак. Следовательно, коэффициенты косой формы кососимметричны по любой паре индексов; например, для первой пары индексов

$$\omega_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} = -\omega_{i_2 i_1 i_3 \dots i_k}$$

Обратно, если в каком-либо базисе коэффициенты полилинейной формы  $\omega$  кососимметричны по любой паре

индексов, то форма  $\omega$  является косой (доказательство предоставляем читателю).

п° 5. Имеют место следующие предложения; они легко усматриваются, и мы приведем их без доказательства.

1) Если у косой формы два аргумента принимают одинаковые значения, то форма обращается в нуль.

2) Если аргументы косой формы линейно-зависимы, то форма равна 0.

3) Если число аргументов  $k > n$ , то косая форма тождественно равна нулю, т. е. равна 0 на любом наборе своих аргументов.

п° 6. В дальнейшем нам потребуется следующая

*Лемма.* Если две формы удовлетворяют тождеству

$$a(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) = b(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}, x_1, \dots, x_k), \quad (3)$$

то

$$[a](x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) = [b](x_{k+1}, \dots, x_{k+l}, x_1, \dots, x_k). \quad (4)$$

*Доказательство.* Возьмем произвольный член суммы, стоящей в левой части (4)

$$\delta_1^{\alpha_1} \dots \delta_k^{\alpha_k} \delta_{(k+1)}^{\alpha_{k+1}} \dots \delta_{(k+l)}^{\alpha_{k+l}} a(x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_k} x_{\alpha_{k+1}} \dots x_{\alpha_{k+l}}).$$

Для произвольного члена правой части имеем

$$\delta_{(k+1)}^{\beta_1} \dots \delta_{(k+l)}^{\beta_{k+l}} b(x_{\beta_1} \dots x_{\beta_l} x_{\beta_{l+1}} \dots x_{\beta_{l+k}}) = \delta_1^{\beta_{l+1}} \dots \delta_k^{\beta_{l+k}} \delta_{(k+1)}^{\beta_1} \dots \delta_{(k+l)}^{\beta_l} b(x_{\beta_1} \dots x_{\beta_l} x_{\beta_{l+1}} \dots x_{\beta_{l+k}}).$$

Установим взаимно однозначное соответствие между членами сумм в левой и правой частях (4), полагая соответствующими членами, для которых

$$\beta_{l+1} = \alpha_1, \dots, \beta_{l+k} = \alpha_k, \quad \beta_1 = \alpha_{k+1}, \dots, \beta_l = \alpha_{k+l}.$$

Вследствие (3) соответствующие члены будут равны. Тем самым лемма доказана.

## § 6. Второе выражение альтернативы

п° 1. Пусть имеются линейные формы  $u_1, \dots, u_k$ . Перемножим их тензорно в произвольном порядке. Мы получим полилинейную форму  $u_{s_1} \otimes \dots \otimes u_{s_k}$ . Напишем

числовое значение альтернации этой формы:

$$\begin{aligned} [u_{s_1} \otimes \dots \otimes u_{s_k}](x_1, \dots, x_k) = \\ = \frac{1}{k!} \sum \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} u_{s_1}^{i_1}(x_{j_1}) \dots u_{s_k}^{i_k}(x_{j_k}). \end{aligned} \quad (1)$$

Выражение (1) неудобно для использования. Дело в том, что оно представляет не альтернацию  $u_{s_1} \otimes \dots \otimes u_{s_k}$  по данным  $u_1, \dots, u_k$ , а ее численное значение на произвольном наборе аргументов  $x_1, \dots, x_k$ . От этого набора мы не можем отвлечься, поскольку в правой части (1) приходится следить за порядком расположения аргументов в каждом слагаемом. Однако выражение  $[u_{s_1} \otimes \dots \otimes u_{s_k}](x_1, \dots, x_k)$  легко освободить от этого недостатка. Именно, имеет место тождество

$$\begin{aligned} \sum \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} u_{s_1}^{i_1}(x_{j_1}) \dots u_{s_k}^{i_k}(x_{j_k}) = \\ = \sum \delta_{s_1 \dots s_k}^{i_1 \dots i_k} u_{i_1}(x_1) \dots u_{i_k}(x_k). \end{aligned} \quad (2)$$

Важно заметить, что суммирование в правой части (2) производится не по номерам аргументов  $x_1, \dots, x_k$ , а по номерам самих форм  $u_1, \dots, u_k$ . В каждом слагаемом правой части (2) множители записаны в натуральном порядке аргументов  $x_1, \dots, x_k$ . Из (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} [u_{s_1} \otimes \dots \otimes u_{s_k}](x_1, \dots, x_k) = \\ = \frac{1}{k!} \sum \delta_{s_1 \dots s_k}^{i_1 \dots i_k} (u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_k})(x_1, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство тождества (2). В сумме (2) слева достаточно учитывать лишь те слагаемые, в которых набор  $j_1, \dots, j_k$  является перестановкой набора  $1, \dots, k$ . Будем считать слагаемые в сумме (2) слева различными, если они отвечают различным расположениям индексов  $j_1, \dots, j_k$  (не обращая внимания на численные значения слагаемых). Аналогично определим различные слагаемые суммы (2) справа. Рассматриваемые с такой точки зрения, все слагаемые этих сумм должны считаться попарно различными, как слева, так и справа.

Возьмем в сумме (2) слева слагаемое, отвечающее некоторой перестановке  $j_1, \dots, j_k$ , и рассмотрим произведение

$$u_{s_1}^{i_1}(x_{j_1}) \dots u_{s_k}^{i_k}(x_{j_k}).$$

Сделаем здесь переменную мест множителей, располагая их в порядке номеров аргументов; получим

$$u_{i_1}(x_1) \dots u_{i_k}(x_k).$$

Очевидно, что

$$u_{s_1}^{i_1}(x_{j_1}) \dots u_{s_k}^{i_k}(x_{j_k}) = u_{i_1}(x_1) \dots u_{i_k}(x_k). \quad (4)$$

Таким способом с перестановкой  $j_1, \dots, j_k$  сопоставляется перестановка  $i_1, \dots, i_k$ . Одновременно мы сопоставим со взятым слагаемым суммы (2) слева то слагаемое суммы (2) справа, которое отвечает перестановке  $i_1, \dots, i_k$ . Установленное соответствие между слагаемыми сумм (1) и (2) будет взаимно однозначным, поскольку двум разным перестановкам  $j_1, \dots, j_k$  сопоставляются также разные перестановки  $i_1, \dots, i_k$ .

Легко убедиться, что

$$\delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \delta_{s_1 \dots s_k}^{i_1 \dots i_k}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что в суммах (2) соответствующие слагаемые слева и справа численно совпадают. Тем самым тождество доказано.

п° 2. Пусть имеется полилинейная форма с численным значением

$$a(x_1, \dots, x_k) = \sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} e^{\alpha_1}(x_1) \dots e^{\alpha_k}(x_k).$$

Из определения альтернации следует, что альтернация суммы форм равна сумме их альтернации и что числовой коэффициент можно выносить за знак альтернации. Поэтому

$$\begin{aligned} [a](x_1, \dots, x_k) = \\ = \sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} [e^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e^{\alpha_k}](x_1, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь мы можем теперь считать, что

$$\begin{aligned} [e^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e^{\alpha_k}](x_1, \dots, x_k) = \\ = \frac{1}{k!} \sum \delta_{i_1 \dots i_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k})(x_1, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение (7) непосредственно следует из (3); нужно только учесть изменение обозначений (в частности, что номера базисных форм поставлены сверху).

## § 7. Альтернация тензоров

п° 1. Пусть тензор  $a$  есть полилинейная форма со значением  $a(x_1, \dots, x_k)$ . Тогда *альтернативой*  $[a]$  *тензора*  $a$  мы назовем альтернацию формы  $a$ . Заметим, что при этом мы не можем рассматривать тензор  $a$  формально, т. е. просто как элемент пространства  $T^k$ , поскольку альтернация определена путем перестановок аргументов  $x_1, \dots, x_k$ ; таким образом мы вынуждены использовать свойства формы как функции. Но, если выбрать базисные формы  $e^1, \dots, e^n$ , то альтернацию тензора  $a \in T^k$  можно выразить с помощью тех операций, которые введены в  $T^k$  и в парах  $T^k, T^l$ .

Именно, тензор  $a$  может быть записан в виде

$$a = \sum a_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}. \quad (1)$$

Из (1) и из формулы (6) § 6 имеем

$$[a] = \sum a_{j_1 \dots j_k} [e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}], \quad (2)$$

где правая часть определена согласно (7) § 6:

$$[e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}] = \frac{1}{k!} \sum \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}). \quad (3)$$

З а м е ч а н и е. В дальнейшем в записи произведения тензоров мы позволим себе часто опускать знак  $\otimes$ .

В таком случае формула (2), например, запишется проще:

$$[a] = \sum a_{j_1 \dots j_k} [e^{j_1} \dots e^{j_k}].$$

## § 8. Внешнее произведение внешних форм

п° 1. В этом параграфе мы определим некоторое действие над внешними (косыми) формами, называемое их внешним произведением. Условимся называть *степенью* внешней формы число ее (векторных) аргументов. Таким образом, если дана внешняя форма  $\omega = \omega(x_1, \dots, x_k)$ , то ее степень  $= k$ . Внешнюю форму степени  $k$  часто называют *k-формой*.

п° 2. Пусть даны две внешние формы  $\omega_1^k, \omega_2^l$ , где  $k, l$  — степени данных форм.

О п р е д е л е н и е. *Внешним произведением* формы  $\omega_1^k$  на форму  $\omega_2^l$  называется внешняя форма, которая обозначается и выражается согласно равенству

$$\omega_1^k \wedge \omega_2^l = \frac{(k+l)!}{k!l!} [\omega_1^k \otimes \omega_2^l]. \quad (1)$$

Внешнее произведение  $\omega_1^k \wedge \omega_2^l$  есть внешняя (косая) форма, поскольку в правой части (1) произведение  $\omega_1^k \otimes \omega_2^l$  проальтернировано.

п° 3. Для альтернации имеют место соотношения:

$$[\Sigma \omega] = \Sigma [\omega], \quad [\alpha \omega] = \alpha [\omega].$$

Отсюда получаются соответствующие свойства внешнего произведения:

$$a) \quad (\alpha \omega_1^k) \wedge \omega_2^l = \omega_1^k \wedge (\alpha \omega_2^l) = \alpha (\omega_1^k \wedge \omega_2^l),$$

$$b) \quad (\omega_1^k + \omega_2^k) \wedge \omega_3^l = \omega_1^k \wedge \omega_3^l + \omega_2^k \wedge \omega_3^l.$$

Доказательства этих свойств сразу следуют из определения п° 1, и мы проводить их не будем.

$$c) \quad \omega_1^k \wedge \omega_2^l = (-1)^{kl} \omega_2^l \wedge \omega_1^k.$$

Докажем это свойство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \omega_1^k(x_1, \dots, x_k) \omega_2^l(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) &= \\ &= \omega_2^l(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) \omega_1^k(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Отсюда и вследствие леммы п° 6 § 5

$$\begin{aligned} (\omega_1^k \wedge \omega_2^l)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) &= \\ &= (\omega_2^l \wedge \omega_1^k)(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}, x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду кососимметричности правой части предыдущего равенства

$$\begin{aligned} (\omega_1^k \wedge \omega_2^l)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) &= \\ &= (-1)^{kl} (\omega_2^l \wedge \omega_1^k)(x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}). \end{aligned}$$

С л е д с т в и е. Если  $l = k - \text{нечетное}$  и  $\omega_2^l = \omega_1^k$ , то  $\omega_1^k \wedge \omega_2^l = 0$ .

Ч а с т н ы й с л у ч а й. Для двух линейных форм  $u, v$  имеем

$$(u \wedge v)(x_1, x_2) = -(v \wedge u)(x_1, x_2).$$

d) Свойство ассоциативности

$$(\omega_1^k \wedge \omega_2^l) \wedge \omega_3^m = \omega_1^k \wedge (\omega_2^l \wedge \omega_3^m).$$

Доказательство этого свойства будет дано позже (см. § 9). Сначала установим тождество

$$[[e^{i_1} \dots e^{i_k}][e^{j_1} \dots e^{j_l}]] = [e^{i_1} \dots e^{i_k} e^{j_1} \dots e^{j_l}]. \quad (2)$$

Здесь  $e^{i_1}, \dots, e^{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l}$  суть базисные формы.

Для доказательства тождества (2) заметим, что

$$[e^{i_1} \dots e^{i_k}] = \frac{1}{k!} \sum \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{i_1 \dots i_k} e^{\alpha_1} \dots e^{\alpha_k}.$$

$$[e^{j_1} \dots e^{j_l}] = \frac{1}{l!} \sum \delta_{\beta_1 \dots \beta_l}^{j_1 \dots j_l} e^{\beta_1} \dots e^{\beta_l}.$$

Перемножая и применяя альтернацию, получим

$$\begin{aligned} [[e^{i_1} \dots e^{i_k}][e^{j_1} \dots e^{j_l}]] &= \\ &= \frac{1}{k! l!} \sum \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{i_1 \dots i_k} \delta_{\beta_1 \dots \beta_l}^{j_1 \dots j_l} [e^{\alpha_1} \dots e^{\alpha_k} e^{\beta_1} \dots e^{\beta_l}]. \end{aligned}$$

При перестановке в правой части предыдущего равенства двух индексов среди  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  или  $\beta_1, \dots, \beta_l$  будет меняться знак альтернации. Но при этом будет одновременно меняться знак соответствующего альтернатора. Поэтому в каждом члене индексы  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$  можно привести к стандартному расположению  $i_1 \dots i_k j_1 \dots j_l$ ; тогда все члены справа окажутся одинаковыми и число их будет  $k! l!$ . Таким образом, правая часть примет вид  $[e^{i_1} \dots e^{i_k} e^{j_1} \dots e^{j_l}]$ . Тождество (2) доказано.

## § 9. Внешнее произведение базисных форм

п° 1. Имеем для базисных форм (первой степени)

$$e^i \wedge e^j = 2! [e^i e^j]. \quad (1)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (e^i \wedge e^j) \wedge e^k &= \frac{3!}{2! 1!} [e^i \wedge e^j, e^k] = \\ &= 3! [[e^i e^j] e^k] = 3! [e^i e^j e^k] \end{aligned} \quad (2)$$

(см. тождество (2) § 8). Аналогично

$$e^i \wedge (e^j \wedge e^k) = 3! [e^i e^j e^k].$$

Следовательно,

$$(e^i \wedge e^j) \wedge e^k = e^i \wedge (e^j \wedge e^k) = e^i \wedge e^j \wedge e^k.$$

Это равенство выражает ассоциативное свойство внешнего произведения базисных форм. Но чтобы доказать свойство ассоциативности в общем виде (см. § 8, свойство d)), т. е. для внешнего произведения трех любых внешних форм, предыдущее равенство приходится обобщить.

п° 2. Прежде всего, пользуясь тождеством (2) и применяя индукцию, мы получим

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = k! [e^{i_1} \dots e^{i_k}]. \quad (3)$$

Используя формулы (2) § 8 и (3), найдем

$$\begin{aligned} (e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) \wedge (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}) &= \\ &= e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} ((e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) \wedge (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l})) \wedge (e^{s_1} \wedge \dots \wedge e^{s_m}) &= \\ &= (e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) \wedge ((e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}) \wedge \\ &\quad \wedge (e^{s_1} \wedge \dots \wedge e^{s_m})). \end{aligned} \quad (5)$$

п° 3. Из последнего равенства ассоциативное свойство d) § 8 вытекает непосредственно. Достаточно каждую форму  $\omega_1^k, \omega_2^l, \omega_3^m$  разложить по надлежащему базису и выполнить внешние произведения этих форм по-членно; тогда из (5) получится нужное соотношение

$$(\omega_1^k \wedge \omega_2^l) \wedge \omega_3^m = \omega_1^k \wedge (\omega_2^l \wedge \omega_3^m).$$

Разложению внешних форм по базису посвящен следующий параграф.

## § 10. Пространство внешних форм данной степени и базис в нем

п° 1. Внешние формы данной степени  $k$  (коротко:  $k$ -формы) составляют линейное пространство, которое является подпространством в  $T^k$ . В самом деле, если  $\omega_1, \omega_2 \in T^k$  и

$$[\omega_1] = \omega_1, \quad [\omega_2] = \omega_2,$$

то

$$[\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2] = \alpha_1 [\omega_1] + \alpha_2 [\omega_2] = \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2.$$

Линейное пространство  $k$ -форм обозначим через  $\Lambda^k$ ; имеем  $\Lambda^k \subset T^k$ . Элементы  $\Lambda^k$  называются также *косыми тензорами*.

Отметим, что  $\Lambda^1 = T^1 = L^*$ .

п° 2. Пусть  $e^1, \dots, e^n$  — базис в  $L^*$ . Тогда, как мы знаем, всевозможные произведения  $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$  составляют базис в  $T^k$ . Соответственно, для произвольного  $k$ -тензора, т. е. для произвольной формы  $\omega \in T^k$ , имеем

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \dots e^{i_k}. \quad (1)$$

Здесь мы воспользовались договоренностью опускать для краткости записи знак  $\otimes$ . Числа  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  суть коэффициенты разложения (1), или координаты тензора  $\omega$ . Если тензор  $\omega$  — косой и  $k \geq 2$ , то его координаты  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  обладают косой симметрией по любой паре индексов; например

$$\omega_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} = -\omega_{i_2 i_1 i_3 \dots i_k}.$$

Обратно, если  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$  кососимметричен по всем парам индексов, то  $\omega$  — косой тензор (т. е. является косой формой). Тем самым мы имеем характеристику подпространства  $\Lambda^k$  в пространстве  $T^k$  с помощью только таких соотношений, которые специфичны для  $T^k$  (точнее, с помощью линейных операций в  $T^k$  и операции тензорного перемножения). Заметим, что выбор базиса  $e^1, \dots, e^n$  при этом безразличен.

