Российская Академия Наук
Институт философии

МЕТАВСЕЛЕННАЯ, ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ

Москва
2013

А.Д. Панов

Природа математики, космология и структура реальности: физические основания математики

Введение

Данная статья является прямым продолжением статьи[1], которую ниже мы будем называть *первой статьей*. В ней мы рассмотрели аргументы в пользу того, что объекты математики обладают вполне независимым собственным существованием до и независимо от того, были они кем-то выдуманы или открыты или нет. По нашему мнению, эти аргументы очень весомы, и есть все основания считать, что мир математики объективно реален. Тем самым объективная реальность дуальна (как минимум), так как структурируется на два существенно различных сектора: с одной стороны, это «материальная» объективная реальность, представленная пространством-временем, полями и веществом различных типов; с другой стороны, это объективная реальность мира математических форм. Можно сказать, что мир математики образует семантический слой объективной реальности. В настоящей статье мы затронем вопрос о том, как именно протекает это независимое объективное существование мира математики с физической точки зрения, от какой физики оно может зависеть и какие характерные возникающие здесь проблемы трудно обойти.

В процессе обсуждения будет показано, что анализ в некоторых случаях выводит к границам применимости принципа наблюдаемости, являющегося одним из основных методологических положений научного метода, понимаемого обычным способом. Похожая ситуация имеет место в методологии современной космологии, что подробно обсуждалось нами в статье[2], на которую мы будем ссылаться ниже как на *Методологию космологии* (всегда курсивом). Аналогия в методологических проблемах оснований математики и космологии представляется весьма примечательной.

1. Физика математики

Очень часто считается (более или менее явно), что математика является «продуктом чистого разума», миром «чистых платоновских форм», и не имеет никакой материальной физической основы. Однако внимательный анализ показывает, что представление о «чисто идеальной» природе математики является далеко не очевидным.

Подойдем к вопросу о связи мира математических форм с физической реальностью со следующей методологической установкой. Не будем пытаться рассматривать какие-либо спекулятивные концепции вроде попытки отгадать, какие известные или предполагаемые физические поля могут быть реальными носителями семантического слоя реальности или что-либо подобное. Такое направление поиска означало бы попытку свести бытие мира математических форм к бытию обычного мира материи, что, по-моему, абсолютно бесперспективно. Это кажется попыткой поймать большую рыбу на слишком мелком месте. Напротив, постараемся вычленить те связи, которые представляются практически совершенно несомненными и неизбежными вне каких-либо спекуляций. Мы проведем методологический анализ связей математики с физической реальностью.

Математические доказательства или вычисления по своей сути являются *процессами преобразования информации*. Аксиомы или иные входные данные, имеющие недвусмысленное информационное содержание, посредством процесса доказательства или вычисления перерабатываются в результат – доказанную теорему или результат вычислений, также имеющий информационную природу. Точнее говоря, именно таким способом сформирован интерфейс математики с материальным миром. Ключевыми здесь являются понятия информации и процесса, откуда немедленно вытекает связь мира математических форм с физической реальностью, причем связь двух различных типов.

Первый тип связи имеет отношение к природе информации. Существуют различные определения последней, но любое из них предполагает, что информация может быть каким-то образом зафиксирована, хотя бы временно: она может передаваться по каналу связи, быть записана для хранения и представлена для изучения и т. д. Понятие информации предполагает (хотя бы в принципе) существование ее физических носителей. По крайней мере с операциональной точки зрения бессмысленно говорить об информации, существующей самой по себе, вне всякой связи с ее носителями. Бессмысленно говорить о существовании доказательства какого-либо математического факта, если оно принципиально не может быть каким-то образом зафиксировано и представлено для объективного анализа (в частном случае этим носителем могут быть и мозги математика или, например, память компьютера). Таким образом, математика через понятие информации неявно апеллирует к существованию физических объектов определенного типа – носителей информации. Это обстоятельство не вызывает никаких сомнений: вне представления о таковых информации понятие математического доказательства теряет смысл.

Второй тип связи имеет отношение к понятию процесса. Фактически мы уже касались этого сорта связей, когда в *первой статье* обсуждали аналогию между математическими доказательствами и экспериментальными методиками. Любое доказательство или вычисление мыслится не только как мертвая информация, которая может быть зафиксирована на носителе, но и как причинный процесс, который может быть развернут в пространстве-времени. Подчеркнем, что имеется в виду причинный процесс в классическом, не квантовом понимании, когда причина определяет следствие однозначно[3]. Это обстоятельство наиболее ярко подчеркнуто в представлении об абстрактной машине Тьюринга, как универсальном средстве реализации и представлении вычислений и доказательств, где центральным пунктом определения является последовательность причинно связанных шагов машины. Реальные работающие вычислительные машины являются лучшей тому наглядной и осязаемой иллюстрацией. Каждый последующий шаг любого вычисления или доказательства должен быть причинно связан с предыдущим или несколькими предыдущими, и все это уложено в единую причинную цепочку, приводящую к результату[4].

Таким образом, понятие доказательства как процедуры, которая должна быть выполнена, явно апеллирует к понятию физической причинности, которое в свою очередь теснейшим образом связано с одномерностью времени и вообще с лоренцевой причинной структурой пространтсвенно-временного континуума. В многомерном времени простой линейной причинности возникнуть не может, и, живи мы в многомерном времени, у нас, скорее всего, не могло бы возникнуть то понятие математического доказательства, которым мы пользуемся. Идея логического вывода, лежащая в основе представления о доказательстве, является абстракцией от физической причинности и одномерности времени, имеющих место в реальном мире, реально опирается на возможность причинных процессов при реализации вычислений и вне представления о причинности теряет смысл. «Устройства», способные разворачивать доказательства как причинные процессы, будем называть ниже *вычислителями*. Частным случаем вычислителя являются, конечно, мозги математика. Таким образом, вместе с классической причинностью для осмысленного существования мира математических форм необходима принципиальная возможность существования физических устройств особого рода – вычислителей.

Понятия доказательства и вычисления и тем самым математика вообще оказываются не независимыми от физики. Осмысленное существование математики апеллирует к причинной структуре пространства-времени и к существованию физических объектов особого рода – носителей информации и вычислителей.

Ни одна из упомянутых физических предпосылок существования мира математических форм не является тривиальной. Например, в теоретической физике время от времени появляются модели, содержащие многомерное время[5]. Немедленно возникает вопрос: а может ли существующая математика, основанная на одномерной линейной логике и причинности[6], быть адекватной для описания таких миров? Мы оставляем этот вопрос открытым.

Тот факт, что физические носители информации и вычислители действительно могут существовать, тоже отнюдь не является тривиальным. Дело в том, что носитель информации обязан быть классическим (не квантовым) и качественно хорошо определенным объектом: только в этом случае и будет принципиально возможна воспроизводимая запись и считывание информации[7], фиксация хода и результатов доказательств или вычислений, что обязательно подразумевается в математике. Почти то же самое можно сказать и о вычислителях. Они должны быть качественно хорошо определенными классическими устройствами или, как минимум, они должны проходить через последовательность классических состояний в процессе вычислений (подробнее см. ниже).

Под качественной определенностью классического объекта мы понимаем возможность существования в нем относительно стабильных классических неоднородностей, которые могут использоваться для записи информации или фиксации состояний. Однако не все объекты нашего мира являются классическими и качественно определенными в этом смысле. Более того, материальные объекты, вообще говоря, описываются только квантовой механикой, а существование классических объектов связано с тем, что в некоторых случаях в квантовой теории существует весьма нетривиальный классический предел квантового поведения. Таким образом, существование информации вообще и такого важного аспекта математики, как доказательства и вычисления в частности, связаны с нетривиальным фактом существования классического сектора и качественно определенных классических объектов в квантовом физическом мире.

Заметим, что представление о неразрывной связи природы математики с классическими носителями информации и классическими вычислителями обладают определенной эвристической силой и заставляют несколько по-новому взглянуть на семантический слой реальности (см. *первую статью*). Так, априори ниоткуда не следует, что *каждый* шаг математического доказательства должен быть зафиксирован на классическом носителе для того, чтобы сделать доказательство воспроизводимым. Достаточно, чтобы было классически (информационно) зафиксировано внешнее описание квантового процесса (по сути – реальной достаточно сложной экспериментальной процедуры), приводящего к переходу от одного классически фиксированного шага доказательства к следующему или вообще сразу от исходных посылок к результату. Промежуточные квантовые операции могут в принципе быть реализованы и без фиксации на каких-либо носителях с помощью некоторого идеального устройства – «квантового вычислителя» – квантового аналога машины Тьюринга или эквивалентного квантового алгоритмического автомата. Это порождает обобщение понятия доказательства или вычисления и приводит к представлению о квантово-классической математике. Последняя не может быть представлена «на бумаге» или «в голове», а только в работе «квантового вычислителя». Таким образом, в семантическом слое реальности помимо обычной математики может существовать квантово-классический сектор. Важный вывод, который можно сделать из этого квантово-классического обобщения мира математических форм, состоит в том, что невозможно настаивать на том, что семантический слой объективной реальности исчерпывается математикой, понимаемой обычным образом, или даже квантово-классической математикой, как обобщением обычной математики. Нельзя ведь исключить возможность и других расширений. Другое дело, что нашему объективному познанию доступна пока только обычная математика, и можно уже задуматься над квантово-классической математикой.

Физические основания математики не исчерпываются связью с классическими носителями информации, вычислителями и с классической причинностью. Еще несколько связей можно получить, если внимательно рассмотреть, что представляет собой математика на содержательном уровне. На самом фундаментальном уровне математика *содержательно* представляет собой исследование структур на множествах с помощью аппарата доказательств, основанного на математической логике[8] (программа Бурбаки[9]). Таким образом, в основе математики лежат три фундаментальные сущности: множество, логика, доказательство. По поводу доказательств и их связи с физикой несколько слов уже было сказано выше.

Понятие множества тоже неразрывно связано с представлением о качественно определенном классическом объекте (вещи) в отличие от объекта квантового. Только о классическом объекте можно с определенностью утверждать, принадлежит ли он или нет некоторой совокупности, имеется возможность с полной определенностью отличать один объект от другого, и понятие множества становится в общем случае осмысленным только для классических объектов. Для квантовых объектов (таких, как фотон) понятие принадлежности к множеству в общем случае не определено, для фотонов по двум фундаментальным причинам: во-первых, из-за полной неразличимости фотонов с одинаковыми наборами квантовых чисел, во-вторых, из-за того, что многие физические ситуации характеризуются дробным или вообще неопределенным числом фотонов. Поэтому, если бы вся реальность имела чисто квантовый характер, но не имела бы классического сектора, понятие множества не могло бы сформироваться. Таким образом, понятие множества, подобно понятию доказательства, связано с физическим делением реальности на квантовую и классическую или, более точно, именно с существованием классического сектора в физическом мире.

То же самое можно сказать и о логике. Математика использует классическую (аристотелеву) логику[10], которая отнюдь не обязана быть ни единственно возможной, ни априорной, но сформировалась на основе макроскопической классической (не квантовой) каждодневной практики человека; эмпирическое происхождение логики отмечал еще В.И.Ленин в своих «Философских тетрадях». «Квантовая» практика в принципе могла бы сформировать совершенно другую логику. Таким образом, в основе математической логики также лежит деление физической реальности на классическую и квантовую. В дополнение к этому классическая логика, будучи явно связанной с понятием доказательства и вычисления, является фактически также абстракцией от линейной причинности физического мира, как это уже было отмечено выше. То, что понятие логического следствия, импликации, явно апеллирует к понятию причинности, особенно хорошо видно, если вспомнить машину Тьюринга как универсальный инструмент реализации логических выводов, работа которой имеет существенно причинный характер.

Статус понятий множества и логики как предельных обобщений физического понятия «классического мира» (в отличие от «квантового мира»), был понят давно. Возникла идея, что парадоксы квантовой механики связаны с неадекватным использованием классической логики и теории множеств в области, лежащей за пределами их границы применимости. Это привело к многочисленным попыткам введения «квантовых множеств», «квантовой логики» и даже «квантовой математики», которые восходят еще к Дж. фон Нейману и Дж.Биркгофу (1930-е годы)[11]. Эти попытки были основаны на предшествующем опыте, который показал, что геометрия мира, которая долгое время представлялась евклидовой и априорной, на самом деле такой не является, но имеет экспериментальный статус (в общей теории относительности). Особенно четко эту идею представил Хилари Патнэм[12]. По аналогии понятия множества и логики, лежащие в основании математики, должны иметь экспериментальный статус. Точнее говоря, понятие множества и аристотелева математическая логика в предельно обобщенной форме представляют физику, соответствующую классическому сектору мира, и в общем случае не соответствуют более общему квантовому поведению. Именно множество и логика отражают возможность деления материального мира на качественно определенные подсистемы – «локальные объекты», которая вовсе не следует из априорных соображений.

Однако программа «квантовой логики» не привела к какому-либо существенно новому пониманию квантовой механики. Постепенно стало ясно, что эта программа приводит только к одной из возможных эквивалентных формулировок квантовой теории, и обычная «классическая» математика остается вполне эффективной и в квантовой области. Почему математика, основанная на классических понятиях множества и логики, остается эффективной в квантовой области, остается загадкой. Этот факт не может не вызывать удивления. Эта загадка является некоторым уточнением вопроса о «непостижимой эффективности математики в естественных науках»[13]. То, что математика эффективна в макроскопическом классическом секторе физики, не вызывает столь глубокого удивления[14], так как математика через понятия множества и аристотелевой логики по построению является предельно обобщенным представлением классических свойств окружающей действительности и причинности. Теория множеств и математическая логика – не абстрактные математические понятия, а только предельно общие математические модели, апостериорным способом соответствующие совершенно реальной физике[15]. Теория множеств так же приблизительно описывает возможность выделения подсистем-объектов из окружающей действительности и объединение их в совокупности, как евклидова геометрия приблизительно соответствует реальной геометрии пространства.

Это наводит на мысль, что решение проблемы эффективности математики в квантовой физике можно попытаться искать в следующем направлении. Вся известная нам квантовая динамика в принципе представима через поведение классических приборов, как на то указывал Нильс Бор. С формальной точки зрения квантовая механика описывает поведение классических приборов в некоторых специальных экспериментальных ситуациях и ничего более. Эти ситуации называются «приготовлениями квантовых систем» и «измерениями над квантовыми системами», но ничто не может нас заставить называть их именно так, если мы того не захотим. Однако поведение любых классических приборов принадлежит классическому сектору физики и органически связано с обычной «классической» математикой, как это было указано выше. Может быть, только поэтому при исследовании квантовой реальности мы не встречаемся с ситуацией, когда обыкновенная математика оказывается нерелевантной. То есть математика эффективно работает при описании классического интерфейса к квантовой физике, но не квантовой физики «самой по себе». С этой точки зрения мы не можем исключить, что за «кулисами», которые представляются интерфейсом к классическим приборам, существует какая-то скрытая квантовая динамика, для которой классическая математика, основанная на понятиях множества и аристотелевой логике, не является адекватной. Здесь может быть царство истинной квантовой логики и квантовой математики. Однако существование такого скрытого сектора, по самому его определению, не имеет операционального смысла, так как наблюдаемость в обычном смысле связана только с классическими приборами. Поэтому в рамках обычной научной методологии этот скрытый сектор должен признаваться лежащим вне науки. Он остается столь же для нас недостижим, как Кантовская «вещь в себе».