п° 3. Теперь мы укажем базис в подпространстве  $\Lambda^k$ . Прежде всего, учтем, что если форма  $\omega$  косая, то она равна своей альтернации.

Поэтому из (1) получается равенство

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} [e^{i_1} \dots e^{i_k}]. \quad (2)$$

Пользуясь формулой (3) § 9, форму (2) можно представить в виде

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad (3)$$

или

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad (4)$$

где звездочка перед знаком суммы означает, что суммирование ведется по индексам  $i_1 \dots i_k$  при условии, что  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

**Теорема.** Всевозможные наборы внешних произведений  $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$  при условии, что  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ , составляют базис в  $\Lambda^k$ , т. е. в пространстве внешних форм данной степени  $k$ .

**Доказательство.** Ввиду наличия разложения (4), достаточно доказать, что указанные наборы внешних произведений линейно независимы. Допустим, что есть тождественное соотношение

$$* \sum \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = 0, \quad (5)$$

где  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  — некоторые числа; при этом  $i_1 < \dots < i_k$ .

Заметим, что разложение вида (1) всегда может быть восстановлено по заранее данному разложению вида (4). Поэтому из (5) имеем

$$\sum \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \dots e^{i_k} = 0.$$

Отсюда  $\omega_{i_1 \dots i_k} = 0$ . Таким образом,  $\omega_{i_1 \dots i_k} = 0$  как следствие (5). Теорема доказана.

**Следствие.** Пространство всех внешних форм степени  $k$  имеет размерность  $C_n^k$ .

**Пример.** Пусть  $k = 2$ . Тогда разложение внешней формы  $\omega$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \omega &= * \sum \omega_{i_1 i_2} e^{i_1} \wedge e^{i_2} = \\ &= \omega_{12} e^1 \wedge e^2 + \omega_{13} e^1 \wedge e^3 + \dots + \omega_{1n} e^1 \wedge e^n + \\ &\quad + \omega_{23} e^2 \wedge e^3 + \dots + \omega_{2n} e^2 \wedge e^n + \\ &\quad + \dots \dots \dots + \\ &\quad + \omega_{(n-1)n} e^{n-1} \wedge e^n. \end{aligned}$$

## § 11. Вычисление одночленных форм

п° 1. Разложим векторы  $x_1, \dots, x_k$  по базису  $e_1, \dots, e_n$ :

$$x_1 = x_1^1 e_1 + \dots + x_1^n e_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_k = x_k^1 e_1 + \dots + x_k^n e_n.$$



ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

здесь  $x^1, \dots, x^n$  — координаты произвольного вектора  $x$  в старом базисе,  $x^{1'}, \dots, x^{n'}$  — координаты этого вектора  $x$  в новом базисе. Числа  $P_{j'}^i$  суть коэффициенты преобразования. Однако согласно предыдущему параграфу можно считать, что написанные в этих равенствах слева символы суть линейные формы  $e^1, \dots, e^n$ , взаимные со старым базисом (т. е. удовлетворяющие условиям  $e^i(x) = x^i$ , где  $x^i$  есть  $i$ -я координата вектора  $x$ ). Аналогичным образом по отношению к новому базису можно рассматривать члены правых частей. При такой точке зрения на формулы (1) приведение каждого члена  $x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{i_k}$  внешней формы (1') § 13 к новым координатам можно выполнить путем почленного внешнего умножения правых частей формул (1), беря из них последовательно те, которые имеют номера  $i_1, \dots, i_k$ . Выполняя указанное действие, получим

$$x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{i_k} = * \sum D_{i_1' \dots i_k'}^{i_1 \dots i_k} x^{i_1'} \wedge \dots \wedge x^{i_k'}$$

где

$$D_{i_1' \dots i_k'}^{i_1 \dots i_k} = \begin{vmatrix} P_{i_1'}^{i_1} & \dots & P_{i_k'}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{i_1'}^{i_k} & \dots & P_{i_k'}^{i_k} \end{vmatrix}.$$

В конкретных случаях вместо применения этой готовой формулы удобнее непосредственно проводить действия по правилам внешней алгебры. Например, если

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + \beta v, \\ y &= \gamma u + \delta v, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (\alpha u + \beta v) \wedge (\gamma u + \delta v) = \\ &= \alpha\gamma (u \wedge u) + \alpha\delta (u \wedge v) + \beta\gamma (v \wedge u) + \beta\delta (v \wedge v) = \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma) (u \wedge v). \end{aligned}$$

§ 1. Касательные пространства

п° 1. Пусть  $E$  — евклидово  $n$ -мерное пространство, т. е. линейное  $n$ -мерное пространство, в котором задано положительно определенное скалярное произведение.

Зафиксируем какой-нибудь элемент  $x \in E$  и будем рассматривать всевозможные пары  $(x, u)$ , где  $u$  — произвольный элемент из  $E$ . Во множестве этих пар введем линейные операции:

$$(x, u_1) + (x, u_2) = (x, u_1 + u_2), \tag{1}$$

$$\alpha (x, u) = (x, \alpha u). \tag{2}$$

Полученное тем самым линейное пространство пар  $(x, u)$  обозначим через  $T_x$ . Первый (зафиксированный) элемент  $x$  пары  $(x, u)$  мы будем называть *точкой*. Пару  $(x, u)$ , как элемент  $T_x$ , будем называть *вектором*, приложенным к точке  $x$ . Впрочем, мы позволим себе говорить также, что вектор  $u$  приложен к точке  $x$ , если он является вторым элементом пары  $(x, u)$ .

Линейное пространство  $T_x$  назовем *касательным пространством* к  $E$  в точке  $x$ . Вследствие (1) и (2) биективное отображение  $E$  на  $T_x$ , при котором произвольному вектору  $u \in E$  отвечает пара  $(x, u)$ , является линейным изоморфизмом. С помощью этого изоморфизма все свойства  $E$ , как линейного пространства, переносятся на каждое касательное пространство  $T_x$ . Более того, по тому же изоморфизму мы будем переносить из  $E$  в  $T_x$  и евклидовы свойства  $E$ ; впрочем, достаточно сказать, что *скалярным произведением* двух элементов  $(x, u)$  и  $(x, v)$  пространства  $T_x$  мы назовем число, равное скалярному произведению элементов  $u, v \in E$ .

п° 2. Все, что было сейчас определено формально, можно высказать наглядным образом. Именно: 1) любой

элемент  $x \in E$  можно зафиксировать и назвать *точкой*;  
 2) любой элемент  $u \in E$  можно сопоставить с точкой  $x$  и назвать *вектором, приложенным к точке  $x$* . Можно также сказать, что точка  $x$  есть *начало* приложенного к ней *вектора  $u$* . Тогда точку  $y = x + u$  следует считать его *концом*. 3) Линейное пространство  $T_x$  векторов, приложенных к точке  $x$ , называется *касательным пространством к  $E$  в точке  $x$* .

п° 3. Согласно сказанному евклидово пространство  $E$  можно рассматривать как пространство точек; оно является метрическим пространством с метрикой  $\rho(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y - x, y - x)}$ . Соответственно в  $E$  определены все понятия, относящиеся к метрическим пространствам, в частности, в  $E$  определено понятие открытого множества и области.

п° 4. Пусть (приложенные) векторы  $(x, u) \in T_x$  и  $(y, u) \in T_y$  отвечают одному и тому же (свободному) вектору  $u \in E$ . Тогда говорят, что один из них (любой) получен *параллельным перенесением* другого; например, вектор  $(y, u)$  получен параллельным перенесением вектора  $(x, u)$  из касательного пространства  $T_x$  в касательное пространство  $T_y$ .

Очевидно, что приложенные векторы, получаемые во всех касательных пространствах параллельным перенесением какого-нибудь одного вектора, удовлетворяют обычным условиям отношения эквивалентности. Поэтому их часто называют *равными* векторами (хотя они принадлежат разным пространствам). Имея в виду возможность однозначно строить равные векторы в разных касательных пространствах, говорят, что в евклидовом пространстве  $E$  имеет место *абсолютный параллелизм векторов*.

п° 5. Вместе с линейным касательным пространством  $T_x$  определено сопряженное ему пространство  $T_x^*$ ; оно называется *кокасательным пространством* к евклидову пространству  $E$  в точке  $x$ . Кроме того, определено при любом  $k$  линейное пространство

$$T_x^{\otimes k} = T_x^* \otimes \dots \otimes T_x^*$$

(справа —  $k$  сомножителей). В каждом  $T_x^{\otimes k}$  определено подпространство  $\Lambda_x^k$ , аналогично тому, как в § 10 главы I определено подпространство  $\Lambda^k$  пространства  $T^k$ .

п° 6. Заметим, наконец, что наличие евклидовой структуры в  $E$  нами, по существу, не использовано. Все сказанное относится и к аффинному пространству. Мы предполагаем пространство  $E$  евклидовым только с той целью, чтобы в дальнейшем мы могли в нужных случаях применять евклидовы понятия без специальных оговорок.

## § 2. Внешние дифференциальные формы

п° 1. Обозначим через  $U$  некоторую область в евклидовом пространстве  $E$ . Пусть для любой точки  $x \in U$  в касательном пространстве  $T_x$  задана полилинейная форма  $a$ .

Тогда говорят, что дана форма в области  $U$ . Иначе можно сказать, что с каждой точкой  $x$  и с каждым упорядоченным набором векторов  $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_x$  сопоставлено число из  $\mathbb{R}$ , или, что дано отображение

$$a: T_x^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $T_x^k$  есть  $k$ -кратное произведение  $T_x$  на себя. Элементами  $T_x^k$  можно считать упорядоченные наборы  $(x, \xi_1, \dots, \xi_k)$ . Отображение (1) предполагается линейным по каждому векторному аргументу, т. е. по каждой составляющей набора  $(x, \xi_1, \dots, \xi_k)$ , не считая точки  $x$ .

Форму (1) называют *дифференциальной формой* в области  $U$ . В соответствии с § 3 главы I можно написать  $a \in T_x^{\otimes k}$ .

п° 2. Если форма (1) совпадает со своей альтернативой, то ее называют *внешней дифференциальной  $k$ -формой* в области  $U$ . Для обозначения внешних дифференциальных форм наиболее употребительна буква  $\omega$ .

Соответственно можно написать  $\omega \in \Lambda_x^k$ .

п° 3. Разумеется, к дифференциальным формам применимы все алгебраические понятия и методы, о которых говорилось в главе I. Достаточно считать, что точка  $x$  зафиксирована, и рассматривать в качестве пространства  $L$  касательное пространство  $T_x$ . В частности, для внешней формы можно дать координатное представление.

п° 4. Пусть в пространстве  $E$  задана координатная система с базисом  $e_1, \dots, e_n$ , пусть  $e^1, \dots, e^n$  — линейные



формы, которые составляют взаимный с ним базис в сопряженном пространстве  $E^*$ . Будем считать, что одновременно с этим в каждом касательном пространстве  $T_x$  задан базис, состоящий из векторов  $e_1, \dots, e_n$ , приложенных к точке  $x$  (для этих приложенных векторов мы сохраним обозначение символами  $e_1, \dots, e_n$ ). Формы  $e^1, \dots, e^n$  будем рассматривать как элементы сопряженного пространства  $T_x^*$ , для чего достаточно полагать, что их аргументы приложены к точке  $x$ . Эти постоянные, точнее говоря, не зависящие от  $x$  формы, мы будем называть *координатными* (для данной координатной системы) или *проектирующими*, поскольку по условию взаимности

$$e^j(\xi) = \xi^j, \quad (2)$$

что есть проекция вектора  $\xi$  на координатную ось с номером  $j$ . Координатные формы принято обозначать через  $dx^j$ . Таким образом, наряду с записью (2) можно писать

$$dx^j(\xi) = \xi^j. \quad (3)$$

п° 5. Согласно § 10 главы I имеет место координатная запись внешней дифференциальной формы  $\omega \in \Lambda_x^k$ :

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \dots i_k}(x) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad (4)$$

или

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (4')$$

Формулы (4) и (4') отличаются только способом записи (подобно формулам (4) § 10 и (1') § 13 главы I). Обе эти формулы определяют  $\omega$  как внешнюю форму в касательном пространстве  $T_x$ . Коэффициенты  $\omega_{i_1 \dots i_k}(x)$  суть числовые функции точки  $x$  (кроме того, они зависят, разумеется, от выбора координатной системы).

Обычную функцию точки ( $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ) считают формой нулевой степени. Для формы нулевой степени равенство (4') имеет вид  $\omega = \omega(x)$ .

п° 6. Рассмотрим примеры. Пусть  $E$  — трехмерное евклидово пространство, и пусть в нем дано поле векторов:  $p = p(x)$ , т. е. в каждой точке  $x \in E$  приложен вектор  $p(x)$ . Тогда в  $E$  определены две внешние дифференциальные формы. Одна из них — линейная форма, есть скалярное произведение:  $\omega^1 = (p(x), \xi)$ . Если  $p = p(x)$

истолковать как силу, приложенную в точке  $x$ , то  $\omega^1$  означает элементарную работу, которую производит сила  $p$  при перемещении точки приложения из  $x$  в конец вектора  $x + \xi$ . Другая — внешняя дифференциальная форма второй степени, есть смешанное произведение

$$\omega^2 = (p(x), \xi_1, \xi_2).$$

Форме  $\omega^2$  часто дают гидродинамическое истолкование, полагая, что  $\omega^2$  есть поток вектора  $p(x)$  через элементарную площадку  $(\xi_1, \xi_2)$ . Отметим, наконец, внешнюю дифференциальную форму третьей степени —

$$\omega^3 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Эта форма есть ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in T_x$ .

Нетрудно написать координатные представления форм  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ . Именно, если  $p(x) = \{P(x), Q(x), R(x)\}$ , то

$$\omega^1 = P dx^1 + Q dx^2 + R dx^3,$$

$$\omega^2 = R dx^1 \wedge dx^2 + (-Q) dx^1 \wedge dx^3 + P dx^2 \wedge dx^3,$$

$$\omega^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Первое из этих равенств усматривается с очевидностью:

$$\omega^1(\xi) = P\xi^1 + Q\xi^2 + R\xi^3 = (P dx^1 + Q dx^2 + R dx^3)(\xi).$$

Чтобы понять второе и третье, достаточно написать общеизвестные выражения смешанного произведения:

$$\begin{aligned} \omega^2(\xi_1, \xi_2) &= \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} = \\ &= R \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix} + (-Q) \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^3 \end{vmatrix} + P \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix}, \\ \omega^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу получается предыдущая запись  $\omega^2, \omega^3$  в символике внешних форм, если использовать § 13 главы I.

### § 3. Внешний дифференциал

п° 1. Внешний дифференциал формы нулевой степени, т. е. функции, по определению есть ее обычный дифференциал.

Пусть в области  $U \subset E$  задана (действительная) дифференцируемая функция

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1)$$

Тогда в каждой точке  $x \in U$  существует дифференциал функции

$$dy = f'(x) \xi. \quad (2)$$

Здесь  $f'(x)$  — линейная форма, которая определена в касательном пространстве  $T_x$ ;  $dy$  — ее значение на векторе  $\xi \in T_x$ . Сама форма  $f'(x)$  есть производная данной функции в точке  $x$ ; ее обозначают также через  $Df(x)$ .

Мы имеем в виду сейчас функции с числовыми значениями. Соответственно этому, считая действительную ось  $\mathbb{R}$  линейным пространством, вместо (2) можно написать

$$f'(x): T_x \rightarrow \mathbb{R},$$

подразумевая, что это отображение линейно.

п° 2. Напомним определение производной. Будем считать, что данная функция  $f$  определена в области  $U (f: U \rightarrow \mathbb{R})$ . Пусть  $A$  — некоторое линейное отображение  $T_x \rightarrow \mathbb{R}$  (точка  $x$  зафиксирована при условии  $x \in U$ ). Обозначим через  $z$  произвольную (переменную) точку области  $U$ . Имеем  $z - x \in T_x$ ; следовательно, определен образ  $A(z - x)$  вектора  $z - x$  при отображении  $A$ . Данная функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $x$ , если существует такое линейное отображение  $A: T_x \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$f(z) - f(x) = A(z - x) + o(z - x); \quad (3)$$

здесь «о малое» от  $z - x$  понимается как обычно: оно удовлетворяет неравенству

$$\|o(z - x)\| \leq \psi(z, x) \|z - x\|, \quad (4)$$

где  $\psi(z, x)$  — некоторая неотрицательная функция, которая стремится к нулю при  $z \rightarrow x$ . В данном случае  $o(z - x)$  есть функция с числовыми значениями; ее норма  $\|o(z - x)\|$  есть просто модуль  $|o(z - x)|$ .

Линейное отображение  $A: T_x \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющее условию (3), называется производной функцией  $f$  в точке  $x$  символически  $A = Df(x)$  или  $A = f'(x)$ .

п° 3. Поскольку линейные отображения в  $\mathbb{R}$  мы называем формами (с числовыми значениями), то производная функции в данной точке есть форма.

Очевидно,  $f'(x) \in \Lambda_x^1$ , где  $\Lambda_x^1 = T_x^*$  есть кокасательное пространство в точке  $x$ . Соответственно можно сказать, что производная есть ковектор.