Однако насколько действительно необходимой является связь «наблюдаемости» квантового мира с «классическим интерфейсом»? Такая связь совершенно неустранима для науки, понимаемой обычным способом (см. *Методология космологии*), но она не является априорно единственно возможной. В частности, М.Б.Менский развивает квантовую теорию сознания[16] (или, лучше сказать, квантовую теорию объединения сознания и физической реальности), в которой наряду с обычным квантовым измерением с помощью классического прибора рассматривается еще один способ контакта с квантовым миром. Одной из основных функций сознания в этой концепции (Расширенная Концепция Эверетта, РКЭ) является выбор квантовой альтернативы в ситуациях, аналогичных квантовому измерению, в контексте многомировой интерпретации Эверетта (см. цитированную книгу М.Б.Менского для подробностей). В этом смысле отсутствие бодрствующего сознания (сон, медитация) означает прекращение выбора квантовых альтернатив в ветвящемся эвереттовском мире. Хотя, насколько я понимаю, отсюда логически еще не следует с необходимостью, что сознание непременно входит тогда в «информационный» контакт со всеми квантовыми альтернативами одновременно, а не просто погружается «в себя», но в РКЭ предполагается, что это может быть именно так, и М.Б.Менский аргументирует эту идею многочисленными соображениями как эвристического, так и практического характера. Во время такого контакта сознание ведет себя как существенно квантовая система. Вход в контакт со многими альтернативами одновременно может влиять на работу основной функции сознания как селектора альтернативы в том смысле, что «ознакомившись» со всем многообразием квантовых альтернатив, сознание селектирует среди них наиболее предпочтительную для себя, ведь селекция – функция сознания. Этот выбор может и не рефлексироваться на сознательном уровне. Что здесь действительно важно, так это то, что никаким эмпирическим способом невозможно ни доказать, ни опровергнуть того, что такая селекция имела место. Это обстоятельство недвусмысленно продемонстрировано М.Б.Менским в работах, посвященных РКЭ.

Мне всегда казалось недостатком РКЭ то, что в этой концепции отсутствует математическая модель того, как информация из многих квантовых альтернатив попадает в сознание, анализируется там, и фиксируется предпочтительная альтернатива. С чисто формальной стороны проблема здесь состоит в том, как описать эту селекцию без нарушения когерентности волновой функции мира. В концепции РКЭ есть, правда, понятие «посткоррекции»[17], описывающее благоприятный выбор альтернатив сознанием, а также и жизнью вообще, но это описание имеет феноменологический характер, напоминает проекционный постулат квантовой механики, не описывая «динамического» механизма анализа альтернатив квантовым сознанием без нарушения когерентности.

В свете упомянутого выше предложения о пути решения вопроса об эффективности математики в квантовой области можно понять, в чем в принципе могла бы заключаться причина отсутствия «динамической» математической модели анализа альтернатив. Как было указано выше, причиной эффективности «классической» математики в квантовом секторе может быть то, что математика описывает поведение классического интерфейса к квантовому сектору, а не последний сектор «как таковой». Но ситуация анализа квантовых альтернатив квантовым сознанием, описанная М.Б.Менским, не предполагает никакого классического интерфейса. Поэтому аргумент, что «классическая» математика эффективна в квантовой области из-за того, что она описывает на самом деле только классический интерфейс к квантовой области, в рассматриваемой ситуации не работает. Поэтому в рамках этой логики нет никаких оснований предполагать, что «классическая» математика и математические модели, которые строятся на ее основе, будут эффективны в этой чисто квантовой ситуации. Потому, быть может, и построить математическую модель анализа альтернатив в обычном смысле в принципе невозможно. Может быть, мы впервые столкнулись с миром «истинно квантовой» логики и квантовой математики, в котором обычная математика и логика утрачивает свою «непостижимую эффективность».

Однако не впадаем ли мы в ересь? Напомним и подчеркнем еще раз, что представление о «наблюдаемости» вне контакта с классическими приборами находится за пределами обычно понимаемого научного метода. Это же можно сказать о значительной части концепции РКЭ М.Б.Менского и всего приведенного здесь в связи с этой концепцией анализа. Однако, по нашему мнению, рано было бы говорить, что все это находится вообще вне науки. Стандартным образом понимаемый научный метод оказывается слишком тесным в современных исследованиях во многих случаях. Этот вывод следует прежде всего из анализа методологии современной космологии. В рамках строго и догматически понимаемого научного метода и в особенности принципа наблюдаемости) современная космология работать не может. В частности, там обязательно приходится иметь дело с операционально неопределимыми (т. е. ненаблюдаемыми) вероятностями и другими объектами, не имеющими ясного операционального смысла. Мы подробно аргументировали это в *Методологии космологии*. Это приводит к представлению о существовании границы применимости стандартной научной методологии, основанной на строгом принципе наблюдаемости, и констатацией того, что выход за эти границы уже произошел и, более того, привел к чрезвычайно впечатляющим результатам вроде предсказания анизотропии космологического микроволнового фона. Приходится с чрезвычайной, конечно, осторожностью и только по мере крайней необходимости прощупывать возможности выхода за эти границы. Концепция М.Б.Менского с этой точки зрения представляет собой очень интересный «пробный камень».

Резюмируем. Все три фундаментальные сущности, лежащие в основе математики – множество, логика, доказательство, неразрывно связаны с возможностью выделения в физической реальности классического сектора и классических качественно определенных объектов. Помимо этого, логика и понятие доказательства прямо связаны с физической причинной структурой нашего мира. Возможность существования классического сектора и линейная причинность есть физическая основа существования математики.

2. Вопрос о пространственно-временной однородности мира математических форм

Другой важный аспект проблемы связи бытия мира математических форм с материальным миром затронут в статье Ли Смолина[18]. Вопрос заключается вот в чем. Из того, что некий объект обладает собственной реальностью, автоматически вовсе не следует, что вопрос о том, «где» или «когда» он существует, является осмысленным. Никакой прямой логической связи здесь нет. В этом легко убедиться еще раз, взглянув на структуры критериев (R), (R1), (R2) из *первой статьи*. Так является ли этот вопрос на самом деле осмысленным в отношении мира математических форм или нет?

Вневременная (универсальная) природа математики очевидна Роджеру Пенроузу и даже им не обсуждается: «...Существование мира математических идей опирается на фундаментальный, вневременной и универсальный характер этих самых идей и на тот факт, что описываемые ими законы никоим образом не зависят от тех, кто их открыл»[19]. Напротив, Ли Смолин прямо задается этим вопросом. Фактически его анализ основан на принципе наблюдаемости, которого он старается жестко придерживаться в своей упомянутой выше статье.

Рассматривается игра в шахматы. Будучи математической игрой, она подчиняется некоторым вполне определенным математическим законам. Эти законы могут быть объективно познаны и обладают в этом смысле самостоятельной объективной реальностью. Они уже существуют вместе с заданными правилами игры, хотя и не все еще нам известны. Но, настаивает Ли Смолин, говорить о законах шахматной игры до того, как эта игра была действительно придумана людьми, *бессмысленно*. Мы должны считать, что до изобретения шахмат всей этой «шахматной математики» не существовало, но в момент изобретения она появилась и существует с этих пор вполне объективно. Он рассматривает следующую альтернативу этому положению. «Последовательный платонист», настаивающий на вневременной природе реальности математики[20] (подобно Роджеру Пенроузу, которого, однако, Ли Смолин прямо не упоминает), может сказать, что в мире математических форм существует бесконечное множество, представляющее все возможные математические игры, и вместе с ним все «теоремы шахмат» вместе с полными теориями всех других математических игр. Ли Смолин против этой точки зрения выдвигает следующее возражение: множество «всех математических игр» слишком велико и не имеет по сути операционального смысла, поэтому такое предположение не дает ничего нового с практической точки зрения и только запутывает дело, фактически нарушая принцип наблюдаемости. На этом основании он вневременную природу шахматной математики решительно отвергает. Затем, не принимая «последовательно платоновскую» идею вневременной природы шахмат, он делает очень сильное и важное обобщение. Как и в случае «шахматной математики», зависимой от времени структурой обладает, вообще говоря, абсолютно вся математика, т. е. элементы идеального мира математических форм не обладают вневременным существованием, а появляются на свет только в тот момент, когда для этого созревают некоторые специфические условия в реальном физическом мире и в связи с некоторыми событиями реального мира. Именно требуется, чтобы математический объект являлся абстракцией чего-то реально существующего. Тем самым Ли Смолин совершенно недвусмысленно настаивает на том, что объективно существующий мир математики, который он вовсе не отрицает, не имеет статической вневременной природы.

Напротив, это объект, динамически зависящий от времени. Таким образом, то, что очевидно и даже не обсуждается Роджером Пенроузом, категорически отвергается Ли Смолиным. Это говорит о том, что вопрос на самом деле нетривиален.

Здесь необходимо сделать несколько замечаний по поводу характера аргументации Ли Смолина. В действительности множество всех математических игр, по крайней мере с точки зрения классической (не конструктивной) математики, отнюдь не является ни «слишком большим» (на чем настаивает Смолин), ни лишенным смысла. Кроме того, вполне можно представить себе теоремы математики, уже сейчас приложимые к любой математической игре, надо только хорошо определить, что такое математическая игра. В этом смысле множество всех игр, в том числе и еще не придуманных, надо рассматривать как актуально существующее в любой момент времени. Вневременная точка зрения на математический мир снова обретает право на существование, Ли Смолин ее отнюдь не закрыл. Однако он действительно поставил очень важный вопрос, касающийся природы объективности математического мира, и он будет более детально рассмотрен нами в следующем разделе статьи.

Позиция Ли Смолина требует одного существенного уточнения. Смолин рассматривал природу математики в упомянутой статье в связи со своей идеей о существовании единого фундаментального времени, отличного от локального времени общей теории относительности, от приближенного космологического времени моделей Фридмана-Робертсона-Уокера и вообще не имеющего никакого ясного контрагента в современной физике. Это фундаментальное время очень близко по сути абсолютному времени Ньютона, и основная идея Ли Смолина заключалась в том, что фундаментальные законы физики могут зависеть от такого фундаментального времени. Когда Смолин писал о зависимости объективного мира математики от времени, он тоже имел в виду именно это спекулятивное фундаментальное время. Ввиду очень высокой степени спекулятивности использованного им понятия времени, его мысль о возможной зависимости математики от фундаментального времени является просто не очень понятной. Неясно, что в точности может быть аргументом такой зависимости, так как о подходящем фундаментальном времени пока не известно ничего определенного[21]. Однако идее Ли Смолина можно придать более простой и ясный смысл. Надо вместо зависимости мира математических форм от спекулятивного фундаментального времени поставить вопрос о возможной его зависимости от пространственно-временной области или даже точки, для которой данный платоновский мир определен; такой же вопрос можно поставить и в отношении фундаментальных законов физики. Пространственно-временные области и точки являются ясно определенными геометрическими объектами во всех современных областях физики, включая ОТО[22], и вопрос о зависимости чего бы то ни было от пространственно-временных координат является во всяком случае осмысленным. В частности, изобретение шахмат имело четкую пространственно-временную привязку, и появление игры может оказывать причинное влияние на внутреннюю часть светового конуса будущего, берущего начало в точке изобретения. Вопрос о том, существует ли «шахматная математика» только внутри конуса будущего точки пространства-времени, отвечающей событию изобретения шахмат, или вообще везде, является во всяком случае осмысленным.

Можно заметить, что обсуждаемый Смолиным вопрос выглядит наиболее актуально для специального подмножества мира математических форм, которое отвечает математическим формулировкам реальных физических законов и другим математическим моделям, имеющим отношение к чему-то реально существующему в материальном мире. Можно ли говорить о существовании некоторого физического закона вне той пространственно-временной области, где он реально работает? Можно ли говорить о существовании законов атомной физики до того, как во Вселенной возник первый атом? Например, на стадии кварк-глюонной плазмы, вскоре после горячего Большого взрыва, когда никаких устойчивых атомов существовать не могло? Вопрос отнюдь не тривиален. Определенные физические постоянные, от которых зависят законы атомной физики, возникли после нескольких нарушений симметрии при охлаждении Вселенной. Но возможность нарушения симметрии «потенциально» существовала уже и на стадии кварк-глюонной плазмы, и даже раньше, она была закодирована в фундаментальных законах физики, которые реально действовали в это время и продолжают в «скрытой» форме действовать и сейчас, именно в форме, когда фундаментальная симметрия этих законов скрыта спонтанным нарушением симметрии. В этом смысле законы атомной физики как будто существовали в виде некоторой потенции. Все они в принципе могут быть «вычислены», если стартовать с более общих законов физики периода кварк-глюонной плазмы или еще более ранних. Не думаю, однако, что, договорившись о «потенциальном существовании», мы что-то на самом деле поняли. А существовали ли законы шахмат (в потенции?) в момент Большого взрыва? А математические законы рынка? Уже сейчас мы можем сформулировать альтернативу, которую будем обсуждать и дальше: 1) либо объективный мир математических форм весьма напоминает физическое поле, имея явную пространственно-временную привязку, 2) либо он имеет абсолютное внепространственное-вневременное существование, но тогда мы должны допустить, что законы шахмат существуют уже в момент Большого взрыва. Пока может показаться, что первый вариант явно более предпочтителен, так как следствия второго варианта кажутся «абсурдными». Но ниже мы покажем, что и первый вариант ведет к не менее «абсурдным» следствиям.

3. Анализ возможной полевой структуры математики с точки зрения принципа наблюдаемости

В разделе 1 мы установили, что объективно существующий мир математических форм для нас, мыслящих существ и наблюдателей, не может проявить себя никак иначе, кроме как будучи кодированным классической информацией на некоторых материальных носителях, причем предполагается, что математические доказательства, записанные на носителях, могут мыслиться как программы, кодирующие реальные причинные процессы, выполняемые классическими же вычислителями.