Значение производной на произвольном векторе  $\xi \in T_x$  называется дифференциалом функции:  $dy = Df(x) \xi$ , или  $d^1 f = Df(x) \xi$ ; можно писать также  $dy = f'(x) \xi$  или  $d^1 f = f'(x) \xi$ . Впрочем, дифференциалом часто называют производную.

п° 4. Как видно из определений, данных в п° 2, производная и дифференциал инвариантны, т. е. не зависят от выбора координат. Однако их координатные представления от выбора координатной системы зависят.

Пусть в  $E$  введена система координат с базисом  $e_1, \dots, e_n$ . Тогда в каждом касательном пространстве  $T_x$  будет введен базис, состоящий из векторов  $e_1, \dots, e_n$ , приложенных к точке  $x$ . Тем самым произвольный вектор  $\xi \in T_x$  получает координатное представление

$$\xi = \{\xi^1, \dots, \xi^n\}.$$

Одновременно получает координатное представление дифференциал функции

$$d^1 f = f_{x^1} \xi^1 + \dots + f_{x^n} \xi^n. \quad (5)$$

и производная (как ковектор из  $T_x^*$ )

$$f'(x) = \{f_{x^1}(x), \dots, f_{x^n}(x)\}. \quad (6)$$

Здесь  $f_{x^1}(x), \dots, f_{x^n}(x)$  — частные производные в точке  $x$ . Они зависят от выбора системы координат, что ясно по их определению и усматривается также из очевидной формулы

$$f_{x^i}(x) = f'(x) e_i. \quad (6')$$

или

$$f_{x^i}(x) = Df(x) e_i.$$

Последняя формула дает основание писать вместо  $f_{x^i}$  символ  $D_i f$  или просто  $D_i$ .

Замечание. Заметим, что правая часть (5) есть свертка элемента  $\xi$  касательного пространства  $T_x$  с элементом  $f'(x)$  сопряженного пространства  $T_x^*$ .

Замечание. Уже сейчас можно понять, что рассматривать и различать касательные пространства имеет смысл, хотя, казалось бы, они не отличаются от исходного пространства  $E$ . В самом деле, например, производная  $f'(x)$  по нашему определению есть линейное отображение  $T_x \rightarrow \mathbb{R}$ . Можно было бы определить  $f'(x)$  как линейное отображение  $E \rightarrow \mathbb{R}$ , но все равно тогда мы должны были бы указать, что оно зависит и как, именно, зависит от точки  $x$ . А это, по существу, и означает, что мы имеем дело с парами  $(x, u)$ ,  $u \in E$  или, наглядно говоря, с приложенными векторами.

п° 5. Для данной системы декартовых прямоугольных координат зададим систему функций  $\pi^1(x), \dots, \pi^n(x)$  от (переменной) точки  $x \in E$  условиями  $\pi^i(x) = x^i$ , где  $x^1, \dots, x^n$  — координаты точки  $x$ . По очевидным причинам эти функции называются *проектирующими*. Легко понять, что

$$d\pi^i(x) = D\pi^i(x)\xi = \xi^i = dx^i(\xi) \quad (7)$$

(см. § 2 п° 2). Таким образом, производные проектирующих функций суть проектирующие формы:  $D\pi^i(x) = dx^i$ .

Обратим внимание, что формулу (5) можно написать в виде

$$df = (D_1 dx^1 + \dots + D_n dx^n)(\xi),$$

где справа  $D_1, \dots, D_n$  можно рассматривать как коэффициенты разложения формы  $Df$  по формам  $dx^1, \dots, dx^n$ . Можно написать также

$$df = D_1 d\pi^1(x) + \dots + D_n d\pi^n(x),$$

поскольку  $d\pi^i(x) = dx^i(\xi)$ . Пишут очень часто еще

$$df = D_1 dx^1 + \dots + D_n dx^n.$$

Однако, поскольку  $dx^1, \dots, dx^n$  означают формы, а не значения форм, то последняя запись на самом деле выражает не дифференциал функции, а ее производную<sup>1)</sup>. Соответственно этой записи имеем вместо (7)

$$d\pi^i(x) = dx^i = e^i. \quad (7a)$$

п° 6. Теперь мы определим дифференциал полилинейной формы; тем самым, в частности, будут определены

<sup>1)</sup> Употребление символа  $d$  для обозначения производной (вместо дифференциала) вошло в традицию.

высшие дифференциалы функции, так как ее первый дифференциал есть линейная форма.

Пусть в некоторой области  $U$  дана дифференциальная полилинейная форма с числовыми значениями

$$a = a(x, \xi_1, \dots, \xi_k), \quad (8)$$

где  $x \in U$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_x$ . Иначе говоря, для любого  $x \in U$  дано полилинейное отображение  $a: T_x^k \rightarrow \mathbb{R}$ .

Зафиксируем  $\xi_1, \dots, \xi_k$  в области  $U$ . Это значит, что мы выбираем как-нибудь  $\xi_1, \dots, \xi_k$  в некоторой точке  $x \in U$ , а в остальных точках области  $U$  берем в качестве  $\xi_1, \dots, \xi_k$  векторы, которые получаются параллельным перенесением выбранных (см. п° 4 § 1). Если при любых фиксированных  $\xi_1, \dots, \xi_k$  форма  $a$  становится дифференцируемой функцией в области  $U$  (т. е. дифференцируемой функцией переменной точки  $x \in U$ ), то говорят, что эта форма дифференцируема в области  $U$ . Предполагая форму  $a$  дифференцируемой, рассмотрим дифференциал функции, которая получается из формы  $a$  путем фиксирования  $\xi_1, \dots, \xi_k$ :

$$da = Da(x, \xi_1, \dots, \xi_k)\eta, \quad \eta \in T_x. \quad (9)$$

Позволим теперь векторам  $\eta, \xi_1, \dots, \xi_k$  принимать любые значения; тогда правая часть (9) будет полилинейной формой от векторов  $\eta, \xi_1, \dots, \xi_k$ , число которых  $= k + 1$ . Эта форма называется *дифференциалом* данной формы  $a$ .

п° 7. Пусть теперь дана *внешняя* дифференциальная форма

$$\omega = \omega(x, \xi_1, \dots, \xi_k). \quad (10)$$

Ее дифференциал будет полилинейной формой, которая обладает косо́й симметрией по аргументам  $\xi_1, \dots, \xi_k$ , являющимся аргументами самой формы  $\omega$ , т. е. без участия  $\eta$ .

п° 8. *Внешним дифференциалом  $k$ -формы  $\omega$*  называется альтернация ее дифференциала, который определен в п° 6, взятая с коэффициентом  $k + 1$ :

$$d\omega = (k + 1)[D\omega]. \quad (11)$$

Вследствие этой альтернации форма  $d\omega$  обладает косо́й симметрией по всем своим векторным аргументам вместе с  $\eta$ .

Если форма задана своим координатным представлением

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (12)$$

то из (11), (12) и из определения внешнего произведения двух форм получаем

$$d\omega = * \sum d\omega_{i_1 \dots i_k}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (13)$$

Здесь

$$d\omega_{i_1 \dots i_k}(x) = \sum_{\alpha=1}^n D_{\alpha} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{\alpha}; \quad (14)$$

$D_{\alpha} \omega_{i_1 \dots i_k}(x)$  — частные производные.

п° 9. Следует заметить, что согласно принятой символике  $dx^{\alpha}$ ,  $dx^{i_1}$ , ...,  $dx^{i_k}$  суть формы, а не значения форм. Поэтому в силу равенства (13)  $d\omega$  точнее следовало бы называть внешней производной, а не внешним дифференциалом. Производной является также  $d\omega_{i_1 \dots i_k}(x)$ . Внешний дифференциал мы получим, если подсчитаем  $d\omega$  на произвольном наборе векторов  $\eta$ ,  $\xi_1$ , ...,  $\xi_k \in T_x$ . При этом  $d\omega_{i_1 \dots i_k}(x)$  подсчитывается на векторе  $\eta$ . Однако мы сохраним традиционную терминологию.

п° 10. Из определения внешнего дифференциала согласно п° 8 непосредственно следует, что внешний дифференциал в евклидовом пространстве определен нами инвариантно (поскольку в его определении вообще координатная система не участвует). Координатное представление  $d\omega$  от выбора системы координат, разумеется, зависит.

#### § 4. Основные свойства внешнего дифференциала

п° 1. Из определения внешнего дифференциала или из его координатного представления (9) § 3 непосредственно следует, что операция внешнего дифференцирования является линейной. Именно, если  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — любые дифференциальные  $k$ -формы, дифференцируемые в области  $U$ , и  $\alpha$ ,  $\beta$  — любые числа, то  $k$ -форма  $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$  также дифференцируема в  $U$ , причем

$$d(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha d\omega_1 + \beta d\omega_2. \quad (1)$$

Доказательство этого утверждения и только что написанного тождества мы предоставим читателю.

п° 2. Далее, имеет место следующее свойство: если  $\omega$ ,  $\sigma$  — любые внешние дифференциальные формы, дифференцируемые в области  $U$ , то внешнее произведение  $\omega \wedge \sigma$  есть внешняя дифференциальная форма, которая также дифференцируема в области  $U$ , причем

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma, \quad (2)$$

где  $k$  — степень формы  $\omega$ .

Доказательство формулы (2) проведем при помощи какого-нибудь координатного представления (тем самым (2) будет доказано вообще, поскольку сами формы и их внешние дифференциалы инвариантны). Имеем:

$$\begin{aligned} \omega &= * \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \\ \sigma &= * \sum \sigma_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}, \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d(* \sum \omega_{i_1 \dots i_k} \sigma_{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) = \\ &= * \sum ((d\omega_{i_1 \dots i_k}) \sigma_{j_1 \dots j_l} + \omega_{i_1 \dots i_k} d\sigma_{j_1 \dots j_l}) \wedge \\ &\quad \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = \\ &= * \sum (d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge \\ &\quad \wedge (* \sum \sigma_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) + \\ &\quad + (-1)^k (* \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge \\ &\quad \wedge (* \sum d\sigma_{j_1 \dots j_l} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}). \quad (3) \end{aligned}$$

В правой части равенства (3) перед вторым членом пришлось поставить  $(-1)^k$ , поскольку линейную форму  $d\sigma_{j_1 \dots j_l}$  нужно было переставить с  $k$ -формой  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  (см. § 8 главы I). Вместе с равенством (3) доказано и равенство (2).

п° 3. Лемма. Если  $f$  — дважды дифференцируемая в некоторой области  $U$  функция (рассматриваемая как форма нулевой степени), то внешний дифференциал  $d(df) = 0$ .

Доказательство. По определению внешних дифференциалов имеем

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

$$d(df) = \sum d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i =$$

$$= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0.$$

Эта сумма равна нулю потому, что вторая частная производная не меняется при перестановке индексов  $i, j$ , а внешнее произведение  $dx^i \wedge dx^j$  при такой перестановке меняет знак.

п° 4. Теорема. *Какой бы ни была дважды дифференцируемая в области  $U$  внешняя форма  $\omega$ , всегда*

$$d^2\omega = 0. \quad (4)$$

Здесь  $d^2\omega = d(d\omega)$ .

Доказательство. Воспользуемся координатным представлением формы  $\omega$  в какой-нибудь системе координат

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \dots i_k}(x) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k},$$

где  $e^1, \dots, e^n$  — проектирующие формы, соответствующие выбранной координатной системе. Согласно пп° 5 и 7 § 3

$$e^i = d\pi^i(x), \quad (5)$$

где  $\pi^i(x)$  — проектирующие функции. Из (5) и вследствие предыдущей леммы

$$de^i = d(d\pi^i(x)) = 0. \quad (6)$$

С другой стороны, по той же лемме

$$d(d\omega_{i_1 \dots i_k}(x)) = 0. \quad (7)$$

Применяя (многократно) правила дифференцирования, которые даны в пп° 1 и 2, и пользуясь равенствами (6), (7), получим  $d^2\omega = 0$ .

п° 5. Сама формулировка доказанной теоремы показывает ее фундаментальное значение для внешнего дифференцирования (хотя бы уже потому, что в силу этой теоремы все дифференциальное исчисление внешних форм сводится только к первым дифференциалам). Дальше мы покажем роль этой теоремы во вполне конкретных и весьма принципиальных вопросах.

## § 5. Примеры внешнего дифференцирования

п° 1. Рассмотрим сначала линейную дифференциальную форму на евклидовой плоскости

$$\omega = P dx^1 + Q dx^2;$$

здесь  $P$  и  $Q$  — функции точки  $x$ . Имеем

$$d\omega = dP \wedge dx^1 + dQ \wedge dx^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^2} dx^2\right) \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial Q}{\partial x^2} dx^2\right) \wedge dx^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2.$$

В связи с этими выражениями  $\omega, d\omega$  полезно вспомнить известную в элементарном анализе формулу Грина.

п° 2. Теперь рассмотрим линейную дифференциальную форму в пространстве

$$\omega = P dx^1 + Q dx^2 + R dx^3; \quad (1)$$

здесь  $P, Q, R$  — также функции точки  $x$ . Можно считать, что эти функции определяют вектор

$$p(x) = \{P(x), Q(x), R(x)\}.$$

Имеем:

$$d\omega = dP \wedge dx^1 + dQ \wedge dx^2 + dR \wedge dx^3 =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial P}{\partial x^3} dx^3\right) \wedge dx^1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial Q}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial Q}{\partial x^3} dx^3\right) \wedge dx^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial R}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial R}{\partial x^3} dx^3\right) \wedge dx^3 =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3 +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3.$$

Введем в рассмотрение ротацию вектора  $p(x)$ :

$$\text{rot } p = \left\{ \frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3}; \frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{\partial R}{\partial x^1}; \frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right\}.$$

Тогда

$$d\omega(\xi_1, \xi_2) = (\text{rot } p, \xi_1, \xi_2), \quad (2)$$

т. е.  $d\omega(\xi_1, \xi_2)$  представляет собой поток ротации через элементарную площадку  $(\xi_1, \xi_2)$  (см. п° 6 § 2). В связи с выражениями (1) и (2), полезно вспомнить известную в элементарном анализе формулу Стокса.

п° 3. Пусть теперь  $\omega$  — внешняя дифференциальная форма второй степени

$$\omega = R dx^1 \wedge dx^2 - Q dx^1 \wedge dx^3 + P dx^2 \wedge dx^3. \quad (3)$$

Согласно п° 6 § 2  $\omega(\xi_1, \xi_2)$  есть поток вектора  $p(x)$  через элементарную площадку  $(\xi_1, \xi_2)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \frac{\partial R}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial R}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial R}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \\ &- \left( \frac{\partial Q}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial Q}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial Q}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \\ &+ \left( \frac{\partial P}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial P}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение дивергенцию поля  $p(x)$ :

$$\operatorname{div} p = \frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3}.$$

Тогда

$$d\omega = \operatorname{div} p dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (4)$$

Форма  $d\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  есть дивергенция поля  $p(x)$  в элементарном объеме  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . В связи с выражениями (3) и (4) полезно вспомнить известную формулу Гаусса — Остроградского.

п° 4. В третьей главе будет установлена некоторая общая интегральная формула, включающая как свои весьма частные случаи все три интегральные формулы, которые упоминались нами в конце каждого из пп° 1, 2 и 3. Ее называют общей *формулой Стокса*.

## § 6. Индуцированное отображение пространства внешних форм

п° 1. Пусть задано линейное пространство  $L_1$  и некоторое линейное отображение его в линейное пространство  $L_2$ :

$$\psi: L_1 \rightarrow L_2. \quad (1)$$

Вместо (1) можно написать:  $v = \psi(u)$ , где  $u \in L_1$ ,  $v$  — образ элемента  $u$  в пространстве  $L_2$  ( $v \in L_2$ ). Обозначим через  $T^k(L_1)$  и  $T^k(L_2)$  линейные пространства  $k$ -тензоров, определенных соответственно в  $L_1$  и  $L_2$ . Как и раньше, будем представлять себе  $k$ -тензоры как полилинейные формы.

Для дальнейшего важно, что отображение (1) индуцирует по определенному стандарту некоторое линейное отображение  $T^k(L_2)$  в  $T^k(L_1)$ . Это индуцированное линейное отображение мы обозначим через  $\psi^*$  (следовало бы писать  $\psi_k^*$ )

$$\psi^*: T^k(L_2) \rightarrow T^k(L_1). \quad (2)$$

Отображение  $\psi^*$  определяется следующим образом. Пусть  $a(v_1, \dots, v_k)$  — данная полилинейная форма в  $T^k(L_2)$ , где  $v_1, \dots, v_k \in L_2$ . Пусть теперь  $u_1, \dots, u_k$  — любые векторы в  $L_1$  ( $u_1, \dots, u_k \in L_1$ ). С этими векторами мы сопоставим число  $a(\psi(u_1), \dots, \psi(u_k))$ . Так как  $a(v_1, \dots, v_k)$  — полилинейная форма и  $v = \psi(u)$  — линейное отображение, то  $a(\psi(u_1), \dots, \psi(u_k))$  линейно зависит от каждого из аргументов  $u_1, \dots, u_k$ . Тем самым с каждой формой  $a \in T^k(L_2)$  сопоставлена форма в  $T^k(L_1)$ ; ее и обозначают через  $\psi^*a$ ;  $\psi^*a \in T^k(L_1)$ . Согласно сказанному значению формы  $\psi^*(a)$  для набора векторов  $u_1, \dots, u_k \in L_1$  определяется равенством

$$(\psi^*a)(u_1, \dots, u_k) = a(\psi(u_1), \dots, \psi(u_k)). \quad (3)$$

Легко проверить, что для любых форм  $a, b \in T^k(L_2)$  и для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$  имеют место равенства:

$$\psi^*(a + b) = \psi^*a + \psi^*b, \quad \psi^*(\alpha a) = \alpha \psi^*a. \quad (4)$$

Тем самым отображение (2) действительно является линейным. Отметим еще равенство

$$\psi^*\alpha = \alpha, \quad (4')$$

которое мы принимаем как определение  $\psi^*$  для форм нулевой степени.