Вряд ли существованию мира математики можно было бы придать хоть какой-то смысл, если бы физические носители информации и вычислители принципиально отсутствовали. Как минимум в этом, с чисто операциональной точки зрения, заключается связь мира математики с физической реальностью. Здесь явно напрашивается аналогия. Роль классических носителей информации и вычислителей в отношении мира математики весьма напоминает роль классического прибора в отношении квантовых объектов. Действительно, структура мира математики может быть проявлена для нас, только будучи представленной на классических носителях информации и процессами доказательств, реализуемых классическими вычислителями; структура квантового мира может быть выявлена, только будучи представленной показаниями классических приборов[23]. Если продолжить эту аналогию, то можно выстроить такую цепочку заключений. В квантовой теории работает принцип наблюдаемости: что не наблюдаемо, то и не существует объективно. Этот принцип показал свою исключительную плодотворность в понимании сути квантовой теории: поскольку точные значения импульса и координаты частицы одновременно не могут быть измерены, то они одновременно просто не существуют, и т. д. В отсутствие классических материальных носителей информации и вычислителей идеальный мир математических форм утратил бы контакт с материальным миром – он стал бы принципиально ненаблюдаемым. Это как будто бы и по аналогии с опытом квантовой теории должно быть эквивалентно тому, что мир математики в этом случае просто не существовал бы подобно тому, как в квантовой теории для частицы не существуют одновременно точные значения координаты и импульса. Однако поспешных выводов делать не следует.

Квантовые объекты обыкновенной квантовой механики являются объектами «лабораторными» и, более того, в большинстве случаев микроскопическими, за исключением некоторых очень специальных макроскопических объектов вроде токов в сверхпроводниках, скореллированных пар частиц с большими базами и некоторых других. Для таких объектов простой и ясный смысл имеют понятие наблюдаемости и понятие воспроизводимости измерений[24]. Но мир математики – это нечто совсем иное. Это не объект лабораторного исследования. Как подробно аргументировалось в *Методологии космологии*, наблюдаемость и воспроизводимость наблюдений в космологии (вообще говоря), где Вселенная тоже не является лабораторным объектом, утрачивает свой простой смысл, и связь наблюдаемости с существованием объекта может становиться существенно более сложной и опосредованной; мы уже упоминали выше это обстоятельство в связи с концепцией

М.Б.Менского. Из-за этого существованию некоторых прямо не наблюдаемых объектов (в *Методологии космологии* упоминались «другие вселенные» Мультиверса, инфляционной космологии и операционально неопределимые космологические вероятности) можно и нужно придавать определенный смысл. Между миром математических форм и космологией может существовать в этом смысле глубокая аналогия. Она может заключаться в том, что и в отсутствии материальных носителей информации и вычислителей остается возможность существования мира математических форм в каком-то специальном (высшем) смысле, подобно тому, как приходится допускать существование прямо не наблюдаемых и операционально неопределимых объектов в космологии. Мы, однако, пока не можем сказать ничего определенного по поводу того, что именно это за высший смысл. Попробуем поэтому для начала придерживаться более прямолинейной точки зрения, согласно которой отсутствие операционально определенной связи мира математики с физической реальностью в гипотетическом случае отсутствия материальных носителей информации и вычислителей должно было бы означать просто отсутствие самого мира математики.

Такой подход немедленно приводит к следующему вопросу. Существование классического сектора и классических качественно определенных объектов не является обязательным атрибутом Вселенной. Это обстоятельство следует из современных космологических представлений (см. недавние обзоры и монографии[25]), причем по крайней мере по двум разным причинам. Во-первых, на самых ранних стадиях развития нашей собственной Вселенной условия были таковы, что ни носители информации, ни тем более вычислители существовать не могли: либо классического сектора реальности еще не существовало – существенно всё пребывало в квантовом режиме, либо мир пребывал в состоянии вакуума (на стадии инфляции в инфляционной космологии). Во-вторых, в рамках представлений инфляционной космологии и многомировой интерпретации квантовой космологии (см. детали в цитированных выше обзорах и книгах по космологии, а также в наших статьях[26]) возникает представление о многих вселенных с различными свойствами – о Мультиверсе. В рамках этих представлений локальные вселенные в принципе могут обладать различной физикой, могут существовать и такие вселенные, в которых классический сектор с нужными свойствами не образуется на протяжении всей истории их существования или, например, время оказывается многомерным, исключая линейную причинность. Релевантна ли такому «локальному» миру математика и можно ли его охарактеризовать информационно, несмотря на то, что математика и информация не могут быть определены внутри такой вселенной из-за принципиального отсутствия носителей информации, вычислителей и т. д.? Релевантна ли математика ранним стадиям эволюции нашей собственной Вселенной? Оставаясь в рамках той логики, в рамках которой договорились пока работать (ненаблюдаемо – не существует), мы должны согласиться, что не релевантна. Как тогда следует расценивать наши действия, когда мы «миры без математики» пытаемся рассматривать с использованием математических моделей? Или достаточно иметь необходимые физические предпосылки существования математики хотя бы в одной какой-нибудь области пространства-времени Мультиверса для того, чтобы она в каком-то смысле существовала везде? Почему мы так должны думать?

Важно отметить, что этот сорт вопросов очень близок тому кругу проблем, который обсуждался в разделе 2 в связи с возможной зависимостью мира математических форм от пространственно-временной области, для которой он определен (на примере шахмат Ли Смолина), – с возможной полевой структурой математики. Там вопрос о структуре математической реальности ставился в зависимость от существования некоторых материальных объектов (например, атомов – чтобы существовали законы атомной физики) или некоторых событий (изобретение шахмат – чтобы существовала шахматная математика) в реальном мире. Когда мы рассматриваем существование классического сектора и классических носителей информации как предпосылку существования математики вообще, мы по существу ставим тот же вопрос о зависимости математической реальности от пространства-времени, но в предельно жесткой форме: рассматриваются такие физические условия, которые могут ограничить не только существование отдельных структур в математической реальности (вроде математики шахмат), но осмысленное существование мира математической реальности как таковой. Мы возвращаемся к уже упомянутой выше альтернативе, но в усиленной форме: 1) либо мы должны считать, что мир математических форм имеет вневременную и внепространственную природу, – тогда законы шахмат в мире математических форм существуют уже в момент горячего Большого взрыва и даже раньше, 2) либо мы должны допустить, что мир математики находится в зависимости от материального мира и имеет полевую структуру, – тогда следует допустить существование областей пространства-времени, для которых математика вообще не релевантна. Если мы не хотим верить в то, что законы шахмат существуют уже в момент Большого взрыва, так как на этом этапе невозможно говорить о материальных объектах, которые описываются этими законами, то, *следуя той же логике и в точности по той же причине*, мы должны допустить существование областей без математики вообще по причине отсутствия других материальных объектов – потенциальных носителей информации или вычислителей. Мы пока не намерены настаивать на определенном выборе одной из возможностей, но если намерены придерживаться логики вообще, то, как нам представляется, надо признать, что иного выбора нет.

В действительности ситуация даже еще сложнее. Мы не упомянули еще два важных обстоятельства.

Во-первых, если мы хотим твердо следовать логике «не наблюдаемо – не существует», то нужно учесть, что даже в случае существования физических носителей информации в пределах любого горизонта событий (вроде видимой части нашей Вселенной) может быть представлен хоть и весьма большой, но принципиально конечный объем информации[27]. В этом случае математические объекты, которые для своего представления требуют объема информации большего, чем может быть представлено внутри данного горизонта, должны быть признаны несуществующими внутри этого горизонта, так как принципиально не могут быть определены операционально. Эта ситуация кажется совершенно неудовлетворительной, так как в математике, даже понятой финитно-конструктивно, определенно подразумевается возможность существования объектов сколь угодно высокой конечной сложности, требующих для представления сколь угодно больших объемов информации.

Второе еще не упомянутое обстоятельство имеет отношение к связи математики и культуры. Принципиальная возможность существования носителей информации и вычислителей, способных воспроизводить причинные цепочки логических выводов, является необходимым условием возможности контакта мира математических форм с материальным миром, но не является достаточным условием. Сами по себе пассивные носители информации не станут вдруг представлять доказательства и прочие математические формы, а вычислителям тогда нечего будет воспроизводить. Для того, чтобы структуры мира математических форм переносились на носители информации, должен существовать посредник, который бы организовал процесс отображения математических форм на носители. Как известно, этим посредником являются субъекты познания, которые функционируют в контексте культуры. В этом смысле роль последней вполне аналогична роли носителей информации и вычислителей. Культура вместе с носителями информации и вычислителями играет роль того «устройства», которое отображает содержимое идеального мира математических форм в реальном мире, подобно тому, как классический прибор проявляет структуру квантового мира (см. выше). При этом культура оказывается таким же необходимым компонентом, как и все прочие физические предпосылки математики. В этом смысле культура является равноправной «деталью» этого «устройства». Культура организует канал связи, по которому информация из идеального мира математики перекачивается и фиксируется на носителях. Неверно было бы сказать, что объективный мир математики существует в культуре. Мир математики существует объективно сам по себе, а культура, по крайней мере с формальной точки зрения, играет роль канала связи, передающего данные из мира математики на носители информации, в сознание людей в том числе. Если полученные математические «тексты» сами считать элементами культуры, то можно сказать, что она отображает в себе в виде некоторых информационных паттернов фрагменты идеального мира математических форм. В качестве спекуляции можно упомянуть о возможности, что мир математических форм – это всего лишь та часть объективно существующего семантического слоя реальности, который способна в себе отразить культура, но семантический слой реальности не обязан исчерпываться только этим. Конечно, культура не только передает фрагменты мира математики на носители, но и делает это для каких-то своих внутренних нужд, у нее есть цели, но это уже не имеет прямого отношения к объективной природе математики, в которой никакие цели не прописаны. В принципе в качестве канала связи можно представить себе и что-то совсем другое, например, устройство вроде автономного компьютера, которое бы занималось такой перекачкой чисто механически, например, доказывая одну теорему за другой в порядке их Гёделевской нумерации в какой-нибудь формальной системе, без всякой цели. Ниже мы упомянем еще одну очень важную разновидность «канала связи».

Связь математики с культурой ставит вопрос об областях пространства-времени, для которых существование математики является осмысленным, еще более остро. Так как для связи идеального мира математики с материальной действительностью (для «наблюдаемости» математики) нужна не только принципиальная возможность существования носителей информации и вычислителей, но и культура – канал связи или другое подобное «устройство», то, следуя все той же логике (ненаблюдаемо – не существует), придется заключить, что мир математики может существовать только в областях, где есть такие «каналы связи». Означает ли это, что миры, существующие вне причинной связи с такими областями, не могут рассматриваться в рамках математических моделей? Как нам представляется, это начинает приближать состояние дел к абсурду, хотя мы далеки от мысли, что абсурдность такого результата действительно доказана. Что мы делаем, когда пытаемся строить что-то вроде математической модели Мультиверса как целого? Ведь не обязательно для всех областей Мультиверса в пределах их причинного горизонта найдется культура – канал связи, способный сделать идеальный мир математических форм проявленным.

Анализ, представленный выше, склоняет нас к мысли, что для мира математических форм статическая вневременная и внепространственная мода существования выглядит несколько более предпочтительной, чем какая-либо зависимость от пространства-времени и обыкновенной материи в духе предположения Ли Смолина. Если мы признаем за миром математики вневременное-внепространственное существование, то значит, прямолинейный аргумент типа «ненаблюдаемо – не существует» не работает. Это не должно удивлять, так как, повторим, похожая ситуация имеет место в космологии (см. *Методология космологии*). Но тогда – если математические законы рынка существуют сейчас, то они существовали и в момент Большого взрыва! И шахматы тоже не были выдуманы. Правила игры были только выбраны из множества всех возможных правил математических игр, которое объективно существует в семантическом слое реальности само по себе, хоть мы и не знаем, какие еще замечательные игры там представлены. Такова логика, здесь нет никакого произвола. От парадоксальности ситуации полностью уйти не удается.

Последний вопрос, который хотелось бы обсудить, связан с идеей, что физика выводима из чистой информатики или, в несколько иной редакции, что информация первична, а физика вторична. "It from bit", – от Джона Арчибальда Уилера, или «Вначале был логос», – от Иоанна. Эта идея столь же глубока, сколь и отношение к ней в физическом сообществе неоднозначно. Она предстает в самых разнообразных обличиях и имеет чрезвычайно обширную литературу, которая заслуживает отдельного обзора. Мы, однако, не будем пытаться здесь его дать[28], это увело бы слишком далеко от основной темы статьи. Отметим, что в нашей стране мысль о первичности информации последовательно отстаивает И.М.Гуревич[29] и очень к этому близка концепция семантического поля В.В.Налимова[30]. Упомянем также две свежие статьи на эту тему из электронного архива препринтов[31], где можно найти и обзор. Тема представляется настолько актуальной, что виртуальный Институт Фундаментальных Исследований (FQXi, Foundational Questions Institute, http://fqxi.org/), объединяющий многих ведущих физиков с мировыми именами, в 2010–2011 гг. объявил конкурс научных работ на тему: «Является ли реальность цифровой или аналоговой?»

Здесь мы остановимся только на одной стороне вопроса о первичности информации либо физики. Не противоречит ли идея, что информация первична, а физика вторична, тому, что информация требует наличия физических носителей, имеющих классическую природу, чтобы получить осмысленное существование в материальном мире? Казалось бы, чтобы говорить о возможности существования информации, надо *сначала* иметь физические носители, устойчивыми неоднородностями которых можно кодировать информацию. Информация может быть только вторичной по отношению к физике. Однако столь прямолинейное заключение было бы слишком поспешным. Действительно, мир математики заведомо имеет информационную природу (вычисления по сути – процессы преобразования информации), но, как мы видели, попытка связать его существование с фактическим наличием/отсутствием физических носителей информации приводит к трудноразрешимым парадоксам. Какая-то форма статичного, внепространственного и вневременного существования мира математических форм, в том числе в отрыве от существования реальных физических носителей информации, кажется более предпочтительной, хотя ведет к своим трудностям. Таким образом, хотя информация, вне всяких сомнений, первична по отношению к миру математики, очень возможно, что наличие носителей информации не требуется для объективного существования математической реальности. Совершенно аналогично и по этой же причине нельзя исключить первичность информации по отношению к физике. Как минимум, мысль о первичности информации не выглядит абсурдной.