п° 2. Пусть теперь  $a$  и  $b$  — две формы с любым числом аргументов:  $a \in T^k(L_2)$ ,  $b \in T^l(L_2)$ . По определению тензорного произведения, имеем:

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) &= \\ &= a(v_1, \dots, v_k) b(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}); \end{aligned}$$

здесь  $v_j \in L_2$  ( $j=1, \dots, k, k+1, \dots, k+l$ ). Отсюда для любых  $u_j \in L_1$  следует:

$$\begin{aligned} \psi^*(a \otimes b)(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+l}) &= \\ &= (a \otimes b)(\psi(u_1), \dots, \psi(u_k), \psi(u_{k+1}), \dots, \psi(u_{k+l})) = \\ &= a(\psi(u_1), \dots, \psi(u_k)) b(\psi(u_{k+1}), \dots, \psi(u_{k+l})) = \\ &= (\psi^*a \otimes \psi^*b)(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+l}). \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, из (3) непосредственно получается равенство альтернатив

$$[\psi^*a](u_1, \dots, u_k) = [a](\psi(u_1), \dots, \psi(u_k)). \quad (6)$$

Числовые тождества (5) и (6) сразу приводят к соответствующим тензорным равенствам:

$$\psi^*(a \otimes b) = \psi^*a \otimes \psi^*b, \quad (7)$$

$$[\psi^*a] = \psi^*[a]. \quad (8)$$

п° 3. Следствие. Если  $a$  — внешняя форма в  $T^k(L_2)$ , то  $\psi^*(a)$  — внешняя форма в  $T^k(L_1)$ .

Доказательство. Пусть  $[a] = a$ . Тогда

$$[\psi^*a] = \psi^*[a] = \psi^*a,$$

что и утверждалось.

п° 4. Доказанное утверждение можно выразить еще следующим способом: если  $a \in \Lambda^k(L_2)$ , то  $\psi^*a \in \Lambda^k(L_1)$ . Иначе говоря, линейное отображение  $\psi$  индуцирует линейное отображение

$$\psi^*: \Lambda^k(L_2) \rightarrow \Lambda^k(L_1). \quad (9)$$

Отображение (9) является, очевидно, сужением отображения (2) на  $\Lambda^k(L_2) \subset T^k(L_2)$ ; мы сохранили для него символ  $\psi^*$ .

Далее мы рассматриваем внешние формы и поэтому вместо  $a$  и  $b$  пишем  $\omega$  и  $\sigma$ .

п° 5. Из (7) и (8) следует также равенство

$$\psi^*(\omega \wedge \sigma) = \psi^*\omega \wedge \psi^*\sigma. \quad (10)$$

В самом деле, если  $\omega \in \Lambda^k(L_2)$ ,  $\sigma \in \Lambda^l(L_2)$ , то

$$\begin{aligned} \psi^*(\omega \wedge \sigma) &= \psi^*\left(\frac{(k+l)!}{k!l!} [\omega \otimes \sigma]\right) = \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} [\psi^*\omega \otimes \psi^*\sigma] = \psi^*\omega \wedge \psi^*\sigma. \end{aligned}$$

Кроме того, если  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то согласно (4)

$$\psi^*(\alpha\omega) = \alpha\psi^*(\omega).$$

п° 6. Теперь мы займемся внешними дифференциальными формами. Изложенные сейчас вещи мы перенесем из алгебры внешних форм в дифференциальное исчисление.

Пусть в области  $U \in E$  задана функция  $y = f(x)$ ,  $x \in U$ , значения которой суть элементы некоторого евклидова пространства  $\tilde{E}$  ( $y \in \tilde{E}$ ). Иначе говоря, дано отображение области  $U$  евклидова пространства  $E$  в евклидово пространство  $\tilde{E}$ :

$$f: U \rightarrow \tilde{E}. \quad (11)$$

Размерности  $E$  и  $\tilde{E}$  могут быть любыми; мы обозначим их соответственно через  $n$  и  $m$ .

Предположим, что отображение  $f$  дифференцируемо в каждой точке области  $U$ . Тогда в произвольной точке  $x \in U$  существует производная отображения  $f$ , которая представляет собой линейное отображение  $T_x$  в  $\tilde{E}$ . Напомним, что  $T_x$  обозначает касательное пространство к  $E$  в точке  $x$  (см. § 1). Через  $\tilde{T}_y$  мы будем иногда обозначать касательное пространство к  $\tilde{E}$  в точке  $y = f(x)$ .

Производную отображения  $f$  в точке  $x$  будем обозначать через  $f'(x)$ . Что касается определения производной, то мы ограничимся ссылкой к п° 2 § 3, где дано определение производной функции с числовыми значениями. Оно почти без изменений переносится на случай производной общего отображения: достаточно всюду в п° 2 вместо отображений  $U \rightarrow \mathbb{R}$  и  $T_x \rightarrow \mathbb{R}$  подразумевать соответственно отображения  $U \rightarrow \tilde{E}$  и  $T_x \rightarrow \tilde{E}$ .

Дифференциал отображения  $f$  в точке  $x$  пишется в виде

$$\eta = f'(x)\xi. \quad (12)$$

Здесь  $\xi$  — произвольный вектор из  $T_x$ ,  $\eta$  (дифференциал отображения) — его образ в  $\tilde{T}_y$ .

Производная и дифференциал отображения являются инвариантными объектами (их определения не используют координатных систем). Но допустим, что в  $E$  и  $\tilde{E}$  введены координаты (будем считать — декартовы прямоугольные, хотя это не везде существенно). Тогда





п° 10. Операция  $f^*$  определена инвариантно. Указанные выше свойства этой операции позволяют легко получить ее координатное представление. Пусть дано координатное представление формы  $\omega \in \Lambda^k(\tilde{T}_y)$ :

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \dots i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}. \quad (18)$$

Тогда на основании свойств 2) — 5) получаем

$$f^*\omega = * \sum (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ f) (f^*(dy^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{i_k})). \quad (19)$$

Отсюда и вследствие (17) имеем координатное представление  $f^*\omega$ .

Указание. Формула (19) означает, что координатное представление  $f^*\omega$  получается простой формальной подстановкой. Именно, нужно в правой части выражения (18) заменить  $y^1, \dots, y^m$  их выражениями (13) и записать  $f^*(dy^1), \dots, f^*(dy^m)$  по формуле (17).

п° 11. В частности, если  $m = n$  и  $k = n$ , то матрица  $f'$  является квадратной, а форма имеет одночленный вид

$$\omega = g dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n, \quad (20)$$

где  $g = g(y)$ . В этом случае

$$f^*\omega = (g \circ f) (\det f') dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (21)$$

п° 12. Имеет место важная Теорема.

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega). \quad (22)$$

Доказательство сначала проведем для форм нулевой степени. Пусть  $g$  — функция, заданная в области  $\tilde{U} \subset \tilde{E}$ . Имеем

$$f^*(g) = g \circ f.$$

Отсюда

$$df^*(g) = dg \circ df = dg \cdot f' = f^*(dg). \quad (23)$$

Пусть теперь  $\omega$  — произвольная  $k$ -форма, заданная в  $\tilde{U} \subset \tilde{E}$ :

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}.$$

Тогда

$$f^*\omega = * \sum (f^*\omega_{i_1 \dots i_k}) f^*(dy^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{i_k}).$$

Вследствие (17)

$$df^*(dy^i) = 0.$$

Отсюда и на основании (23)

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= * \sum d(f^*\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge f^*(dy^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{i_k}) = \\ &= * \sum f^*(d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge f^*(dy^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{i_k}) = f^*(d\omega). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

п° 13. Пусть, как и раньше,  $f: U \rightarrow \tilde{E}$ ,  $U \subset E$ ; пусть  $\tilde{U}$  обозначает образ области  $U$  в пространстве  $\tilde{E}$ . Предположим, что  $m = n$  и что отображение  $f: U \rightarrow \tilde{U}$  диффеоморфно. Допустим, что в  $E$  и  $\tilde{E}$  введены декартовы прямоугольные координаты. Тогда  $f$  получает координатное представление:  $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тем самым набор чисел  $(x^1, \dots, x^n) = x \in U$  определяет точку  $y = (y^1, \dots, y^n) = f(x) \in \tilde{U}$ . Числа  $(x^1, \dots, x^n)$  называют *криволинейными координатами* точки  $y \in \tilde{U}$ .

Пусть в области  $\tilde{U} \subset \tilde{E}$  задана форма  $\omega$  и дано ее координатное представление в координатах  $y^1, \dots, y^n$ . Тогда координатное представление формы  $f^*\omega$  в пространстве  $E$  в координатах  $(x^1, \dots, x^n)$  называется записью формы  $\omega$  в криволинейных координатах  $(x^1, \dots, x^n)$  в пространстве  $\tilde{E}$ .

п° 14. Пример. Пусть роль  $\tilde{E}$  играет двумерная плоскость с декартовыми координатами  $(y^1, y^2)$ . Роль  $E$  — двумерная плоскость с декартовыми координатами  $(\rho, \theta)$  и отображение  $f$  дано формулами

$$y^1 = \rho \cos \theta, \quad y^2 = \rho \sin \theta \quad (\rho > 0).$$

Тогда  $(\rho, \theta)$  — криволинейные (полярные) координаты в плоскости  $\tilde{E}$ . Рассмотрим форму  $\omega = dy^1 \wedge dy^2$ . Ее запись в криволинейных (полярных) координатах будет  $f^*\omega = (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) =$

$$= \rho (d\rho \wedge d\theta).$$

п° 15. Пусть в декартовых координатах даны форма  $\omega$  и ее внешний дифференциал  $d\omega$ . Их записи в криволинейных координатах будут соответственно  $f^*\omega$  и  $f^*d\omega$ . Но  $f^*d\omega = df^*\omega$ . Поэтому вычисление внешнего дифференциала в криволинейных координатах можно проводить в пространстве  $\tilde{E}$  непосредственно по координатной записи формы  $f^*\omega$ , не обращая внимания на криволинейный характер координат, в которых она записана.

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ**

п° 16. В заключение этой главы мы рассмотрим координатное представление индуцированного отображения  $f^*$ , причем для любых тензоров (т. е. для любых полилинейных форм, не обязательно внешних).

Пусть, как и в п° 13, дано  $f: U \rightarrow \tilde{E}$  ( $m=n$ ), или  $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Вместе с  $f$  определена производная  $f'$  как линейное отображение  $\eta = f' \xi$  векторов из касательного пространства  $T_x$  ( $\xi \in T_x$ ) в касательное пространство  $T_y$  ( $y = f(x)$ ):  $\xi \mapsto \eta \in T_y$ . В координатной записи имеем:

$$\eta^i = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^a} \xi^a;$$

частные производные подсчитаны в точке  $x$ .

Можно написать также

$$f^* dy^i = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^a} dx^a.$$

где  $dx^1, \dots, dx^n$  — координатные формы в  $T_x$ ,  $dy^1, \dots, dy^n$  — координатные формы в  $T_y$ .

Пусть в  $T_y$  задан  $k$ -тензор, т. е. полилинейная форма  $a \in \mathbb{T}_y^k$ :

$$a = \sum a_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_k}.$$

Отсюда и из предыдущего

$$f^* a = \sum a_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{a_k}} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_k}.$$

Таким образом, если положить

$$f^* a = \sum \tilde{a}_{a_1 \dots a_k} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_k},$$

то  $f^*$  представится в координатах формулами

$$\tilde{a}_{a_1 \dots a_k} = \sum a_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{a_k}}. \quad (24)$$

Еще раз подчеркнем, что  $f^*$  зависит от  $k$  (ясно, что от  $k$  зависит и число формул (24) и число слагаемых в их правых частях).

Заметим, наконец, что  $f$  можно рассматривать не как отображение точек, а как преобразование координат. Тогда формулы (24) выражают «ковариантный закон» преобразования координат тензора при переходе к новой координатной системе.

**§ 1. Интеграл от внешней формы  
по сингулярному кубу**

п° 1. Пусть  $\mathbb{R}^k$  — декартово координатное представление  $k$ -мерного евклидова пространства. Будем обозначать произвольную точку в  $\mathbb{R}^k$  буквой  $t$ , а координаты ее — той же буквой  $t$  с надлежащими индексами

$$t = (t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k.$$

Обозначим через  $h$  так называемый стандартный куб в  $\mathbb{R}^k$ , т. е. единичный координатный куб  $[0, 1]^k$

$$h = [0, 1]^k.$$

По определению

$$[0, 1]^k \Leftrightarrow 0 \leq t^i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Рассмотрим произвольную область  $U$ ,  $U \in \mathbb{R}^k$ , содержащую куб  $h$ , и допустим, что в области  $U$  задана внешняя дифференциальная форма  $\sigma$  степени  $k$ . Координатная запись  $k$ -формы в  $k$ -мерном пространстве имеет одночленный вид

$$\sigma = g(t^1, \dots, t^k) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k. \quad (1)$$

Предположим, что  $\sigma$  непрерывна в  $U$ ; это равносильно предположению непрерывности функции  $g(t^1, \dots, t^k)$ . При этом условии функция  $g(t^1, \dots, t^k)$  заведомо интегрируема в  $h$ .

п° 2. Интеграл по кубу  $h = [0, 1]^k$  от формы  $\sigma$ , заданной в пространстве  $\mathbb{R}^k$ , определяется равенством

$$\int_h \sigma = \int_{[0, 1]^k} g(t^1, \dots, t^k) dt^1 \dots dt^k, \quad (2)$$

где справа написан обычный  $k$ -кратный интеграл по  $h = [0, 1]^k$ .

п° 3. Пусть теперь  $\omega$  — внешняя дифференциальная  $k$ -форма, заданная и непрерывная в некоторой области  $V$  пространства  $E$ . Обозначим размерность  $E$  через  $n$ , считая  $n \geq k$ .

Рассмотрим непрерывно-дифференцируемое отображение

$$c: U \rightarrow V \subset E.$$

Вместе с ним определено его сужение на  $h$ , которое мы обозначим той же буквой  $c$ :

$$c: h \rightarrow V. \quad (3)$$

Отображение (3) называется  $k$ -мерным сингулярным кубом в пространстве  $E$ , или в области  $V \subset E$ . Подчеркнем, что сингулярный куб  $c$  представляет собой не образ куба  $h$  в пространстве  $E$ , а само отображение (3). Можно сказать, что сингулярный куб  $c$  представляет собой множество пар вида  $(x, t)$ , где  $t \in h$ ,  $x = c(t) \in E$ ; две пары  $(x_1, t_1)$  и  $(x_2, t_2)$  считаются различными, если различны хотя бы только  $t_1$  и  $t_2$ . Название сингулярного куба (именно, прилагательное: «сингулярный») связано с тем, что отображение (3) может иметь особенности; например, не исключается, что  $h$  отобразится в одну точку.

Вместе с сингулярным кубом  $c$  определено для каждой точки  $t \in h$  линейное отображение

$$c': T_t \rightarrow T_x, \quad (4)$$

т. е. производная от  $c$ ; здесь  $T_t = T_t(\mathbb{R}^k)$  — касательное пространство к  $\mathbb{R}^k$  в точке  $t$ ,  $T_x = T_x(E)$  — касательное пространство к  $E$  в точке  $x = c(t)$ . Отображение (4) в свою очередь индуцирует известное нам линейное отображение

$$c^*: \Lambda^k(T_x) \rightarrow \Lambda^k(T_t). \quad (5)$$

Таким образом, с каждой  $k$ -формой  $\omega$  в области  $V \subset E$  сопоставляется  $k$ -форма  $c^*\omega$  на стандартном кубе  $h \subset \mathbb{R}^k$ . Форма  $c^*\omega$  определена инвариантно в том смысле, что ее определение не использует координатных систем в  $E$ . Ее координатное представление в  $\mathbb{R}^k$  является одночленным (см. (1) в п° 1).

п° 4. Интегралом от внешней дифференциальной  $k$ -формы  $\omega$  по сингулярному  $k$ -мерному кубу  $c$  в области  $V$  называется число, которое обозначается и определяется согласно следующему равенству:

$$\int_c \omega = \int_h c^*\omega. \quad (6)$$

Правая часть этого равенства уже определена равенством (2); в данном случае  $\sigma = c^*\omega$ . Для сохранения стандарта терминологии можно считать, что в правой части (6) буква  $h$  обозначает сингулярный куб  $I: h \rightarrow h$ , где  $I$  — тождественное отображение. Определение интеграла от  $\omega$  по  $c$ , как мы видим, инвариантно. В частном случае  $k=0$  нульмерным сингулярным кубом называется отображение в  $E$  стандартного куба нульмерного пространства, состоящего из одной точки

$$c: \{0\} \rightarrow E.$$

Пусть  $c(0)$  — образ точки  $\{0\}$  в  $E$  ( $c(0) \in E$ ). Если  $\omega$  — нульмерная форма в  $E$ , т. е. функция  $\omega = \omega(x)$ ,  $x \in E$ , то по определению

$$\int_c \omega = \omega(c(0)).$$

п° 5. Допустим, что в пространстве  $E$  введены декартовы прямоугольные координаты; будем для точки пространства  $E$  и для ее координат употреблять букву  $x$ :  $x = (x^1, \dots, x^n)$ .