Отсюда, конечно, не следует, что информация действительно *является* первичной по отношению к физике в том смысле, что всю физику можно однозначно вывести из каких-то математических структур или информационных соображений чисто логическим путем. Действительным фактом является лишь следующее. Реальные физические законы действительно имеют математическую природу и, следовательно, свои идеальные прообразы в объективно существующем мире математических форм. Можно сказать, что «проявление» соответствующих математических структур в виде физических законов материального мира *весьма напоминает* (и не более того, мы не делаем более сильных утверждений) разновидность канала связи между идеальным миром математики и материальным миром подобно тому, как таким каналом связи является культура, хотя, конечно, природа этих каналов связи совершенно различна. Заведомо не все, что имеет место в мире математических форм, может быть представлено в структурах материального мира в виде физического закона или физической величины. Поэтому такой «канал связи» (если уж обсуждать эту концепцию) заведомо обладает ограниченной пропускной способностью. Например, разрывная в каждой точке функция Дирихле не может прямо соответствовать никакой связи между физическими величинами, поскольку они не могут представляться вещественными числами с актуально бесконечной точностью[32]. Таким образом, канал «явления законов физики» определенно способен проводить некоторую селекцию математических объектов как потенциальных законов физики, но большее утверждать трудно. Являются ли ограничения пропускной способности этого канала связи настолько сильными, что они способны пропустить один-единственный вариант согласованной физики, и тем самым вся физика однозначно выводима из математики? Ответа на этот вопрос нет, но, на наш взгляд, важно уже то, что вопрос можно сформулировать в такой форме.

Несомненным является то, что хотя бы один такой согласованный набор, а именно, набор законов, представляющих нашу собственную Вселенную, действительно был пропущен через канал связи «проявления физических законов». Следовательно, этот набор существует в идеальном мире математических форм, хотя неизвестно, является ли он в своем роде единственным. И не видно никаких оснований для такого предположения.

Резюмируем. Объективная реальность распадается как минимум на материальный мир, который в современной науке представляется Вселенной в широком смысле слова (может включать или не включать Мультиверс и т. д. – в зависимости от космологических моделей и уровня анализа), и объективный семантический слой реальности, включающий в себя как минимум мир математических форм. Объективная реальность не тождественна материальной Вселенной, это нечто большее. Между миром математических форм и материальной Вселенной имеются нетривиальные связи. С одной стороны, мир математических форм содержит в себе некоторое подмножество, являющееся прообразом Вселенной в виде набора согласованных физических законов, которые ее описывают. Отношение этого прообраза к материальной Вселенной напоминает работу канала связи «явления физических законов», связывающего идеальный мир математики с материальным миром. С другой стороны, базисные ингредиенты мира математики, такие, как понятие множества и логического вывода, сами являются абстракциями или моделями определенных физических аспектов Вселенной, а именно, моделями качественной определенности классического сектора физики и классической причинности. В этом смысле существование физического классического сектора и причинности являются предпосылками осмысленности мира математических форм. Впрочем, не исключено (это является спекуляцией), что привычные нам понятия множества и логического вывода выделены из более широкого слоя объективной семантической реальности только нашей способностью взаимодействовать с семантическим слоем реальности и отображать его в фигурах культуры, а сам этот слой в каком-то неопределенном пока смысле может содержать и области, не связанные с этими понятиями, и для нас (пока, во всяком случае) недоступные.

На данный труд меня в очень существенной степени вдохновили плодотворные идеи и постоянная поддержка многих моих друзей и коллег. Особенно я благодарен В.А.Анисимову, А.В.Болдачеву, Л.М.Гиндилису, И.М.Гуревичу, В.В.Казютинскому и М.Б.Менскому, каждый из которых внес что-то существенно свое. Я благодарен также всем участникам круглого стола «Космология и философия» в ИФ РАН за обсуждение этой работы.

Примечания

1 *Панов А.Д.* Природа математики, космология и структура реальности: объективность мира математических форм // Космология, физика, культура / Отв. ред. В.В.Казютинский. М., 2011.

2 *Панов А.Д.* Методологические проблемы космологии и квантовой гравитации // Современная космология: философские горизонты / Под ред. В.В.Казютинского. М., 2011. С. 185–215.

3 Когда мы здесь говорим о квантовой причинности, имеется в виду причинность стандартной (копенгагенской) интерпретации квантовой механики. В этом случае считается, что причина (начальное состояние системы) определяет следствие (результат эксперимента) лишь вероятностным способом. Но в многомировой (эвереттовской) интерпретации все результаты квантового эксперимента сосуществуют одновременно, а сама теория строго причинным способом описывает связь корреляций, возникающих в конечном состоянии, с начальным состоянием. Это означает фактически возврат к классическому идеалу причинности, но на новом уровне (осуществленная мечта Эйнштейна: Бог не играет в кости.

4 Реально доказательство чаще имеет структуру дерева, содержащего несколько веточек, ведущих от исходных посылок, сливающихся по пути и сходящихся наконец к корню – результату всего процесса. Это несущественное усложнение не играет принципиальной роли. Машина Тьюринга, в частности, проходит ветви доказательства последовательно, одну за другой, выстраивая весь процесс в линейную цепочку. Параллельный компьютер может проходить ветви одновременно. Тезис Тьюринга-Черча говорит о том, что все такие способы эквивалентны.

[5] См. например: *Pirogov Yu.F.* Symplectic vs pseudo-Euclidean space-time with extra dimensions (arXiv:hep-ph/0105112 (2001); *George A.J.* Sparling. Spacetime is spinorial; new dimensions are timelike (arXiv:gr-qc/0610068 (2006); *Shun-Zhi Wang*. Hexad Preons and Emergent Gravity in 3-dimensional Complex Spacetime (arXiv:1007.0067 [gr-qc] (2010).

[6] Линейной причинностью мы будем называть такую ситуацию, когда между двумя событиями либо нет никакой причинной связи, либо одно причинно предшествует другому. В многомерном времени, вообще говоря, линейной причинности нет.

[7] Для квантовых объектов копирование информации запрещено теоремой неклонирования состояния (no-cloning theorem): вообще говоря, невозможно создать копию квантового состояния, не разрушив исходное состояние. См.: *Wootters W.K. and Zurek W.H.* A Single Quantum Cannot be Cloned // Nature. 1982. Vol. 299. P. 802–803; *Менский М.Б.* Человек и квантовый мир. Странности квантового мира и тайна сознания. Фрязино, 2007. С. 301–304.

[8] С формальной точки зрения математика может быть представлена также как «игра» с преобразованием текстов по определенным формальным правилам (как в программе Гильберта). Но этот подход основан на полном устранении понятия содержания из математики, и в данном случае он нас не интересует. Имеется точка зрения, что существенной альтернативой теории множеств при построении фундамента математики может быть теория категорий. Однако понятие категории (см.: *Голдблат Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983) явно строится как определенная структура над множествами – так же, как и другие абстрактные математические теории вроде теории групп и т. д. Категория *C* определяется двумя базисными множествами, называемыми множеством *C*-элементов и множеством *C*-морфизмов (морфизмы часто называются просто стрелками); для морфизмов вводятся определенные аксиомы (имеющие отношение к закону композиции морфизмов и определяющие так называемые единичные морфизмы) и т. д., – все как в обычной аксиоматической теории. Правда, вместо «множеств» при аксиоматическом определении категории говорят о «совокупностях», что, как мне представляется, не меняет сути. Поэтому, на мой взгляд, теорию категорий можно рассматривать как одну из частных структур в теории множеств. Особенностью данной ситуации является, правда, то, что среди всевозможных категорий имеется так называемая «категория множеств» (категория **Set**), в которой множество элементов совпадает с классом всех множеств, а морфизмы являются отображениями множеств друг на друга в обычном смысле. Такая категория оказывается тождественной всей теории множеств. В этом смысле теорию категорий можно считать включающей теорию множеств как частный случай. В общем, в некотором (не совсем простом) смысле теория категорий и теория множеств включают друг друга. Фактически они эквивалентны. Это не противоречит тому, что на языке категорий могут быть построены структуры, как будто бы обобщающие понятие множества, например, нечеткие множества. Но это похоже на то,

как на евклидовой плоскости могут быть реализованы модели неевклидовой геометрии (модель Клейна и др.) или как в метатеориях на основе классической аристотелевой логики строятся модели неклассических логик (см. более подробно далее по тексту).