Тогда отображение  $c$  получит координатное представление:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= c^1(t^1, \dots, t^k), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^k &= c^k(t^1, \dots, t^k), \\ x^{k+1} &= c^{k+1}(t^1, \dots, t^k), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^n &= c^n(t^1, \dots, t^k). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Теперь все сказанное выше мы сведем в один (простой) рецепт для вычисления  $c^*\omega$  и интеграла от  $\omega$  по  $c$ . Для простоты записи возьмем в  $E$  одночленную  $k$ -форму

$$\omega = G(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k. \quad (8)$$

Согласно § 7 главы II имеем

$$e^*\omega = (G \circ c) c^* (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) = \\ = (G \circ c) c^* dx^1 \wedge \dots \wedge c^* dx^k, \quad (9)$$

$$c^* dx^i = (D_1 c^i) dt^1 + \dots + (D_k c^i) dt^k. \quad (10)$$

Таким образом, получение  $c^*\omega$  фактически сводится к подстановке в (8) вместо  $x^1, \dots, x^n$  их выражений из (7).

п° 6. Из (9) и (10)

$$c^*\omega = (G \circ c) \det \left( \frac{x^1, \dots, x^k}{t^1, \dots, t^k} \right) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k \quad (11)$$

(см. § 14 главы I в частном случае  $n = k$ ; см. также п° 11 § 6 главы II).

Из (11) получаем для одночленной формы (8)

$$\int_c \omega = \int_{[0, 1]^k} G(x^1(t), \dots, x^n(t)) \det \left( \frac{x^1, \dots, x^k}{t^1, \dots, t^k} \right) dt^1 \dots dt^k. \quad (12)$$

Формула (12) написана с полной подробностью и может быть положена в основу фактического вычисления интегралов от внешних форм по сингулярному кубу.

п° 7. Отметим простейший случай применения формулы (12) для интеграла от линейной формы

$$\omega = P dx^1,$$

где  $P = P(x^1, x^2, x^3)$ . В данном случае интегрирование должно вестись по одномерному сингулярному кубу  $c$ , который обычно называют ориентированной дугой

$$c: \begin{cases} x^1 = c^1(t), \\ x^2 = c^2(t), \\ x^3 = c^3(t). \end{cases}$$

Если мы для удобства записи положим  $P(t) = P(c^1(t), c^2(t), c^3(t))$ , то формула (12) в этом частном случае дает

$$\int_c \omega = \int_{[0, 1]} P(t) \frac{dx^1}{dt} dt.$$

п° 8. Формуле (12) можно придать более краткую запись. С этой целью обозначим через  $\hat{c}$  отображение,

которое состоит из  $c$  и последующего проектирования образа на координатное  $k$ -мерное подпространство первых по счету осей. Мы будем рассматривать это подпространство, отвлекаясь от остальных осей. Тогда для отображения  $\hat{c}$  имеем координатное представление (см. (7)):

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1(t^1, \dots, t^k), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^k &= c^k(t^1, \dots, t^k). \end{aligned}$$

Для краткости напомним

$$\det \left( \frac{x^1, \dots, x^k}{t^1, \dots, t^k} \right) = \det \hat{c}'.$$

Отсюда из (12)

$$\int_c \omega = \int_{[0, 1]^k} (G \circ c) (\det \hat{c}'); \quad (13)$$

здесь снова полезно вспомнить п° 11 § 6 главы II. Равенство (13) и есть та формула, которую мы имели в виду написать. В ней, как часто делается, не написан элемент объема.

Замечание. Если одночленная  $k$ -форма имеет вид

$$\omega = G(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

то в правой части (13) в качестве  $\hat{c}$  следует брать отображение

$$\begin{aligned} x^{i_1} &= c^{i_1}(t^1, \dots, t^k), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^{i_k} &= c^{i_k}(t^1, \dots, t^k). \end{aligned}$$

Замечание. Интеграл от формы общего вида вычисляется согласно (13) почленно (с учетом предыдущего замечания).

п° 9. Для дальнейшего нам нужно вспомнить теорему и формулу замены переменных в кратном интеграле<sup>1)</sup>.

Пусть  $U$  — некоторая область в  $\mathbb{R}^n$  и  $y = s(x)$  ( $x \in U$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ) непрерывно-дифференцируемое отображение  $U \rightarrow$

<sup>1)</sup> В связи с приводимой здесь формулировкой этой теоремы см. [3].

... " , инъективное, т. е. взаимно однозначное на образ  $s(U)$ :

$$s: \begin{cases} y^1 = s^1(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = s^n(x^1, \dots, x^n). \end{cases}$$

Тогда, если  $\det s'(x) \neq 0$  в области  $U$ , то для любой интегрируемой функции  $f(y)$ ,  $y \in s(U)$ , имеет место равенство

$$\int_{s(U)} f(y) dy^1 \dots dy^n = \int_U f(s(x)) |\det s'(x)| dx^1 \dots dx^n.$$

В более короткой записи:

$$\int_U (f \circ s) |\det s'| = \int_{s(U)} f.$$

Нам эта формула потребуется в частном случае, когда  $s(U)$  совпадает с  $U$ . В этом случае

$$\int_U (f \circ s) |\det s'| = \int_U f. \quad (14)$$

п° 10. Пусть  $c$  и  $\tilde{c}$  — два  $k$ -мерных сингулярных куба:

$$c: h \rightarrow E, \quad \tilde{c}: h \rightarrow E.$$

Предположим, что существует взаимно однозначное гладкое отображение  $p$  стандартного куба  $h$  на себя, которое имеет положительный определитель ( $\det p' > 0$ ) и для которого  $\tilde{c} = c \circ p$ . В таком случае говорят, что  $\tilde{c}$  получен из  $c$  изменением параметризации. Мы будем говорить также, что  $\tilde{c}$  эквивалентен  $c$  и будем писать:  $\tilde{c} \sim c$ .

З а м е ч а н и е. Так как  $\tilde{c} = c \circ p$ , то образ  $\tilde{c}(h)$  куба  $h$  совпадает с его образом  $c(h)$ . Тем самым переход от  $c$  к  $\tilde{c}$  означает только смену прообразов произвольной точки  $x \in c(h) \equiv \tilde{c}(h)$ . Пусть  $x = c(t)$ ,  $t \in h$  и  $x = \tilde{c}(\tilde{t})$ ,  $\tilde{t} \in h$ . Если  $t = (t^1, \dots, t^k)$ , то числа  $t^1, \dots, t^k$  можно назвать криволинейными координатами точки  $x$  в координатной системе  $c: h \rightarrow E$  (см. п° 13 § 7 главы II); если  $\tilde{t} = (\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^k)$ , то числа  $\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^k$  являются криволинейными координатами той же точки  $x$  в другой координатной системе  $\tilde{c}: h \rightarrow E$ . Тем самым, дело заключается в преобразовании криволинейных координат по формуле  $t = p(\tilde{t})$ . Криволинейные координаты часто называют

параметрами. Отсюда — выражение, которое мы употребили выше:  $\tilde{c}$  получен из  $c$  изменением параметризации.

п° 11. Легко показать, что 1)  $c \sim c$ ; 2) если  $\tilde{c} \sim c$ , то  $c \sim \tilde{c}$ ; 3) если  $\tilde{c} \sim c$ ,  $\tilde{\tilde{c}} \sim \tilde{c}$ , то  $\tilde{\tilde{c}} \sim c$ .

п° 12. Будем говорить, что сингулярный куб  $\tilde{c}$  эквивалентен сингулярному кубу  $c$  после изменения ориентации, и писать  $\tilde{c} \sim -c$ , если существует отображение  $p$ , для которого  $\tilde{c} = c \circ p$  и  $\det p' < 0$  при сохранении остальных условий.

п° 13. Имеют место следующие предложения:

1) Если  $\tilde{c} \sim c$ , то для любой  $k$ -формы  $\omega$

$$\int_{\tilde{c}} \omega = \int_c \omega.$$

До к а з а т е л ь с т в о. Возьмем для простоты в качестве формы  $\omega$  одночленную форму (8). Имеем согласно формуле (13)

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{c}} \omega &= \int_{c \circ p} \omega = \int_h (c \circ p)^* \omega = \int_h (G \circ (c \circ p)) \det \widehat{(c \circ p)}' = \\ &= \int_h ((G \circ c) \circ p) (\det \hat{c}' \circ p) \det p'. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\hat{p} = p$ . Теперь, поскольку  $\det p' > 0$ , имеем по теореме о замене переменных

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{c}} \omega &= \int_h ((G \circ c) \circ p) \det \hat{c}' \circ p |\det p'| = \\ &= \int_h (G \circ c) \det \hat{c}' = \int_h c^* \omega = \int_c \omega. \end{aligned}$$

2) Если  $\tilde{c} \sim -c$ , то для любой  $k$ -формы  $\omega$

$$\int_{\tilde{c}} \omega = - \int_c \omega.$$

Доказательство легко усматривается из предыдущего с учетом условия  $\det p' < 0$ .

п° 14. Только что доказанные теоремы выражают особую роль косо́й симметрии формы для ее интегрирования. Именно косо́я симметрия формы вызывает появление определителя в правой части формулы (13), что вместе с теоремой о замене переменных обеспечивает инвариантность интеграла относительно изменения параметризации.

## § 2. Понятие цепи. Интеграл от формы по цепи

п° 1. В качестве наглядного источника общего понятия цепи в евклидовом пространстве  $E$  можно указать дугу  $A_0A_p$ , составленную из нескольких ориентированных дуг  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{p-1}A_p$ . Каждая ориентированная дуга  $A_{i-1}A_i$  представляет собой некоторый одномерный сингулярный куб; обозначим его для краткости через  $c_i$ . Тогда дугу  $A_0A_p$  можно рассматривать как набор одномерных сингулярных кубов  $c_1, c_2, \dots, c_p$ . По некоторым соображениям, смысл которых выяснится чуть дальше, этот набор обозначают в виде суммы  $c_1 + c_2 + \dots + c_p$ . Такую сумму назовем формальной (поскольку пока это лишь символ, обозначающий набор  $c_1, \dots, c_p$ ). Порядок записи слагаемых в формальной сумме для нас безразличен. Это естественно. В самом деле, переставляя в записи суммы, например,  $c_1$  и  $c_2$ , мы в действительности никаких изменений с этими сингулярными кубами не делаем; поэтому  $c_1 + c_2 + \dots + c_p$  и  $c_2 + c_1 + \dots + c_p$  обозначают одну и ту же дугу  $A_0A_p$ . Формальная сумма  $c_1 + c_2 + \dots + c_p$  представляет собой пример одномерной цепи. Общее понятие одномерной цепи легко уяснить себе, хотя бы в главных чертах, исходя из этого примера путем некоторых обобщений. Прежде всего, мы допустим, что одномерные сингулярные кубы  $c_1, \dots, c_p$  могут быть выбраны произвольно (не обязательно в виде ориентированных дуг, которые в пространстве последовательно приложены друг к другу). Затем мы будем брать сингулярные кубы  $c_1 + \dots + c_p$  с произвольными действительными коэффициентами  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ; эти коэффициенты пока будут писаться также формально. Таким образом, *одномерной цепью* мы назовем любую формальную сумму  $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p$  (любую в том смысле, что одномерные сингулярные кубы  $c_1, \dots, c_p$  и действительные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  могут быть выбраны как угодно). Содержательный смысл этих понятий выяснится путем их связи с теорией интегрирования.

п° 2. Теперь мы будем рассматривать цепи любой размерности. Пусть  $c_1, \dots, c_p$  — некоторый набор  $k$ -мерных сингулярных кубов в  $E$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  — набор действительных чисел; при этом мы считаем, что число  $\lambda_i$

сопоставлено с кубом  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ). Совокупность таких двух наборов мы назовем *k-мерной цепью* в пространстве  $E$ . Обозначая цепь буквой  $C$ , запишем ее в виде формальной суммы

$$C = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p.$$

Пусть даны две цепи:

$$C = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p,$$

$$\tilde{C} = \mu_1 \tilde{c}_1 + \dots + \mu_q \tilde{c}_q.$$

Определим линейные операции следующими равенствами:

$$C + \tilde{C} = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p + \mu_1 \tilde{c}_1 + \dots + \mu_q \tilde{c}_q,$$

$$\alpha C = (\alpha \lambda_1) c_1 + \dots + (\alpha \lambda_p) c_p.$$

Очевидно, что

$$(C + \tilde{C}) + \tilde{\tilde{C}} = C + (\tilde{C} + \tilde{\tilde{C}}),$$

$$1 \cdot C = C,$$

$$\alpha(\beta C) = (\alpha\beta) C.$$

Здесь всюду знак равенства употреблен в смысле тождественного совпадения объектов.

п° 3. Пусть  $\omega$  — внешняя дифференциальная форма степени  $k$ , определенная в области  $U \in E$ ; пусть  $c_1$  — сингулярный куб ( $c_1: h \rightarrow E$ ) такой, что образ  $c_1(h)$  лежит в  $U$ ; пусть  $C$  — специальная  $k$ -мерная цепь вида  $C = 1 \cdot c_1$ .

Интеграл от  $\omega$  по этой цепи определяется равенством

$$\int_C \omega = \int_{c_1} \omega.$$

Вспомним, что интеграл по сингулярному кубу нами уже определен раньше. В общем случае, если

$$C = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p,$$

положим, по определению,

$$\int_C \omega = \lambda_1 \int_{c_1} \omega + \dots + \lambda_p \int_{c_p} \omega.$$

п° 4. Определение. Две  $k$ -мерные цепи  $C$  и  $\tilde{C}$  будем называть *равными*, если

$$\int_{\tilde{C}} \omega = \int_C \omega$$

для любой внешней дифференциальной формы  $\omega$  степени  $k$ .

З а м е ч а н и е. Отсюда и далее равенство

$$\tilde{C} = C$$

будет пониматься в смысле только что высказанного определения. Отметим, что равенства, которые были написаны в п° 2, остаются в силе.

Т е о р е м а. Пусть  $c$  и  $\tilde{c}$  — два  $k$ -мерных сингулярных куба,  $C$  и  $\tilde{C}$  — две  $k$ -мерные цепи:  $C = 1 \cdot c$ ,  $\tilde{C} = 1 \cdot \tilde{c}$ . Тогда, если  $\tilde{c} \sim c$ , то  $\tilde{C} = C$ , если  $\tilde{c} \sim -c$ , то  $\tilde{C} = (-1)C$ .

З а м е ч а н и е. Знак  $\sim$  означает эквивалентность в смысле определений п° 10 и 12 параграфа § 1.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из п° 13 § 1.

п° 5. Определение. Назовем  $k$ -мерную цепь  $\theta$  *нулевой*, если

$$\int_{\theta} \omega = 0$$

для любой  $k$ -мерной формы  $\omega$ .

Т е о р е м а. Если  $\theta$  — нулевая  $k$ -мерная цепь и  $c_1, \dots, c_p$  любые  $k$ -мерные сингулярные кубы, то

$$\theta = 0 \cdot c_1 + \dots + 0 \cdot c_p.$$

Обратно, цепь, написанная здесь справа, является нулевой.

Доказательство очевидно.

п° 6. Теперь легко убедиться, что  $k$ -мерные цепи, точнее, их классы эквивалентности, образуют линейное пространство.

Для этого следует проверить пять аксиом линейного пространства, остающиеся после трех аксиом, которые проверены в конце п° 2.

И м е е м

$$C + \tilde{C} = \tilde{C} + C,$$

как прямое следствие определения п° 4. Далее,

$$C + \theta = C$$

и

$$C + (-1)C = \theta,$$

что следует из теоремы п° 5.

Наконец,

$$(a + \beta)C = aC + \beta C, \quad a(C + \tilde{C}) = aC + a\tilde{C}.$$

Чтобы установить эти соотношения, достаточно убедиться в равенстве соответствующих интегралов от произвольной формы  $\omega$  степени  $k$ .

п° 7. Обозначим линейное пространство  $k$ -мерных цепей в  $E$  через  $S^k$ . Легко убедиться, что пространство  $S^k$  бесконечномерно. В самом деле, пусть  $p$  — любое натуральное число. Построим  $k$ -мерные сингулярные кубы  $c_1, \dots, c_p$  любым образом при соблюдении следующих двух условий:

1)  $c_1(h), \dots, c_p(h)$  лежат соответственно в попарно непересекающихся областях  $U_1, \dots, U_p$ ;

2) цепи  $C_1 = 1 \cdot c_1, \dots, C_p = 1 \cdot c_p$  являются ненулевыми.

Тогда цепи  $C_1, \dots, C_p$  линейно-независимы. Чтобы доказать это, заметим, что существуют формы  $\omega_1, \dots, \omega_p$  степени  $k$  такие, что

$$\int_{c_j} \omega_j \neq 0 \quad (j = 1, \dots, p).$$

Существование таких форм прямо следует из второго условия. Обозначим через  $\psi_j$  гладкую функцию в  $E$ , которая равна единице на образе  $c_j(h)$  и равна нулю вне области  $U_j$ . Положим  $\sigma_j = \psi_j \omega_j$ . Тогда

$$\int_{c_j} \sigma_j = \int_{c_j} \omega_j \neq 0 \quad (j = 1, \dots, p).$$

Но при любом  $s \neq j$  будет

$$\int_{c_s} \sigma_j = 0.$$

Допустим, что имеет место соотношение

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = \theta,$$

где  $\theta$  — нулевая цепь. Тогда

$$\lambda_1 \int_{C_1} \sigma_j + \dots + \lambda_p \int_{C_p} \sigma_j = \int_{\theta} \sigma_j = 0,$$

где  $j=1, 2, \dots, p$ . Отсюда и из предыдущего следует, что  $\lambda_j=0$ . Тем самым линейная независимость цепей  $C_1, \dots, C_p$  доказана.

п° 8. Обозначим через  $W^k$  линейное пространство всех внешних дифференциальных форм степени  $k$ , определенных и гладких (бесконечно дифференцируемых) в евклидовом пространстве  $E$ . Таким образом, мы теперь предполагаем, что область, в которой даны объекты наших рассуждений, совпадает со всем пространством (по сути дела, это ограничение существенно лишь в §§ 5 и 6). Легко убедиться, что пространство  $W^k$  бесконечномерно. В самом деле, пусть  $p$  — любое натуральное число. Построим формы  $\omega_1, \dots, \omega_p$  степени  $k$  как-нибудь при соблюдении следующих двух условий:

1) форма  $\omega_j$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ) не равна тождественно нулю;

2) форма  $\omega_j$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ) равна нулю во всех точках, лежащих вне некоторой области  $U_j$ , причем области  $U_1, \dots, U_p$  попарно не пересекаются.

Тогда формы  $\omega_1, \dots, \omega_p$  линейно-независимы. Это очевидно, так как в силу двух указанных условий из соотношения

$$\lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_p \omega_p = 0,$$

непосредственно следует, что  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ .

п° 9. Если евклидово пространство  $E$  имеет размерность  $n$ , то определен набор бесконечномерных линейных пространств  $S^0, S^1, \dots, S^n$ , а также  $W^0, W^1, \dots, W^n$ . Согласно предыдущему  $S^k$  имеет в качестве своих элементов классы эквивалентности  $k$ -мерных цепей в  $E$ ; элементами  $W^k$  являются формы степени  $k$ . Если  $k > n$ , то  $W^k$  состоит только из одной формы, тождественно равной нулю. Отсюда следует, что  $S^k$  при  $k > n$  содержит только один класс эквивалентности, состоящий из нулевых цепей.

Замечание. Если  $C$  — некоторая  $k$ -мерная цепь, то мы позволим себе писать  $C \in S^k$  (хотя следовало бы писать  $C \in \{C\} \in S^k$ , где  $\{C\}$  — класс эквивалентности).

п° 10. Зафиксируем  $k$ , считая  $0 \leq k \leq n$ , и рассмотрим линейные пространства  $S^k$  и  $W^k$ . Пусть  $C \in S^k$ ,  $\omega \in W^k$ . Будем обозначать через  $(\omega, C)$  интеграл от формы  $\omega$  по цепи  $C$ :

$$(\omega, C) = \int_C \omega.$$

Имеем для любых  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\omega, \omega_1, \omega_2 \in W^k$ ,  $C, C_1, C_2 \in S^k$ :

$$1) \quad (\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2, C) = \alpha_1 (\omega_1, C) + \alpha_2 (\omega_2, C);$$

$$2) \quad (\omega, \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2) = \alpha_1 (\omega, C_1) + \alpha_2 (\omega, C_2).$$

Доказательство очевидно.

Далее:

3) Если  $(\omega, C) = 0$  для любой цепи  $C \in S^k$ , то  $\omega = 0$ .

Доказательство от противного. Пусть

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

и хотя бы один коэффициент этой формы в какой-нибудь точке отличен от нуля. Для определенности будем считать  $\omega_{1 \dots k}(x_0) > 0$ , где  $x_0$  — нулевая точка  $(0, \dots, 0)$ . Возьмем  $k$ -мерную координатную плоскость  $E^k: x^{k+1} = \dots = x^n = 0$  и обозначим через  $h$  стандартный куб в  $E^k$ , через  $c$  — преобразование подобия пространства  $E^k$  с центром  $x_0$  и с коэффициентом  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Имеем

$$c^* \omega = \omega_{1 \dots k}(\lambda x) \lambda^k dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k,$$

где  $x \in E^k$ . При достаточно малом  $\lambda$  для  $x \in h$  будет  $\omega_{1 \dots k}(\lambda x) > 0$ . Поэтому, беря цепь  $C = 1 \cdot c$ , получим

$$(\omega, C) = \int_h c^* \omega > 0,$$

что противоречит предположению.

4) Если  $(\omega, C) = 0$  для любой формы  $\omega \in W^k$ , то  $C = 0$ .

Последнее утверждение справедливо, поскольку именно так мы и определили равенство нулю  $k$ -мерной цепи.

п° 11. Свойства 1) и 2) означают билинейный характер функции  $(\omega, C)$ , свойства 3) и 4) означают ее невырожденность. Невырожденная билинейная функция  $(\omega, C)$  называется *сверткой* элементов  $\omega$  и  $C$  ( $\omega \in W^k$ ,  $C \in S^k$ ).



Пространства  $W^k$  и  $S^k$  называются *сопряженными* относительно свертки  $(\omega, C)$ ; см. § 2 главы I.

п° 12. Выше мы определили линейный оператор внешнего дифференцирования  $d$ . Именно, если  $\omega$  — внешняя дифференциальная форма степени  $k$ , то при известных условиях определен ее внешний дифференциал  $d\omega$ , который является внешней дифференциальной формой степени  $k+1$ . Если  $\omega \in W^k$ , то  $d\omega \in W^{k+1}$ . Таким образом, мы имеем отображение

$$d: W^k \rightarrow W^{k+1}. \quad (1)$$

Наряду с этим существует линейный оператор  $\partial$ , который с произвольной  $k$ -мерной цепью  $C$  сопоставляет некоторую  $k-1$ -мерную цепь  $\partial C$ , называемую *границей* цепи  $C$ . Если  $C \in S^k$ , то  $\partial C \in S^{k-1}$ . Таким образом, мы имеем отображение

$$\partial: S^k \rightarrow S^{k-1}. \quad (2)$$

Для удобства сравнения с соотношением (1) можно вместо (2) написать также

$$\partial: S^{k+1} \rightarrow S^k. \quad (3)$$

Согласно (1) и (3) операторы  $d$  и  $\partial$  действуют в сопряженных пространствах. Более того, эти операторы оказываются сопряженными. Именно, для любой формы  $\omega \in W^k$  и для любой цепи  $C \in S^{k+1}$  справедливо равенство

$$(d\omega, C) = (\omega, \partial C), \quad (4)$$

которое и означает сопряженность операторов  $d$  и  $\partial$ . Равенство (4) называется *формулой Стокса*. Мы докажем ее чуть позднее. Сначала определим границу цепи, т. е. оператор  $\partial$ .

### § 3. Граница цепи

п° 1. Прежде всего определим границу сингулярного куба, точнее, границу цепи  $C = 1 \cdot c$ , где  $c$  — сингулярный куб.

Пусть в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E$  задан  $k$ -мерный сингулярный куб  $c: h \rightarrow E$ , где  $h$ , как обычно, стандартный куб в  $\mathbb{R}^k$ . Буквой  $t$  мы по-прежнему обо-

значаем произвольную точку пространства  $\mathbb{R}^k$ :  $t = (t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k$ . Рассмотрим в  $\mathbb{R}^k$  координатную гиперплоскость, в которой лежат точки вида  $t = (t^1, \dots, t^{i-1}, 0, t^{i+1}, \dots, t^k)$ . Обозначим ее через  $\mathbb{R}_{i,0}^{k-1}$  и введем в ней координатную систему, в которой числа  $t^1, \dots, t^{i-1}, t^{i+1}, \dots, t^k$  суть координаты точки  $t \in \mathbb{R}_{i,0}^{k-1}$ . Тем самым  $\mathbb{R}_{i,0}^{k-1}$  становится  $k-1$ -мерным евклидовым пространством с данным координатным представлением. Одновременно в  $\mathbb{R}_{i,0}^{k-1}$  определится стандартный куб, который мы обозначим через  $h_{i,0}$ . Аналогичным образом рассмотрим гиперплоскость  $\mathbb{R}_{i,1}^{k-1}$ , содержащую точки вида  $t = (t^1, \dots, t^{i-1}, 1, t^{i+1}, \dots, t^k)$ ; в качестве координат  $t \in \mathbb{R}_{i,1}^{k-1}$  примем числа  $t^1, \dots, t^{i-1}, t^{i+1}, \dots, t^k$ . Определяемый при этом в  $\mathbb{R}_{i,1}^{k-1}$  стандартный куб обозначим через  $h_{i,1}$ . Ясно, что  $h_{i,0}, h_{i,1}$  есть пара противоположных  $k-1$ -мерных граней куба  $h$ . Обозначим через  $c_{i,0}$  и  $c_{i,1}$  отображение  $c: h \rightarrow E$ , суженное на грани  $h_{i,0}$  и  $h_{i,1}$ :

$$c_{i,0}: h_{i,0} \rightarrow E, \quad c_{i,1}: h_{i,1} \rightarrow E.$$

Таким путем одновременно с  $k$ -мерным сингулярным кубом  $c$  определены  $k-1$ -мерные сингулярные кубы  $c_{i,0}$  и  $c_{i,1}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ). Их можно назвать  $k-1$ -мерными гранями сингулярного куба  $c$ . Граница  $\partial c$  сингулярного куба  $c$  (точнее, цепи  $1 \cdot c$ ) определяется как  $k-1$ -мерная цепь, составленная из его  $k-1$ -мерных граней с коэффициентами по следующему правилу:

$$\partial c = \sum_{i=1}^k \{(-1)^i c_{i,0} + (-1)^{i+1} c_{i,1}\}.$$

(1)

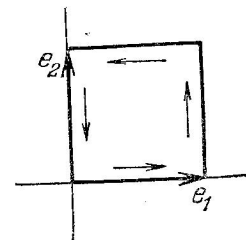


Рис. 1.

Если  $(-1)^i c_{i,0}$  и  $(-1)^{i+1} c_{i,1}$  назвать ориентированными ( $k-1$ -мерными) гранями сингулярного куба  $c$ , то можно сказать, что граница  $\partial c$  есть сумма ориентированных граней куба  $c$ . При  $k=2$  наглядная иллюстрация определения границы дается рис. 1, где ориентированные одномерные грани изображены в виде внутренних стрелок (на рис. 1 сингулярный куб  $c$  есть тождественное отображение стандартного куба  $h$  на себя). Говоря

о сингулярном кубе  $c$ , мы здесь всюду имеем в виду цепь  $1 \cdot c$  (как элемент линейного пространства  $S^k$ ). Для произвольной  $k$ -мерной цепи

$$C = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p \quad (2)$$

граница определяется формулой

$$\partial C = \lambda_1 \partial c_1 + \dots + \lambda_p \partial c_p. \quad (3)$$

п° 2. Из определения  $\partial C$  непосредственно следует, что для любых  $C_1, C_2 \in S^k$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\partial(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2) = \alpha_1 \partial C_1 + \alpha_2 \partial C_2.$$

Таким образом,  $\partial$  есть линейный оператор, отображающий  $S^k$  в  $S^{k-1}$ . Основные свойства оператора  $\partial$  будут изложены дальше (в частности, в § 4 будет показано, что равные цепи имеют равные границы).

#### § 4. Доказательство формулы Стокса для цепи

п° 1. Мы должны доказать формулу

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega, \quad (1)$$

где  $\omega \in W^{i-1}$ ,  $C \in S^k$ . Достаточно рассмотреть цепь  $C = 1 \cdot c$ , где  $c$  — некоторый  $k$ -мерный сингулярный куб в  $E$ . Мы имеем отображение  $c: h \rightarrow E$ ,  $h \subset \mathbb{R}^k$ . Как обычно, обозначим через  $t$  точку в  $\mathbb{R}^k$ :  $t = (t^1, \dots, t^k)$ . Поскольку  $\omega \in W^{k-1}$ , то

$$c^* \omega = a(t^1, \dots, t^k) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k + \dots, \quad (2)$$

где многоточие обозначает члены, содержащие  $dt^1$ . Положим

$$\omega^{(1)} = a(t^1, \dots, t^k) dt^2 \wedge \dots \wedge dt^k. \quad (3)$$

Аналогично обозначим через  $\omega^{(2)}, \dots, \omega^{(k)}$  остальные (обозначенные многоточием) члены в правой части (2) так, что  $\omega^{(i)}$  представляет собой некоторую функцию от  $t^1, \dots, t^k$ , умноженную на внешнее произведение

дифференциалов  $dt^1, \dots, dt^k$ , где пропущен сомножитель  $dt^i$ . Тогда взамен (2) получаем

$$c^* \omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots + \omega^{(k)}. \quad (4)$$

Согласно теореме § 6 главы II (см. п° 12)

$$c^*(d\omega) = d(c^* \omega) = d\omega^{(1)} + \dots + d\omega^{(k)}. \quad (5)$$

Напишем подробно  $d\omega^{(1)}$ :

$$d\omega^{(1)} = \frac{\partial a(t^1, \dots, t^k)}{\partial t^1} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^k. \quad (6)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_h d\omega^{(1)} &= \int_h \frac{\partial a(t^1, \dots, t^k)}{\partial t^1} dt^1 dt^2 \dots dt^k = \\ &= \int_{h_1} a(1, t^2, \dots, t^k) dt^2 \dots dt^k - \\ &\quad - \int_{h_1} a(0, t^2, \dots, t^k) dt^2 \dots dt^k, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $h_1$  — проекция куба  $h$  на координатную плоскость, содержащую оси  $Ot^2, \dots, Ot^k$  ( $h_1$  рассматривается как область интегрирования).

Равенству (7) можно придать вид

$$\int_h d\omega^{(1)} = (-1) \int_{h_{1,0}} \omega^{(1)} + (-1)^2 \int_{h_{1,1}} \omega^{(1)},$$

где  $h_{1,0}$  и  $h_{1,1}$  определены в предыдущем параграфе. В общем случае, как легко проверить,

$$\int_h d\omega^{(i)} = (-1)^{i-1} \left\{ (-1) \int_{h_{i,0}} \omega^{(i)} + (-1)^2 \int_{h_{i,1}} \omega^{(i)} \right\}. \quad (8)$$

Множитель  $(-1)^{i-1}$  появляется потому, что в общем случае в правой части формулы, аналогичной (6), на первом месте будет стоять  $dt^i$ ; его придется переместить на  $i$ -е место. Заметим, далее, что на  $h_{i,0}$  и на  $h_{i,1}$

(т. е. при  $dt^l = 0$ ) значения  $\omega^{(i)}$  и  $c^*\omega$  совпадают. Поэтому из (8)

$$\begin{aligned} \int_h d\omega^{(i)} &= (-1)^i \int_{h_{i,0}} c^*\omega + (-1)^{i+1} \int_{h_{i,1}} c^*\omega = \\ &= (-1)^i \int_{c_{i,0}} \omega + (-1)^{i+1} \int_{c_{i,1}} \omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (5) и (9)

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_h c^*(d\omega) = \sum_{i=1}^k \int_h d\omega^{(i)} = \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ (-1)^i \int_{c_{i,0}} \omega + (-1)^{i+1} \int_{c_{i,1}} \omega \right\} = \int_{\partial c} \omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее равенство в соотношениях (10) имеет место согласно формуле (1) § 3. Тем самым формула Стокса доказана для сингулярного куба. После этого она тривиально переносится на произвольную цепь.

п° 2. Из формулы Стокса сразу следует важное утверждение: *равные цепи имеют равные границы.*

Доказательство. Пусть  $k$ -мерные цепи  $C_1, C_2$  равны друг другу, пусть  $\omega$  — произвольная форма степени  $k-1$ . Так как  $C_2 = C_1$ , то

$$\int_{C_2} d\omega = \int_{C_1} d\omega.$$

Отсюда по формуле Стокса имеем

$$\int_{\partial C_2} \omega = \int_{\partial C_1} \omega.$$

Следовательно,  $\partial C_2 = \partial C_1$ .

## § 5. Оператор проектирования

п° 1. Пусть  $c: h \rightarrow E$  — какой-нибудь  $k$ -мерный сингулярный куб в  $E$ . Будем рассматривать  $h$  как стандартный куб в  $\mathbb{R}^k$ , считая при этом, что  $\mathbb{R}^k$  есть координатная гиперплоскость в  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Произвольную точку в  $\mathbb{R}^{k+1}$  запишем в виде  $\tilde{t} = (t^1, \dots, t^k, u)$ , стандартный куб в  $\mathbb{R}^{k+1}$  обозначим через  $\tilde{h}$ . В таком случае перво-

начально данный стандартный куб  $h$  в  $\mathbb{R}^k$  следует представлять себе в виде нижней грани куба  $\tilde{h}$  (при  $u=0$ ).

Возьмем в евклидовом пространстве  $E$  произвольную точку  $O$ . По данному сингулярному  $k$ -мерному кубу  $c$  и по данной точке  $O$  определим некоторым специальным образом  $k+1$ -мерный сингулярный куб  $\tilde{c}$ . Именно, если для произвольной точки  $t = (t^1, \dots, t^k, 0) \in h$  дано  $x = c(t) \in E$ , то для произвольной точки  $\tilde{t} = (t^1, \dots, t^k, u) \in \tilde{h}$  мы определим  $\tilde{x} = \tilde{c}(\tilde{t})$  равенством

$$O\tilde{x} = (1-u)Ox,$$

где  $Ox$  — вектор в  $E$ , идущий из точки  $O$  в точку  $x$ . Заметим, что при отображении  $\tilde{c}$  вся верхняя грань куба  $\tilde{h}$  (определяемая равенством  $u=1$ ), отображается в одну точку  $O$ .

Будем говорить, что  $k+1$ -мерный сингулярный куб  $\tilde{c}$  проектирует из точки  $O$  данный  $k$ -мерный сингулярный куб  $c$ ; будем обозначать  $\tilde{c}$  также символом  $O \times c$ .