9 Н.Бурбаки по этому поводу пишет: «…Если прежде могли думать, что каждая отрасль математики зависит от специфических интуиций, дающих ей первичные понятия и истины, и потому для каждой отрасли необходим свой специфический формализованный язык, то сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – Теории множеств. Таким образом, нам будет достаточно изложить принципы какого-то одного формализованного языка, рассказать, как сформулировать на этом языке Теорию множеств, а затем постепенно, по мере того, как наше внимание будет направляться на различные отрасли математики, показывать, как они включаются в Теорию множеств» (*Бурбаки Н.* Теория множеств. М., 1965. С. 25).

10 Некоторые исследуемые в математике «неклассические» логики, связанные с обобщением понятия истинности (многозначные, нечеткие, модальные и т. д.) представляют собой некоторые модели в обычной аристотелевой логике, но не определяют полные логики в точном смысле этого слова. В обычной двузначной аристотелевой логике есть только два значения истинности, и вполне понятно, что, например, про определенный математический символ всегда можно сказать с определенностью, записан он на бумаге в данном месте или нет. В последовательной, «настоящей» многозначной логике на вопрос о том, представлен ли данный математический символ в данном месте текста, должна быть обеспечена возможность дать ответ не только в форме «да-нет», а приписать присутствию символа произвольный статистический вес или модальность, как того требует расширенный набор истинностных значений. То есть сами математические тексты должны стать чем-то многозначным. Такие объекты люди помыслить, видимо, неспособны, и работать с ними невозможно. Поэтому и «настоящих» многозначных логик нет. В аристотелевой логике логический метаязык исследователя и логика исследуемой системы согласованы между собой. В различных многозначных логиках это невозможно обеспечить. «Квантовые» логики вообще не являются логиками, так как не поддерживают понятие дедукции (или, как минимум, с определением этого понятия есть большие проблемы). Они являются алгебрами специального вида (аналогами булевой алгебры). Впрочем, см. возражения: *Pavicic M., Megill N.D.* Is Quantum Logic a Logic? (arXiv:0812.2698v1 [quant-ph]). Интуиционистские и конструктивные логики являются лишь подмножествами обычной аристотелевой логики, запрещая некоторые виды «сомнительных» рассуждений (как закон исключения третьего и некоторые другие), но ничего не добавляя.

11 *Birkhoff G. von Neumann J.* The logic of quantum mechanics // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37. 823–843. Современный обзор концепций квантовой логики см.: *Dalla Chiara M.L., Giuntini R.* Quantum Logic (arXiv:quant-ph/0101028v2).

[12] *Putnam H.* Is Logic Empirical? // Boston Studies in the Philosophy of Science. Vol. 5 / Eds.: S.R.Cohen and M.W.Wartofsky. Dordrecht, 1968. P. 216–241. См. также: *Bacciagaluppi G.* Is Logic Empirical? // D.Gabbay, D.Lehmann and K.Engesser (eds), Handbook of Quantum Logic. Amsterdam, 2009. P. 49–78 (also under http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00003380/).

[13] *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // УФН. 1968. Т. 94. Вып. 3. С. 535–546.

[14] Но удивление все же вызывает. Хороший пример приведен в цитированной выше статье Евгения Вигнера. Для изучения законов демографии часто удобно пользоваться гауссовым распределением вероятностей, значения которого выражаются через число π. Но какое отношение народонаселение может иметь к длине окружности?

[15] Конечно, понятия логики и множества не были получены явным применением каких-либо экспериментальных процедур. Эти понятия возникли как производные от человеческой интуиции, но сама она отнюдь не является априорной – была выработана в процессе биологической и затем социальной эволюции в целях адаптации к окружающей действительности и выживания в ней. В качестве таковой интуиция апостериорным образом отражает наиболее базовые отношения объектов, встречающихся в практике, которая является существенно макроскопической и классической. То есть в роли «экспериментальной процедуры» здесь выступает вся эволюция, которая просто методом отбора создает соответствие интуиции и реальности.

[16] *Менский М.Б.* Человек и квантовый мир. Фрязино, 2007.

[17] *Mensky M.B.* Postcorrection and mathematical model of life in Extended Everett's Concept (arXiv:0712.3609, 2007).

[18] *Smolin L.* The unique universe, 2009 (http://physicsworld.com/cws/article/indepth/39603).

[19] *Пенроуз Р.* Тени разума. Москва–Ижевск, 2005. С. 627.

[20] Заметим, что на самом деле никакой логической связи между «последовательным платонизмом» и верой в его вневременную природу нет, если только под платонизмом понимать идею об объективном существованием мира математических форм, но не иметь в виду в точности точку зрения самого Платона, который действительно предполагал вневременную природу идеального мира. Объективный мир математики вполне может мыслиться как динамическая структура, что подробно обсуждается далее.

[21] То же самое можно сказать и о рассматриваемой Ли Смолиным зависимости фундаментальных законов от фундаментального времени.

[22] Кроме квантовой гравитации, где, правда, рано говорить о каких-то законченных теориях. Наш анализ ограничен классическими представлениями о пространстве-времени.

[23] Можно сказать, что мир математических форм – это та часть семантического слоя реальности, которая допускает отображение в материальный мир в форме науки – математики.

[24] Напомним, что наблюдаемость и воспроизводимость в квантовой области ясный смысл имеют только для ансамблей.

[25] *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М., 1990; *Linde A.* Inflationary Cosmology (arXiv:0705.0164 [hep-th], 2007); *Горбунов Д.С., Рубаков В.А.* Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. М., 2008; *Те же.* Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория. М., 2010; *Лукаш В.Н., Михеева Е.В.* Физическая космология. М., 2010.

[26] *Панов А.Д.* Методологические проблемы космологии и квантовой гравитации // Современная космология: философские горизонты / Под ред. В.В.Казютинского. М., 2011. С. 185–215; *Он же.* Вероятностная интерпретация антропного принципа и Мультиверс // Там же. С. 270–294.

[27] *Гуревич М.И.* Законы информатики – основа исследований и проектирования сложных систем связи и управления. Метод. пособие. М., 1989; *Seth L.* Computational capacity of the universe (arXiv:quant-ph/0110141, 2001).

[28] Краткий, но современный и регулярно обновляемый обзор этого направления можно найти в Википедии (http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_physics).

[29] *Гуревич И.М.* Информационные характеристики физических систем. М., 2009.

[30] *Налимов В.В.* Спонтанность сознания: Вероятностная теория смыслов и смысловая архитектоника личности. М., 1989; В поисках иных смыслов. М., 1993.

[31] *Lee J.-W.* Physics from information (arXiv:1011.1657v1 [hep-th]); *D'Ariano G.M.* Physics as quantum information processing (arXiv:1012.2597v1 [quant-ph]б, 2010). Не могу сказать, чтобы эти статьи меня в чем-нибудь убедили.

[32] Однако неверно было бы сказать, что функция Дирихле вообще не имеет никакого образа в физической действительности. Она представляется, например, текстом в учебнике по анализу.