Пусть дана  $k$ -мерная цепь

$$C = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p. \quad (1)$$

Будем говорить, что  $k+1$ -мерная цепь

$$\tilde{C} = \lambda_1 \tilde{c}_1 + \dots + \lambda_p \tilde{c}_p \quad (2)$$

проектирует из точки  $O$  данную  $k$ -мерную цепь  $C$ ; будем обозначать  $\tilde{C}$  также символом  $O \times C$ .

п° 2. Имеет место следующая теорема:

Если

$$C_2 = C_1 \quad (C_1, C_2 \in S^k),$$

то

$$O \times C_2 = O \times C_1.$$

Иначе говоря, равные цепи проектируются равными цепями.

Из определения  $O \times C$  с помощью равенств (1) и (2) следует, что

$$O \times (C_1 + C_2) = O \times C_1 + O \times C_2 \quad (3)$$

и

$$O \times (aC) = a(O \times C), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Ввиду этих соотношений сформулированная теорема равносильна следующему утверждению: если  $C = 0 \in S^k$ ,

то  $O \times C = \theta \in S^{k+1}$ , т. е. если  $C$  является  $k$ -мерной нулевой цепью, то  $O \times C$  будет  $k+1$ -мерной нулевой цепью.

Замечание. Не следует думать, что последнее утверждение вытекает из равенства (4) при  $\alpha = 0$ . В самом деле, чтобы воспользоваться равенством (4), нужно в его левой части произвольную  $k$ -мерную нулевую цепь  $\theta$  заменить цепью  $0 \cdot C$ , которая равна  $\theta$ . Но то, что после этой замены левая часть (4) будет равна своему первоначальному значению, как раз и требуется доказать.

° 3. Доказательство теоремы будет проведено после некоторых предварительных конструкций. Прежде всего введем в  $E$  декартовы координаты с начальной точкой  $O$ . Тогда отображения  $c$  и  $\tilde{c}$  представятся в координатах:

$$c: \left\{ \begin{array}{l} x^1 = c^1(t^1, \dots, t^k), \\ \dots \\ x^n = c^n(t^1, \dots, t^k), \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\tilde{c}: \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^1 = (1-u)c^1(t^1, \dots, t^n), \\ \dots \\ \tilde{x}^n = (1-u)c^n(t^1, \dots, t^n). \end{array} \right.$$

Рассмотрим произвольную форму степени  $k+1$ :

$$\omega^{k+1} = * \sum \omega_{i_1 \dots i_{k+1}}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Нам достаточно показать, что если  $C$  — нулевая  $k$ -мерная цепь и  $\tilde{C} = O \times C$ , то

$$\int_{\tilde{C}} \omega^{k+1} = 0.$$

К этому и будут направлены наши выкладки. Чтобы упростить запись дальнейших соотношений, возьмем сначала в качестве  $\omega^{k+1}$  форму одночленного вида

$$\omega^{k+1} = g(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Здесь

$$g(x) = g(x^1, \dots, x^n).$$

Положим

$$g(x, u) = g((1-u)x^1, \dots, (1-u)x^n)$$

и рассмотрим форму  $\omega^k(u)$  степени  $k$ , которая зависит от параметра  $u$  и определяется равенством

$$\omega^k(u) = g(x, u) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge e^{i_{k+1}}(x), \quad (6)$$

где  $e^{i_{k+1}}$  — известная нам базисная форма в касательном пространстве точки  $x$ . Запись  $e^{i_{k+1}}$  вместо символа  $dx^{i_{k+1}}$  означает, что при подсчете внешнего произведения  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge e^{i_{k+1}}(x)$  последний сомножитель берется на векторе, который равен радиус-вектору точки  $x$ . Полное объяснение этой записи дает формула (2) § 13 главы I, согласно которой

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge e^{i_{k+1}}(x) =$$

$$= (-1)^k \{ (dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}) x^{i_1} -$$

$$- (dx^{i_1} \wedge dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}) x^{i_2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^k (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) x^{i_{k+1}} \}. \quad (7)$$

Здесь  $(\dots, x^{i_1}, \dots, x^{i_{k+1}}, \dots)$  — координаты радиус-вектора точки  $x$  (те самые координаты, которые являются аргументами функции  $g(x^1, \dots, x^n)$ ). Введем для произвольного  $k$ -мерного сингулярного куба  $c$  функцию

$$f_c(u) = (\omega^k(u), c) = \int_c \omega^k(u). \quad (8)$$

Покажем, что имеет место равенство

$$(\omega^{k+1}, O \times c) = - \int_0^1 (1-u)^k f_c(u) du. \quad (9)$$

Из него мы легко получим интересующую нас теорему. Имеем

$$(\omega^{k+1}, O \times c) = \int_{O \times c} \omega^{k+1} = \int_{\tilde{h}} \tilde{c}^* \omega^{k+1} =$$

$$= \int_{\tilde{h}} g(\tilde{c}(\tilde{t})) \det \left( \frac{\tilde{x}^{i_1}, \dots, \tilde{x}^{i_k}, \tilde{x}^{i_{k+1}}}{t^1, \dots, t^k, u} \right) dt^1 \dots dt^k du. \quad (10)$$

Из формул (5)

$$\det \left( \frac{\tilde{x}^{i_1}, \dots, \tilde{x}^{i_k}, \tilde{x}^{i_{k+1}}}{t^1, \dots, t^k, u} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} (1-u) \frac{\partial c^{i_1}}{\partial t^1} & \dots & (1-u) \frac{\partial c^{i_1}}{\partial t^k} & (-1) c^{i_1} \\ (1-u) \frac{\partial c^{i_2}}{\partial t^1} & \dots & (1-u) \frac{\partial c^{i_2}}{\partial t^k} & (-1) c^{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-u) \frac{\partial c^{i_{k+1}}}{\partial t^1} & \dots & (1-u) \frac{\partial c^{i_{k+1}}}{\partial t^k} & (-1) c^{i_{k+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-u)^k (-1)^k \left\{ c^{i_1} \det \left( \frac{c^{i_2}, \dots, c^{i_{k+1}}}{t^1, \dots, t^k} \right) - \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^k c^{i_{k+1}} \det \left( \frac{c^{i_1}, \dots, c^{i_k}}{t^1, \dots, t^k} \right) \right\}. \quad (11)$$

Отсюда и из (10)

$$(\omega^{k+1}, O \times c) = - \int_0^1 (1-u)^k \times$$

$$\times \left[ \int_C (-1)^k \{ g(x, u) x^{i_1} (dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}) - \dots \} \right] du. \quad (12)$$

В правой части (12) мы написали внутри фигурных скобок только один член. Остальные легко получаются из (11); легко усмотреть, что внутри фигурных скобок находится правая часть (7), умноженная на  $g(x, u)$ . Таким образом, равенство (9) вытекает из (7) и (12).

Вернемся к случаю, когда  $\omega^{k+1}$  — произвольная форма степени  $k+1$ . Положим

$$\omega^k(u) =$$

$$= * \sum \omega_{i_1 \dots i_{k+1}}(x, u) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge e^{i_{k+1}}(x), \quad (13)$$

где  $\omega_{i_1 \dots i_{k+1}}(x, u) = \omega_{i_1 \dots i_{k+1}}((1-u)x)$  и снова определим  $f_c(u)$  по формуле (8), беря теперь в качестве  $\omega^k(u)$  выражение (13). Формула (9) сохранит силу. Это ясно, поскольку левая часть (9) линейна относительно  $\omega^{k+1}$ ,

а правая — относительно  $\omega^k(u)$ . Рассмотрим цепь

$$C = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p.$$

Введем функции

$$\left. \begin{aligned} f_{c_j}(u) &= \int_{c_j} \omega^k(u), \\ f(u) &= \lambda_1 f_{c_1}(u) + \dots + \lambda_p f_{c_p}(u) = \\ &= \int_C \omega^k(u) = (\omega^k(u), C). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Тогда из (3), (4) и (9) имеем

$$(\omega^{k+1}, O \times C) = \lambda_1 (\omega^{k+1}, O \times c_1) + \dots + \lambda_p (\omega^{k+1}, O \times c_p) =$$

$$= -\lambda_1 \int_0^1 (1-u)^k f_{c_1}(u) du - \dots - \lambda_p \int_0^1 (1-u)^k f_{c_p}(u) du =$$

$$= - \int_0^1 (1-u)^k f(u) du. \quad (15)$$

п° 4. Докажем теорему п° 2 во второй формулировке.

Пусть  $C$  — нулевая  $k$ -мерная цепь. Возьмем произвольно  $\omega^{k+1}$ . Из (14) имеем  $f(u) = 0$  при любом  $u$ ,  $0 \leq u \leq 1$  (поскольку  $C$  — нулевая). Отсюда и из (15) имеем  $(\omega^{k+1}, O \times C) = 0$ . Следовательно,  $O \times C$  — нулевая  $k+1$ -мерная цепь. Теорема доказана.

п° 5. Положим

$$\Pi(C) = (-1)^{k+1} (O \times C). \quad (16)$$

Из равенств (3), (4) и из только что доказанной теоремы следует, что  $\Pi(C)$  есть линейный оператор, определенный на всех  $k$ -мерных цепях, зависящий от выбора точки  $O$ . Его значением является  $k+1$ -мерная цепь, которая разве лишь знаком отличается от проектируемой цепи  $O \times C$ . Таким образом,

$$\text{II: } S^k \rightarrow S^{k+1}.$$

Заметим, что  $S^k$  и  $S^{k+1}$  по точному смыслу своего определения имеют в качестве элементов не цепи, а классы их эквивалентности. Поэтому (довольно длинное) доказательство теоремы п° 2 играет фундаментальную роль для определения оператора  $\Pi$ . Только на

основании этой теоремы  $\Pi$  определен как оператор, отображающий  $S^k$  в  $S^{k+1}$ . Мы назовем линейный оператор  $\Pi$  оператором проектирования.

п° 6. Имеет место следующее тождество:

$$C = \partial\Pi(C) + \Pi(\partial C), \quad (17)$$

где  $\partial$  — оператор, который дает границу цепи.

Доказательство с очевидностью усматривается для одного сингулярного куба  $c$ . В самом деле, применяя обозначения § 3 этой главы, получаем по формуле (1) § 3:

$$\partial(O \times c) = \sum_{i=1}^{k+1} \{(-1)^i \bar{c}_{i,0} + (-1)^{i+1} \bar{c}_{i,1}\}, \quad (18)$$

где при  $i = 1, 2, \dots, k$

$$\bar{c}_{i,0} = O \times c_{i,0}, \quad \bar{c}_{i,1} = O \times c_{i,1}.$$

При  $i = k+1$  имеем  $\bar{c}_{k+1,0} = c$  (т. е. первоначально данный  $k$ -мерный сингулярный куб), а  $\bar{c}_{k+1,1}$  представляет собой нулевой  $k$ -мерный куб. Таким образом, из формулы (18) с учетом (3) и (4) следует, что

$$\begin{aligned} \partial(O \times c) &= \\ &= \sum_{i=1}^k \{(-1)^i (O \times c_{i,0}) + (-1)^{i+1} (O \times c_{i,1})\} + (-1)^{k+1} c = \\ &= O \times \partial c + (-1)^{k+1} c. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь, если дана произвольная цепь

$$C = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p,$$

то из (19) стандартным образом получаем для цепи

$$\partial(O \times C) = O \times \partial C + (-1)^{k+1} C. \quad (20)$$

Поскольку

$$\partial\Pi(C) = (-1)^{k+1} \partial(O \times C), \quad \Pi(\partial C) = (-1)^k \{O \times \partial C\},$$

то (17) доказано как следствие (20) и (16).

п° 7. Теперь мы введем в рассмотрение некоторый линейный оператор

$$I: W^{k+1} \rightarrow W^k,$$

который во многих отношениях аналогичен оператору  $\Pi$ .

Именно, пусть во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$  дана форма  $\omega \in W^{k+1}$ . Как и раньше, рассмотрим зависящую от па-

раметра  $u$  форму  $\omega^k(u) \in W^k$ , определяемую равенством (13). Оператор  $I$  задается формулой

$$I(\omega) = (-1)^k \int_0^1 (1-u)^k \omega^k(u) du. \quad (21)$$

Согласно этому определению  $I(\omega)$  есть внешняя форма в  $\mathbb{R}^n$  степени  $k$  ( $I(\omega) \in W^k$ ).

Замечание. Для определения  $I(\omega)$  нет необходимости иметь  $\omega$  во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ ; достаточно, чтобы форма  $\omega$  была задана в какой-нибудь области, звездной относительно точки  $O$  (поскольку  $\omega^k(u)$  определяется по лучам, исходящим из точки  $O$ ). В такой области будут верны и дальнейшие выводы.

п° 8. Теорема. Операторы  $\Pi$  и  $I$  являются сопряженными.

В самом деле, имеем для цепи  $C \in S^k$  и для  $\omega \in W^{k+1}$

$$\begin{aligned} (I(\omega), C) &= \int_C I(\omega) = (-1)^k \int_0^1 \left\{ (1-u)^k \int_C \omega^k(u) \right\} du = \\ &= (-1)^k \int_0^1 (1-u)^k f(u) du. \end{aligned} \quad (22)$$

Но по формуле (9)

$$(\omega, O \times C) = - \int_0^1 (1-u)^k f(u) du.$$

Отсюда

$$(I(\omega), C) = (-1)^{k+1} (\omega, O \times C). \quad (23)$$

Из (22) и (16) имеем для любых  $\omega \in W^{k+1}$ ,  $C \in S^k$

$$(I(\omega), C) = (\omega, \Pi(C)), \quad (24)$$

что и означает сопряженность операторов

$$\Pi: S^k \rightarrow S^{k+1}, \quad I: W^{k+1} \rightarrow W^k.$$

п° 9. Вследствии (24) следующие два тождества равносильны:

$$C = \partial\Pi(C) + \Pi(\partial C), \quad (25)$$

$$\omega = dI(\omega) + I(d\omega). \quad (26)$$

Так как тождество (25) уже доказано, выведем из него тождество (26).

Доказательство тождества (26). Имеем согласно (24) для любой цепи  $C \in S^{k+1}$  и для любой формы  $\omega \in W^{k+1}$

$$(I(d\omega), C) = (d\omega, \Pi(C)).$$

Отсюда и по формуле Стокса

$$(I(d\omega), C) = (\omega, \partial\Pi(C)). \quad (27)$$

Далее

$$(dI(\omega), C) = (I(\omega), \partial C) = (\omega, \Pi(\partial C)). \quad (28)$$

Из (27) и (28)

$$(\omega - dI(\omega) - I(d\omega), C) = (\omega, C - \Pi(\partial C) - \partial\Pi(C)).$$

Правая часть этого равенства равна нулю в силу (25). Отсюда и вследствие произвольности  $C \in S^{k+1}$  получаем (26).

## § 6. Теорема Пуанкаре и некоторые другие предложения

п° 1. Теорема. Для любой цепи  $C \in S^k$  граница цепи есть нулевая цепь:

$$\partial C = \theta \in S^{k-2}.$$

Доказательство. Возьмем произвольно  $\omega \in W^{k-2}$ . Имеем по формуле Стокса

$$(\omega, \partial C) = (d\omega, C) = (d d\omega, C) = 0,$$

поскольку  $d d\omega = 0$ . Теорема доказана.

Замечание. В случае трехмерного стандартного куба эта теорема иллюстрируется рис. 2.

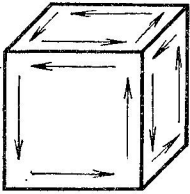


Рис. 2.

п° 2. Определение. Цепь  $C \in S^k$  называется замкнутой цепью или циклом, если  $\partial C = \theta$  ( $\theta$  — нулевая цепь в  $S^{k+1}$ ).

Теорема. Каждая граница есть цикл.

Доказательство. Пусть  $C' = \partial C$ . Тогда

$$\partial C' = \partial \partial C = \theta.$$

п° 3. Определение. Цикл называется гомологичным нулю, если он является границей.

Теорема. В евклидовом пространстве каждый цикл гомологичен нулю.

Доказательство. Пусть  $\partial C = \theta$ . Тогда из формулы (25) § 5 имеем

$$C = \partial\Pi(C),$$

т. е. цикл  $C$  гомологичен нулю, поскольку он является границей цепи  $\Pi(C)$ .

п° 4. Определение. Форма  $\omega \in W^k$  называется замкнутой формой, или коциклом, если  $d\omega = 0$ .

Определение. Форма  $\omega \in W^k$  называется точной формой, или формой, когомологичной нулю, если она является внешним дифференциалом некоторой формы.

Теорема (Пуанкаре). В евклидовом пространстве всякая замкнутая форма является точной.

Доказательство. Пусть  $d\omega = 0$ . Тогда из формулы (26) § 5 имеем  $\omega = d\mu$ , где  $\mu = I(\omega)$ .

Замечание. Можно сказать, что в евклидовом пространстве замкнутая форма  $\omega \in W^k$  имеет потенциал

$$\mu = I(\omega) \in W^{k-1}.$$

Замечание. Мы имеем сопряженные отображения:

$$\partial: S^{k+1} \rightarrow S^k, \quad d: W^k \rightarrow W^{k+1}.$$

Можно, однако, написать более содержательные соотношения:

$$\partial: S^{k+1} \rightarrow C(S^k), \quad (1)$$

$$d: W^k \rightarrow C(W^{k+1}), \quad (2)$$

где  $C(S^k)$  — линейное подпространство циклов в  $S^k$ ,  $C(W^{k+1})$  — линейное подпространство замкнутых форм в  $W^{k+1}$ . Теорема Пуанкаре и предыдущая ей теорема утверждают, что оба отображения в евклидовом пространстве сюръективны (являются отображениями «на»). Утверждение Пуанкаре и приведенное доказательство остаются в силе, если объекты даны в звездной области евклидова пространства (не обязательно во всем евклидовом пространстве).

п° 5. Теорема. В евклидовом пространстве интеграл от замкнутой формы степени  $k$  по любому  $k$ -мерному циклу равен нулю.

Доказательство. Пусть  $\omega \in W^k$ ,  $C \in S^k$  и  $d\omega = 0$ ,  $\partial C = \theta$ . Так как  $\partial C = \theta$ , то по теореме п° 3 найдется цепь  $\tilde{C}$  такая, что  $C = d\tilde{C}$ . Тогда по теореме Стокса имеем

$$(\omega, C) = (\omega, d\tilde{C}) = (d\omega, \tilde{C}) = 0,$$

поскольку  $d\omega = 0$ .

З а м е ч а н и е. Доказательство можно провести также с помощью теоремы Пуанкаре. Именно, так как  $d\omega = 0$ , то найдется форма  $\tilde{\omega}$  такая, что  $\omega = d\tilde{\omega}$ . Тогда

$$(\omega, C) = (d\tilde{\omega}, C) = (\tilde{\omega}, \partial C) = 0,$$

поскольку  $\partial C = \theta$ .

## § 7. Регулярное погружение. Комбинаторная поверхность

п° 1. *Регулярным погружением*  $k$ -мерного стандартного куба  $h$  ( $h \subset \mathbb{R}^k$ ) в пространство  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq k$ , называется отображение

$$\varphi: h \rightarrow \mathbb{R}^n$$

при условии, что производная отображения  $\varphi$  во всех точках куба  $h$  имеет ранг  $= k$ . Регулярное погружение  $\varphi$  ( $h \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) мы будем называть также *регулярным кубом* в  $\mathbb{R}^n$ .

Очевидно, что регулярный куб является частным случаем сингулярного. Поэтому к регулярным кубам применимы все понятия и утверждения, высказанные в предыдущих параграфах.

п° 2. Пусть дано гладкое отображение  $\varphi: h \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $H$  образ куба  $h$  в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $t$  — произвольная точка куба  $h$ ,  $x = \varphi(t)$  — ее образ. Не исключено, что имеется еще точка  $t' \in h$ , отличная от точки  $t$ , образ которой также есть точка  $x$  (не исключено, что имеется даже бесконечное множество таких точек). Иначе говоря, не исключено, что отображение куба  $h$  на его образ  $H$  не является взаимно однозначным. Это обстоятельство в равной мере относится и к случаю, когда  $\varphi: h \rightarrow \mathbb{R}^n$  есть сингулярный куб, и к случаю регулярного куба. Ввиду этого обстоятельства ни сингулярный, ни регулярный куб нельзя определять как образ  $H$  ( $H = \varphi(h)$ ); и тот и другой определяются как отображение  $h$  на  $H$  (с последующим установлением условий, при которых два отображения  $h \rightarrow H$  и  $h_1 \rightarrow H$

считаются одним и тем же сингулярным или одним и тем же регулярным кубом.

Допустим, что отображение  $\varphi: h \rightarrow \mathbb{R}^n$  является регулярным кубом. В этом случае любая точка  $t \in h$  имеет окрестность  $U_t$ , которая отображается на свой образ в  $\mathbb{R}^n$  взаимно однозначно. Таким образом, куб  $h$  локально гомеоморфно отображается на свой образ  $H$ .

п° 3. При  $k = 1$  регулярный или сингулярный куб называют *ориентированной дугой* (т. е. направленной дугой, соответственно регулярной или сингулярной).

Ориентированная дуга  $c$  есть гладкое отображение в  $\mathbb{R}^n$  ориентированного отрезка  $h$ . Если дуга  $c$  регулярна, то отображение локально гомеоморфно и образ  $h$  не имеет локальных особенностей (точек возврата, угловых точек и т. п.). Однако в целом отображение может не быть гомеоморфным, т. е. для образа возможны самопересечения. Например, возможна картина, которая изображена на рис. 3. Здесь  $t_1$  и  $t_2$  — две точки отрезка  $h$ , которые отображаются в одну точку  $x$ ; вместе с тем каждая из точек  $t_1, t_2$  имеет окрестность, которая отображается на свой образ взаимно однозначно. На рис. 3 эти окрестности в их образы изображены жирными линиями.

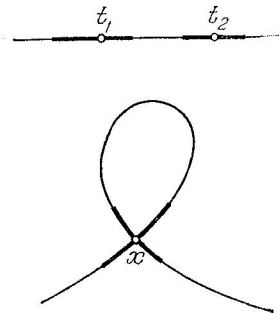


Рис. 3.

п° 4. Важный пример сингулярного куба при  $k = 2$ ,  $n = 2$  дает отображение

$$x = ar \cos b\theta, \quad y = ar \sin b\theta,$$

считая, что куб (квадрат)  $h$  задан в осях  $Or, O\theta$  неравенствами  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 1$  (рис. 4). Здесь мы имеем именно сингулярный куб, поскольку вся сторона  $r = 0$  отображается в одну точку  $(0, 0)$  плоскости  $(x, y)$ . Образом  $h$  в плоскости  $(x, y)$  является круговой сектор  $H$ ; внутренние стрелки на  $h$  и на  $H$  указывают ориентацию границы рассматриваемого сингулярного куба (квадрата, поскольку  $k = 2$ ).

Заметим, что получить круговой сектор в качестве образа регулярного куба невозможно. Тем самым уже этот пример поясняет целесообразность рассмотрения сингулярных кубов.



п° 5. Мы подробно изложили интегрирование формы по цепи. В задачах анализа, однако, интегрируют также по кривой или по поверхности (что можно не различать, имея в виду  $k$ -мерную поверхность). Для конкретных задач анализа (и его приложений) может быть достаточно понятие, которое мы назовем *комбинаторной*

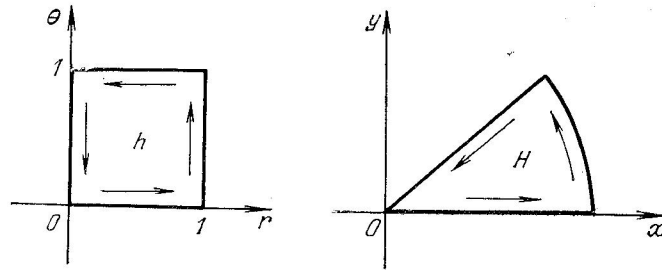


Рис. 4.

поверхностью. Ее можно рассматривать как частный случай цепи с коэффициентами  $\pm 1$ , сингулярные кубы которой не как угодно набросаны в пространстве, а приложены друг к другу с соблюдением некоторых

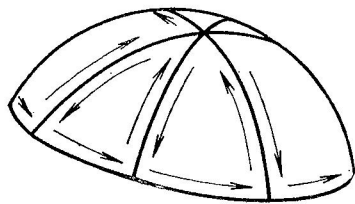


Рис. 5.

условий. Мы не станем перечислять эти условия и ограничимся отсылкой читателя к рис. 5. На рис. 5 изображена двумерная поверхность с краем; будем ее представлять себе как некоторый сферический сегмент  $H$ . Он составлен из шести сферических треугольников, которые мы представим себе в качестве образов шести двумерных сингулярных кубов:  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  (см. п° 4). Стрелки показывают ориентацию их границ. Для каждого  $c_j$  граница состоит из двух внутренних одномерных граней (к каждой из которых примыкает соседний сингулярный куб) и одной краевой одномерной грани (вдоль которой соседнего куба нет). Рассмотрим цепь

$$C = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_6 c_6,$$

считая  $\lambda_j = \pm 1$ . Существенно следующее обстоятельство: судя по рисунку, в данном случае  $\lambda_j$  можно выбрать так, что все внутренние одномерные грани попарно уничтожатся. Именно так будет, например, при  $\lambda_j = 1$ . Тогда граница  $C$  будет одномерной цепью

$$\partial C = \lambda_1 \partial c_1 + \dots + \lambda_6 \partial c_6,$$

образ которой есть край  $H$  (с заданной ориентацией, показанной стрелками). В таком случае мы скажем, что цепь  $C$  есть комбинаторная поверхность, представляющая сегмент  $H$ . Если в пространстве дана 2-форма  $\omega$ , то в качестве интеграла от  $\omega$  по поверхности  $H$  примем интеграл от  $\omega$  по представляющей  $H$  комбинаторной поверхности, т. е. по цепи  $C$ .

Однако ясно, что наряду с  $\lambda_j = +1$  в равной мере пригодны  $\lambda_j = -1$  (при всех  $j$ ). Таким образом,  $H$  представляется также комбинаторной поверхностью  $-C$ . Таким образом, интеграл от  $\omega$  по  $H$  определен с точностью до знака. Выбор  $C$  или  $-C$  есть выбор ориентации  $H$ ; после этого выбора интеграл определен вполне, поскольку при любом другом выборе  $\lambda_j = \pm 1$  не будет происходить попарного уничтожения всех внутренних одномерных граней кубов  $c_j$ . Следовательно, при данном наборе  $c_1, \dots, c_6$  существуют только две комбинаторные поверхности, представляющие сегмент  $H$ :  $C$  и  $-C$ . К сожалению, так обстоит дело лишь для заданного набора сингулярных кубов. Возможно бесконечное множество других наборов других сингулярных кубов в любом числе, с помощью которых  $H$  также можно представить в виде комбинаторной поверхности. Можно обойтись, например, всего одним сингулярным кубом. Но доказать, что во всех этих случаях мы будем получать с точностью до знака одно и то же значение интеграла формы  $\omega$ , трудно даже в частном примере сферического сегмента  $H$ . Для общего изложения теории интеграла формы по поверхности проще оказывается другой путь, идущий через понятие многообразия (см. [1]); см. также [2] — [4].

п° 6. В заключение еще несколько слов по поводу одного класса в некотором смысле элементарных поверхностей. Обычно именно их имеют в виду в элемен-

тарном анализе, когда рассматривают интеграл по поверхности.

Пусть  $H = c(h)$  — образ в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E$  некоторой области  $h \subset \mathbb{R}^k$ ,  $k \leq n$ , при отображении  $c: \mathbb{R}^k \rightarrow E$ . Обозначая здесь и далее той же буквой  $c$  сужение  $c$  на  $h$ , предположим, что отображение  $c: h \rightarrow H$  взаимно однозначно. При этом условии мы можем  $H$  назвать  $k$ -мерной поверхностью в  $E$ . Заметим, что на этот раз буква  $h$  обозначает не стандартный куб, а произвольную область в  $\mathbb{R}^k$ . Поэтому класс поверхностей, о котором идет речь, довольно широк (но, конечно, не исчерпывает всего, что называют  $k$ -мерными поверхностями в  $E$ ).

Пусть в  $E$  в окрестности  $H$  задана внешняя форма  $\omega$  степени  $k$ . Для простоты записи будем считать, что  $\omega$  имеет в  $E$  одночленное координатное представление с коэффициентом  $G$ . Тогда мы можем определить интеграл от  $\omega$  по  $H$  так же, как в свое время определяли интеграл по сингулярному кубу. Именно,

$$\int_H \omega = \int_h c^* \omega = \int_h (G \circ c) \det c'. \quad (1)$$

Мы сохранили обозначения, которые применялись в § 1, п° 8, главы III (см. формулу (13)); изменен только смысл  $h$ . Справа в (1)  $h$  обозначает область  $k$ -кратного интегрирования в  $\mathbb{R}^k$ .

Естественно поставить вопрос об инвариантности этого определения: если  $H = c_1(h_1)$ , где  $c_1, h_1$  — другое отображение и другая область, подчиненные тем же условиям, что  $c$  и  $h$ , будет ли

$$\int_{h_1} c_1^* \omega = \int_h c^* \omega \quad (2)$$

верным равенством? На этот вопрос можно ответить утвердительно, если  $c_1$  и  $c$  имеют одинаковую ориентацию относительно  $\mathbb{R}^k$ , именно, если композиция  $c_1^{-1} \circ c$  имеет производную с положительным определителем. (Напомним, что  $c$  и  $c_1$  обозначают отображения, суженные

на  $h$  и  $h_1$ .) В этом случае

$$\begin{aligned} \int_{h_1} c_1^* \omega &= \int_{h_1} (G \circ c_1) \det c'_1 = \\ &= \int_h (((G \circ c_1) \det c'_1) \circ (c_1^{-1} \circ c)) ((\det c'_1)^{-1} \circ (c_1^{-1} \circ c)) \det c' = \\ &= \int_h (G \circ c) \det c' = \int_h c^* \omega. \end{aligned}$$

Тем самым равенство (2) доказано.

Если пренебречь условием насчет ориентации, то интеграл будет определен с точностью до знака.

1. Ж. де Рам. Дифференцируемые многообразия. М., ИЛ, 1956.
2. С. М., Никольский. Курс математического анализа, т. II, М., «Наука», 1973.
3. С. Спивак. Математический анализ на многообразиях. М., «Мир», 1968.
4. Ф. Фам. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М., «Мир», 1970.
5. Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., «Наука», 1974.
6. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974.
7. Э. Картан. Риманова геометрия в ортогональном репере. М., МГУ, 1960.
8. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. — Л., Гостехиздат, 1948.
9. В. Бляшке. Введение в дифференциальную геометрию. М., Гостехиздат, 1957.
10. Х. Уитни. Геометрическая теория интегрирования. М., ИЛ, 1960.
11. П. К. Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. — Л., Гостехиздат, 1947.

Альтернатор 6  
 Альтернация полилинейной  
 формы 15  
 — тензора 20

Базис 8  
 Базисы взаимные 9  
 — дуальные 9

Вектор 29, 30  
 — ковариантный 13  
 —, приложенный к точке 30  
 Выражение внешней формы координатное 26  
 Вычисление одночленных форм 25

Граница цепи 64  
 Грань ( $k-1$ )-опорная 65  
 — — ориентированная 65

Дивергенция поля 42  
 Дифференциал внешний 34  
 — полилинейной формы 36  
 —  $k$ -формы внешний 37  
 — функции 35

Дуга направленная 79  
 — ориентированная 54, 79

Изменение параметризации 56  
 Индекс свободный 6  
 — суммирования 5  
 Интеграл от внешней дифференциальной  $k$ -формы 53  
 — — — формы 51  
 — по кубу 51

Ковектор 13, 35  
 Конец вектора 30  
 Координаты тензора 14  
 Коцикл 77  
 Куб регулярный 78  
 — сингулярный 52  
 — —  $k$ -мерный 52  
 — — нульмерный 53  
 — стандартный 51

Метрика 30  
 Множество действительных чисел 7

Начало вектора 30

Оператор проектирования 68, 74  
 Параллелизм векторов абсолютный 30  
 Параметры 57  
 Перенесение параллельное 30  
 Поверхность комбинаторная 80  
 Погружение регулярное 78  
 Поток вектора 33  
 Преобразование внешней формы 27  
 Произведение внешнее 20, 21  
 — — базисных форм 22  
 — — внешних форм 20, 21  
 — скалярное 29  
 — тензорное 13  
 — — пространств 13  
 Производная 34  
 Пространства сопряженные 8, 64  
 — — линейные 7  
 Пространство внешних форм 23  
 — касательное 29, 30  
 — кокасательное 30, 35  
 — линейное 12  
 — полилинейных форм 12  
 Равенство векторов 30  
 Разложение внешних форм 23  
 — полилинейной формы 14  
 Ротация вектора 41  
 Свертка 7, 64  
 Свойства альтернации 15  
 — внешнего дифференциала 38  
 — — произведения 21—22  
 — косоугольной формы 17  
 — тензорного произведения 13  
 Символ Кронекера 7  
 Степень внешней формы 20  
 Сумма 5  
 — формальная 58  
 Тензор 13  
 — валентности  $k$  ( $k$ -тензор) 13, 15  
 — ковариантный 13, 15  
 — контравариантный 13  
 — косоугольный 24  
 — нулевой валентности 13  
 Теорема Пуанкаре 77  
 Точка 29, 30  
 Форма ( $k$ -форма) 20  
 — внешняя 16  
 — — дифференциальная 31  
 — дифференциальная 31  
 —, дифференцируемая в области 37  
 — замкнутая 77  
 —, когомологичная нулю 77  
 — координатная 32  
 — косая 16  
 — линейная 9  
 — полилинейная 11  
 — проектирующая 32  
 — точная 77  
 Формула Грина 41  
 — Стокса 14  
 — — общая 42  
 Функции проектирующие 36  
 Функция, дифференцируемая в точке 34  
 Цепи равные 60  
 Цепь замкнутая 76  
 —  $k$ -мерная 59  
 — нулевая  $k$ -мерная 60  
 — одномерная 58  
 Цикл 76  
 —, гомологичный нулю 76  
 Элемент нулевой 7

$\otimes$  13  
 $\wedge$  21  
 $Df(x)$  34  
 $E$  29  
 $R$  7  
 $T_x$  29

$\delta_j^i$  7  
 $\delta_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$  6  
 $\theta$  7  
 $T^k$  13  
 $T^k(L)$  13  
 $\omega$  31

*Николай Владимирович Ефимов*  
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВНЕШНИХ ФОРМ

М., 1977 г., 88 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Е. А. Белицкая, Л. С. Сомова*

Сдано в набор 1.09.1976 г. Подписано к печати 6.01.1977 г.  
Бумага 84×108<sup>1/32</sup> тип. № 1. Физ. печ. л. 2,75. Усл. печ. л. 4,62.  
Уч.-изд. л. 4,17. Тираж 24 000 экз. Т-03406.  
Цена книги 15 коп. Заказ № 297.

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете  
Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли.  
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29